2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
一试试题（B 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合 $A=\left\{a^2 \mid a\in\mathbf{Z}, a^2\geq 2025\right\}$，$B=\left\{2^b \mid b\in\mathbf{Z}, 9\leq b\leq 14\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为_____.

2. 若 $\sin 20^\circ\sin 25^\circ+\sin\alpha=\cos 20^\circ\cos 25^\circ$，则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____.

3. 若 $\log_3 x, \log_9(3x), \log_{27}(9x)$ 成等比数列，则正数 x 的值为_____.

4. 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}$ 与 $z^2+2\mathrm{i}$ 均为实数（i 为虚数单位），则 $\left|z^3+3\mathrm{i}\right|$ 的值为_____.

5. 若 $x, y>0$ 且 $x+y=1$，则 $\dfrac{y+1}{x}+\dfrac{x+2}{y}$ 的最小值为_____.

6. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，若 Γ 上存在一点 P，使得直线 F_1P, F_2P 的斜率分别为 $\dfrac{1}{2}, 2$，则 Γ 的离心率为_____.

7. 平面中的 3 个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}\leq-\dfrac{1}{2}$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的最大值与最小值之和为_____.

8. 从 20 个数 $1, 2, 3, \cdots, 20$ 中选出 4 个不同的数（不计顺序），使它们的乘积为 2025 的倍数，则不同选法的数目为_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（**本题满分 16 分**）设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，$g(x)=(x-1)f(x)$，$h(x)=f(x)+x$. 若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，求 $\dfrac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)}$ 的值.

10.（**本题满分 20 分**）在平面直角坐标系中，一条过点 $(0,1)$ 的直线 l 经过点集 $\Gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\, y^2=x+3|x|\right\}$ 中的四个点 $(x_i, y_i)\,(i=1,2,3,4)$. 求 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ 的取值范围.

11.（**本题满分 20 分**）对整数 $n\geq 3$，在一个棱长均为 1 的正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中，随机选取两条不同的棱 l_1, l_2，将事件“l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 P_n. 是否存在两个不同的正整数 $k, l\,(k, l\geq 3)$ 满足 $P_k=P_l$？证明你的结论.

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
加试试题（B 卷）

一．（本题满分 40 分）设 $a,b,c>0$，$a+b+c=3$，记

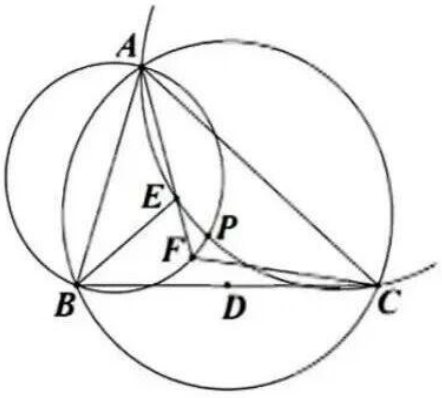
$$S=a+ab+abc+bc+c.$$

(1) 证明：$S\le 5$；

(2) 若 $S=3$，求 b 的取值范围.

二．（本题满分 40 分） 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 的中点，$\angle BAC$ 平分线上的两点 E,F 满足 $\angle AEB=\angle AFC=180^\circ-\angle BAC$，$\triangle AFB$ 的外接圆与 $\triangle AEC$ 的外接圆交于 A 及另一点 P．证明：A,P,D 三点共线.

（答题时请将图画在答卷纸上）



三．（本题满分 50 分）给定整数 $n\ge 2$．设 A 是由 n 个不同的正整数构成的集合，记 m 为集合 $B=\{x+yz\mid x,y,z\in A\}$ 的元素个数．证明：$m\ge n^2+n-1$，并且存在集合 A 使得 $m=n^2+n-1$.

四．（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 n：存在 n 的一个倍数 N，其在十进制表示下含有 $0,1,2,\cdots,9$ 中每一个数码，并且对任意 $i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，可以删去 N 的十进制表示中的一个数码 i，使所得的数仍是 n 的倍数.

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合 $A=\left\{a^2 \mid a\in\mathbf{Z}, a^2\geq 2025\right\}$，$B=\left\{2^b \mid b\in\mathbf{Z}, 9\leq b\leq 14\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为_____.

答案： 2 .

解： 在 B 的元素中，$2^9, 2^{11}, 2^{13}$ 都不是平方数，2^{10} 小于 2025，所以它们都不属于 A，而 $2^{12}=64^2\in A, 2^{14}=128^2\in A$，所以 $A\cap B$ 的元素个数为 2 .

2. 若 $\sin 20^\circ\sin 25^\circ+\sin\alpha=\cos 20^\circ\cos 25^\circ$，则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____.

答案： 0 .

解： $\sin\alpha=\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ=\cos(20^\circ+25^\circ)=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=0$.

3. 若 $\log_3 x, \log_9(3x), \log_{27}(9x)$ 成等比数列，则正数 x 的值为_____.

答案： 3 或 $\dfrac{1}{27}$.

解： 设 $\log_3 x=t$，则 $t, \dfrac{1+t}{2}, \dfrac{2+t}{3}$ 成等比数列. 所以 $\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^2=t\cdot\dfrac{2+t}{3}$，化简得 $t^2+2t-3=0$，解得 $t=1$ 或 -3 . 相应有 $x=3^t=3$ 或 $\dfrac{1}{27}$.

4. 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}$ 与 $z^2+2\mathrm{i}$ 均为实数（i 为虚数单位），则 $\left|z^3+3\mathrm{i}\right|$ 的值为_____.

答案： $\sqrt{5}$.

解： 由 $z+\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，可设 $z=a-\mathrm{i}\,(a\in\mathbf{R})$，则 $z^2+2\mathrm{i}=(a-\mathrm{i})^2+2\mathrm{i}$.

再由 $z^2+2\mathrm{i}\in\mathbf{R}$ 可知 $\mathrm{Im}(z^2+2\mathrm{i})=-2a+2=0$，得 $a=1$，故 $z=1-\mathrm{i}$.

计算得 $z^3=-2-2\mathrm{i}$，因此 $\left|z^3+3\mathrm{i}\right|=\left|-2+\mathrm{i}\right|=\sqrt{5}$.

5. 若 $x, y>0$ 且 $x+y=1$，则 $\dfrac{y+1}{x}+\dfrac{x+2}{y}$ 的最小值为_____.

答案： $3+2\sqrt{6}$.

解： 由条件并利用基本不等式，可知

$$\frac{y+1}{x}+\frac{x+2}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{3x+2y}{y}=3+\frac{2y}{x}+\frac{3x}{y}$$
$$\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}=3+2\sqrt{6}.$$

当$\frac{2y}{x}=\frac{3x}{y}$（即$x=\sqrt{6}-2, y=3-\sqrt{6}$）时，$\frac{y+1}{x}+\frac{x+2}{y}$取到最小值$3+2\sqrt{6}$.

6. 设F_1, F_2分别为椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，若$\Gamma$上存在一点$P$，使得直线$F_1P, F_2P$的斜率分别为$\frac{1}{2}, 2$，则$\Gamma$的离心率为_____.

答案： $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

解： 将ΔPF_1F_2的三个内角$\angle F_1PF_2, \angle PF_1F_2, \angle PF_2F_1$分别记为$\alpha, \beta, \gamma$.

由条件易知P在第一象限，$\tan\beta=\frac{1}{2}, \tan\gamma=-2$. 进而

$$\tan\alpha=\tan(180^\circ-\beta-\gamma)=-\tan(\beta+\gamma)=-\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\frac{3}{4}.$$

所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}, \sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}, \sin\gamma=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由于$|F_1F_2|$是Γ的焦距，$|PF_1|+|PF_2|$是Γ的长轴长，且由正弦定理知

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin\alpha}=\frac{|PF_2|}{\sin\beta}=\frac{|PF_1|}{\sin\gamma},$$

所以Γ的离心率$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma+\sin\beta}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. 平面中的3个单位向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}\geq\frac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}\leq-\frac{1}{2}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$的最大值与最小值之和为_____.

答案： $\sqrt{3}+1$.

解： 由条件知$(\vec{a}+\vec{b})^2=2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 3$，$(\vec{b}+\vec{c})^2=2+2\vec{b}\cdot\vec{c}\leq 1$，结合三角不等式知$\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-\left|\vec{c}\right|\leq\left|\vec{a}+\vec{b}\right|-\left|\vec{c}\right|\leq\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|\leq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\leq\left|\vec{a}\right|+1=2$.

当$\vec{a}=(1,0), \vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{c}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$时，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$取到最大值2.

当$\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right), \vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right), \vec{c}=(-1,0)$时，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$取到最小值$\sqrt{3}-1$.

因此$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$的最大值与最小值之和为$2+(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}+1$.

8. 从20个数$1, 2, 3, \cdots, 20$中选出4个不同的数（不计顺序），使它们的乘积为2025的倍数，则不同选法的数目为_____.

答案： 24 .

解： 在 $1,2,3,\cdots,20$ 中，3 的倍数有 $3,6,9,12,15,18$，其中 $9,18$ 含素因子 3 的次数为 2，其余均不是 3^2 的倍数；5 的倍数有 $5,10,15,20$，且它们均不是 5^2 的倍数；这些数中只有 15 既是 3 的倍数又是 5 的倍数.

将选出的 4 个数记为 a,b,c,d . 由 $2025=3^4\times5^2$ 知 $3^4\mid abcd$, $5^2\mid abcd$.

若 $9,18$ 都不选，则 a,b,c,d 必须都选 3 的倍数，但此时 $5^2\nmid abcd$，不合要求.

若 $9,18$ 恰选一个，则 $3,6,12,15$ 至少选两个，$5,10,15,20$ 至少选两个，这样 15 必须选. 不妨设 $a\in\{9,18\}$, $b=15$, $c\in\{3,6,12\}$, $d\in\{5,10,20\}$，则有 $2\times1\times3\times3=18$ 种选法.

若 $9,18$ 都选，则恰需在 $5,10,15,20$ 中选两个，有 $\mathrm{C}_4^2=6$ 种选法.

综上，满足要求的选法的数目为 $18+6=24$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，$g(x)=(x-1)f(x)$，$h(x)=f(x)+x$．若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，求 $\dfrac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)}$ 的值.

解： 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $\begin{cases}g(-x)=-g(x),\\ h(-x)=h(x),\end{cases}$，即 $\begin{cases}(-x-1)f(-x)=-(x-1)f(x),\\ f(-x)-x=f(x)+x.\end{cases}$

……4 分

所以 $(x-1)f(x)=(x+1)f(-x)=(x+1)(f(x)+2x)$，即 $f(x)=-x(x+1)$.

……8 分

因此，$\dfrac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)}=\prod\limits_{k=1}^{50}\dfrac{-(2k-1)\cdot2k}{-2k\cdot(2k+1)}=\prod\limits_{k=1}^{50}\dfrac{2k-1}{2k+1}=\dfrac{1}{101}$.

……16 分

10.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系中，一条过点 $(0,1)$ 的直线 l 经过点集 $\Gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\,y^2=x+3|x|\right\}$ 中的四个点 $(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$. 求 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ 的取值范围.

解： 根据条件，显然 l 不是 y 轴，设 $l:y=kx+1$，代入方程 $y^2=x+3|x|$ 得

$$(kx+1)^2=x+3|x|\ .\qquad①$$

显然 $x\neq0$．当 $x>0$ 时，①变为

$$k^2x^2+(2k-4)x+1=0\ ;\qquad②$$

当 $x<0$ 时，①变为

$$k^2x^2+(2k+2)x+1=0\ .\qquad③$$

由于①有四个相异的实根，故②有两个相异正根，且③有两个相异负根，即

$$\begin{cases}k\neq0,\\ (2k-4)^2-4k^2>0,\ 2k-4<0,\\ (2k+2)^2-4k^2>0,\ 2k+2>0,\end{cases}$$

解得 $k\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,1)$. ……10 分

不妨设 x_1,x_2 为②的两根，x_3,x_4 为③的两根，则

$$x_1+x_2=-\frac{2k-4}{k^2},\ x_1x_2=\frac{1}{k^2},\ x_3+x_4=-\frac{2k+2}{k^2},\ x_3x_4=\frac{1}{k^2},$$

于是

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=-(2k-4)-(2k+2)$$
$$=2-4k\in(-2,2)\cup(2,4). \quad \text{……20 分}$$

11.（本题满分 20 分）对整数 $n\geq 3$，在一个棱长均为1的正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中，随机选取两条不同的棱 l_1,l_2，将事件“l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 P_n．是否存在两个不同的正整数 $k,l\ (k,l\geq 3)$ 满足 $P_k=P_l$？证明你的结论．

解：在正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中选取两条棱 l_1,l_2 的方法数为 C_{3n}^2．

现考虑 $l_1/\!/l_2$ 的选法，显然 l_1,l_2 均为侧棱或均为底面上的棱．

若 l_1,l_2 均为侧棱，则所有 C_n^2 种选法都满足要求．

若 l_1,l_2 均为底面上的棱，注意到正 n 棱柱的两个底面都是正 n 边形，且对应边平行，可按 n 的奇偶性讨论如下：

当 n 为奇数时，正 n 边形没有平行边，故 $l_1/\!/l_2$ 当且仅当 l_1,l_2 选自两个底面的对应边，有 n 种选法．相应可知

$$P_n=\frac{\mathrm{C}_n^2+n}{\mathrm{C}_{3n}^2}=\frac{n+1}{3(3n-1)}.$$

当 n 为偶数时，正 n 边形恰有 $\frac{n}{2}$ 组对边平行，故两个底面的 $2n$ 条边可按平行关系分为 $\frac{n}{2}$ 组，每组4条，则 l_1,l_2 有 $\frac{n}{2}\cdot\mathrm{C}_4^2=3n$ 种选法．相应可知

$$P_n=\frac{\mathrm{C}_n^2+3n}{\mathrm{C}_{3n}^2}=\frac{n+5}{3(3n-1)}. \quad \text{……10 分}$$

假设存在两个不同的正整数 $k,l\ (k,l\geq 3)$ 满足 $P_k=P_l$．

若 k,l 都是奇数，则 $\frac{k+1}{3(3k-1)}=\frac{l+1}{3(3l-1)}$，化简得 $k=l$，矛盾．

若 k,l 都是偶数，则 $\frac{k+5}{3(3k-1)}=\frac{l+5}{3(3l-1)}$，化简得 $k=l$，矛盾．

若 k,l 一奇一偶，不妨设 $k=2s-1,l=2t$，则

$$\frac{2s}{3(6s-4)}=P_{2s-1}=P_{2t}=\frac{2t+5}{3(6t-1)},$$

即 $\frac{s}{3s-2}=\frac{2t+5}{6t-1}$，化简得 $4s-t=\frac{5}{2}$，矛盾．

综上，不存在正整数 k,l 满足要求． ……20 分

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
加试（B 卷）参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（**本题满分 40 分**）设 $a,b,c>0$，$a+b+c=3$，记

$$S=a+ab+abc+bc+c\,.$$

(1) 证明：$S\le 5$；

(2) 若 $S=3$，求 b 的取值范围．

解：(1) 由于 $S=abc+(a+c)(b+1)$，利用均值不等式及 $a+b+c=3$，得

$$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1,$$

$$(a+c)(b+1)\le\left(\frac{(a+c)+(b+1)}{2}\right)^2=4,$$

两式相加得 $S\le 5$．　　……20 分

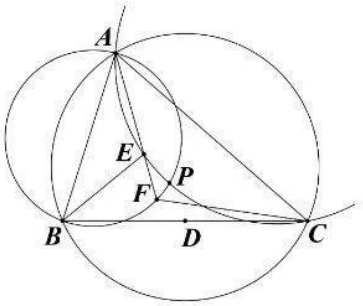
(2) 由 $S=3$ 及 $a+b+c=3$，可知 $b(a+ac+c)=S-a-c=b$，又 $b>0$，故 $a+ac+c=1$，即 $(a+1)(c+1)=2$．

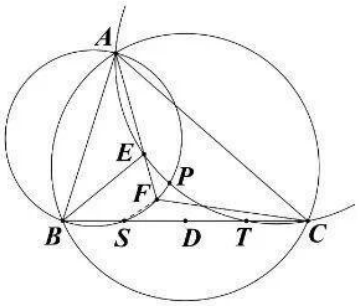
由 $a>0$ 知 $a+1>1$，由 $c>0$ 知 $a+1=\dfrac{2}{c+1}<2$．注意到函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上严格减，在 $[\sqrt{2},2]$ 上严格增，且 $f(1)=3,\ f(\sqrt{2})=2\sqrt{2},\ f(2)=3$，故由 $a\in(1,2)$ 知 $a+1+\dfrac{2}{a+1}\in[2\sqrt{2},3)$．

从而 $b=3-a-c=5-\left(a+1+\dfrac{2}{a+1}\right)\in(2,5-2\sqrt{2}]$．　　……40 分

二．（本题满分 40 分） 如图，在△ABC中，D为边BC的中点，$\angle BAC$平分线上的两点E,F满足$\angle AEB=\angle AFC=180^\circ-\angle BAC$，△$AFB$的外接圆与△$AEC$的外接圆交于$A$及另一点$P$．证明：$A,P,D$三点共线．

（答题时请将图画在答卷纸上）





证明：用A,B,C分别记△ABC的三个内角，a,b,c分别表示角A,B,C所对边的长．由条件知$\angle BAE=\angle FAC=\dfrac{A}{2}$，结合$\angle AEB=\angle CFA=180^\circ-A$，可知$\angle EBA=\dfrac{A}{2}$，$\angle ACF=\dfrac{A}{2}$．所以$\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AC}{CF}=2\cos\dfrac{A}{2}$．　……10 分

设△AFB的外接圆与△AEC的外接圆分别再次交边BC于点S和T．

连接FS，则$\angle CSF=\angle BAF=\dfrac{A}{2}$，并且

$\angle SFC=360^\circ-\angle CFA-\angle AFS=(180^\circ-\angle CFA)+(180^\circ-\angle AFS)=A+B$，

故由正弦定理知$\dfrac{CS}{CF}=\dfrac{\sin\angle SFC}{\sin\angle CSF}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}$．

于是$CS=\dfrac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}\cdot CF=\dfrac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}\cdot\dfrac{AC}{\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{2\sin C}{\sin A}\cdot b=\dfrac{2bc}{a}$．

同理得$BT=\dfrac{2bc}{a}$，所以$BT=CS$．　……30 分

结合$DB=DC$，可得$DS=DT$，所以$DB\cdot DS=DC\cdot DT$，即点D在△AFB的外接圆与△AEC的外接圆的根轴上，故A,P,D三点共线．　……40 分

三．（**本题满分 50 分**）给定整数 $n\geq 2$．设 A 是由 n 个不同的正整数构成的集合，记 m 为集合 $B=\{x+yz\,|\,x,y,z\in A\}$ 的元素个数．证明：$m\geq n^2+n-1$，并且存在集合 A 使得 $m=n^2+n-1$．

证明：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$．

对 $k=1,2,\cdots,n$，令集合

$$B_k=\{a_i+a_ka_n\,|\,i\in\{1,2,\cdots,n\}\},$$

则对 $k=1,2,\cdots,n-1$，由正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 可知

$$\max B_k=a_n+a_ka_n=(1+a_k)a_n\leq a_{k+1}a_n<a_1+a_{k+1}a_n=\min B_{k+1}.\qquad①$$

……20 分

再令集合 $B_0=\{a_1+a_1a_j\,|\,j\in\{1,2,\cdots,n-1\}\}$，则

$$\max B_0=a_1+a_1a_{n-1}<a_1+a_1a_n=\min B_1.\qquad②$$

由①、②知 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 是 B 的两两不交的子集．又 $|B_0|=n-1$，且 $|B_k|=n$，$k=1,2,\cdots,n$，从而

$$m=|B|\geq|B_0|+|B_1|+\cdots+|B_n|=n-1+n\times n=n^2+n-1.\qquad③$$

……40 分

下面构造一个集合 A，使得 $m=n^2+n-1$．

取 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，则对任意 $x,y,z\in A$，有 $2\leq x+yz\leq n+n^2$，且 $x+yz$ 为正整数，故 $m\leq(n^2+n)-2+1=n^2+n-1$，结合③知此时 $m=n^2+n-1$．

……50 分

四.（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 n：存在 n 的一个倍数 N，其在十进制表示下含有 $0,1,2,\cdots,9$ 中每一个数码，并且对任意 $i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，可以删去 N 的十进制表示中的一个数码 i，使所得的数仍是 n 的倍数.

解：所求的 n 为满足 $3\nmid n$ 的所有正整数 n.

必要性：若 $3\mid n$，则 $3\mid N$，可知 N 的数码和被 3 整除，但是 N 删去一个 1 后，数码和不被 3 整除，从而不可能是 n 的倍数. ……10 分

充分性：设 $n=2^{\alpha}5^{\beta}d$，其中 α,β 为非负整数，d 与 10 互素. 对由数码构成的若干个数码串 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，记 $\overline{M_1*M_2*\cdots*M_k}$ 为将 $M_1,M_2,\cdots,M_k$ 依次写下来所构成的数码序列（看作十进制数）.

构造 N 如下：取正整数 k 满足 $10^k>d$，令

$$N=\overline{A_1*1*A_2*2*\cdots*A_9*9*A_{10}*B},$$

其中 A_1 是正整数，$A_2,A_3,\cdots,A_{10}$ 均是 k 位数码串，B 是 l 个 0 构成的数码串，这里 $l>\max\{\alpha,\beta\}$.

对 $1\le i\le 9$，将 N 删去上面表达式中的 i 后所得的数记为 N_i，则易知

$$N-N_i=(9\times\overline{A_1*1*\cdots*A_{i-1}*(i-1)*A_i}+i)\times 10^{l_i},$$

其中 $l_i=(9-i)(k+1)+k+l$.

我们要求 $d\mid N-N_i\ (1\le i\le 9)$. ……20 分

取 $A_1\in[1,10^k)$，满足 $9A_1+1\equiv 0\pmod d$，这由 $3\nmid d$ 及 $d<10^k$ 可知 A_1 存在，从而 $d\mid N-N_1$.

假设已经取了 $A_1,\cdots,A_i\ (i<9)$，使得 $d\mid N-N_j\ (1\le j\le i)$，则由 $3\nmid d$ 及 $d<10^k$ 知，可取 $A_{i+1}\in[1,10^k)$ 满足

$$9\times(\overline{A_1*1*\cdots*A_i*i}\times 10^k+A_{i+1})+(i+1)\equiv 0\pmod d,$$

从而 $d\mid N-N_{i+1}$. 若 A_{i+1} 不足 k 位，则在其最高位前用 0 补足至 k 位，则上式显然仍成立. 这样取定了 $A_1,A_2,\cdots,A_9$. ……30 分

再取 $A_{10}\in[1,10^k)$（同上用 0 补足至 k 位），使得

$$\overline{A_1*1*\cdots*A_9*9*A_{10}}=10^k\times\overline{A_1*1*\cdots*A_9*9}+A_{10}\equiv 0\pmod d,$$

这样 $d\mid N$. 因为 $l>\max\{\alpha,\beta\}$，故 $2^{\alpha}5^{\beta}\mid 10^{l-1}$，从而 $n\mid\dfrac{N}{10}$，更有 $n\mid N$.

现在证明如上构造的 N 满足要求.

若 N 删去末位的一个 0，则得到的数为 $\dfrac{N}{10}$，这是 n 的倍数.

此外，对 $i=1,2,\cdots,9$，由 $d\mid N-N_i$ 及 $l_i>l>\max\{\alpha,\beta\}$，可知 $n\mid N-N_i$，结合 $n\mid N$ 知 $n\mid N_i$. 证毕. ……50 分