2025年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨2025全国高中数学联合竞赛

一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1．若 $\log_3(9x),\log_9(27x),\log_{27}(3x)$ 成等差数列，则正数 x 的值为_____.

2．设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,100\},B=\{a^2+2^a\mid a\in A\}$ ，则 $A\cup B$ 的元素个数为_____，

3．设点 P 在椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上，F_1,F_2 为 Γ_1 的两个焦点，线段 F_1P 交椭圆 $\Gamma_2:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{14}=1$ 于点 Q ．若 ΔF_2PQ 的周长为 8 ，则线段 F_1Q 的长度为_____.

4．设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R},g(x)=(x-1)f(x),h(x)=f(x)+x$ ．若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

5．若正整数 k 满足 $\left(\dfrac{\sin20^\circ}{\cos25^\circ}+\dfrac{\sin25^\circ}{\cos20^\circ}\cdot\mathrm{i}\right)^k\in\mathbf{R}$（ i 为虚数单位），则 k 的最小值为_____.

6．设 Γ 为任意四棱柱，在 Γ 的 12 条棱中随机选取两条不同的棱 l_1,l_2 ，将事件“ l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行 " 发生的概率记为 $P(\Gamma)$ ，则 $P(\Gamma)$ 所有可能值为_____.

7．平面中的 3 个单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数），则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的取值范围是_____.

8．将 $1,2,3,\cdots,9$ 排列为 a,b,c,d,e,f,g,h,i ，使得 3 个三位数 $\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi}$ 之和等于 2025 ，则不同的排列方法数为_____.

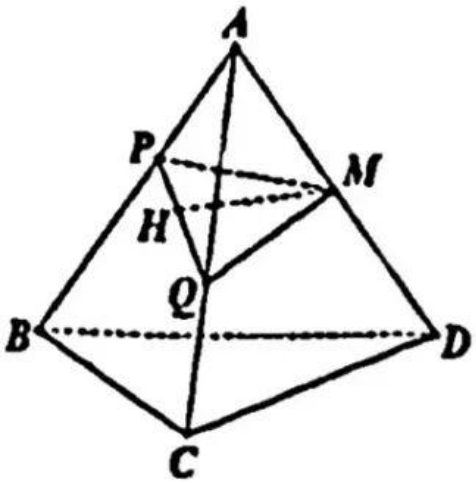
二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过屋或演算步骤．

9．（**本题满分 16 分**）在平面直角坐标系 xOy 中，点集

$$\Gamma=\left\{(x,y)\middle|y^2=2x+2|x|\right\}$$

若 Γ 中的 3 个不同的点 M,P,Q 满足：M 为 PQ 的中点，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求点 M 的坐标．

10．（**本题满分 20 分**）设正四面体 $ABCD$ 各棱长均为 $2,P,Q$ 分别是棱 AB,AC 上的动点（允许位于棱的端点），$AP+AQ=2,M$ 为棱 AD 的中点．在 $\triangle MPQ$ 中，MH 为 PQ 边上的高．求 MH 长度的最小值．



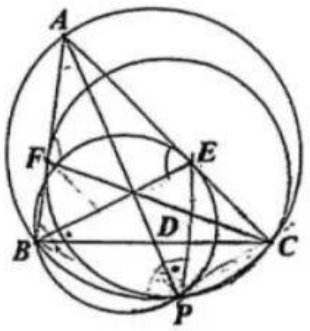
11．（**本题满分 20 分**）设 α 为实数，m,n 为正整数，且 $\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha\neq 0$．

证明：$\dfrac{1}{|\sin m\alpha|}+\dfrac{1}{|\sin n\alpha|}>\dfrac{1}{m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|}$．

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
加试试题（A 卷）

一．（本题满分 40 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 的中点，延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 P，过点 B, P 作一个圆与边 AC 相切于点 E，过点 C, P 作一个圆与边 AB 相切于点 F．证明：AD, BE, CF 三线共点．

（答题时请将图画在答卷纸上）



二．（本题满分 40 分）设 m, n, k 都是正整数，$m \geq 2$，且 $n \geq k \geq 2$，实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$，满足以下两个条件：

(i) $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m \geq 1$；

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k$．

证明：$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 1$．

三．（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 n：存在 n 的一个倍数 N，其在十进制表示下不含数码 0，但含有 $1, 2, \cdots, 9$ 中每一个数码，并且对任意 $i \in \{1, 2, \cdots, 9\}$，可以删去 N 的十进制表示中的一个数码 i，使所得的数仍是 n 的倍数．

四．（本题满分 50 分）给定整数 $t > 10000$．甲乙两人玩如下的游戏，猜一个满足 $\tau(N) \leq t^2 + t + 100$ 的正整数 N，这里 $\tau(N)$ 是 N 的正约数个数．规则如下：

先由甲确定一个正整数 k，并告知乙．然后乙想一个满足要求的 N，并且：

(i) 告诉甲 $\tau(N)$ 的值；

(ii) 给出 N 的 k 个不同的正约数（若 $\tau(N) \leq k$，则乙只需给出 N 的所有正约数；若 $\tau(N) > k$，则乙可以选择性地给出 N 的 k 个正约数）．

求最小的 k，使得甲一定能猜出 N．

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若 $\log_3(9x), \log_9(27x), \log_{27}(3x)$ 成等差数列，则正数 x 的值为_____.

答案： 9.

解： 设 $\log_3 x = t$，则 $2+t, \dfrac{3+t}{2}, \dfrac{1+t}{3}$ 成等差数列，即 $2+t+\dfrac{1+t}{3}=2\cdot\dfrac{3+t}{2}$，解得 $t=2$，故 $x=3^t=9$.

2. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$，$B=\{a^2+2^a \mid a\in A\}$，则 $A\cup B$ 的元素个数为_____.

答案： 194.

解： 当 $a\in[0,\infty)$ 时，a^2+2^a 关于 a 严格递增，故 $|B|=|A|=100$（$|X|$ 表示有限集 X 的元素个数）. 又 $1^2+2^1=3>1$，$6^2+2^6=100$，故 $|A\cap B|=6$.

所以 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=100+100-6=194$.

3. 设点 P 在椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上，F_1, F_2 为 Γ_1 的两个焦点，线段 F_1P 交椭圆 $\Gamma_2:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{14}=1$ 于点 Q. 若 ΔF_2PQ 的周长为 8，则线段 F_1Q 的长度为_____.

答案： $\sqrt{14}+1$.

解： 由于 $\sqrt{25-20}=\sqrt{14-9}$，故 F_1, F_2 是 Γ_1 与 Γ_2 的公共焦点.

由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=10$，$|QF_1|+|QF_2|=2\sqrt{14}$，即

$$|PQ|+|PF_2|=10-|QF_1|,\ |QF_2|=2\sqrt{14}-|QF_1|.$$

所以 $10+2\sqrt{14}-2|QF_1|=|PQ|+|PF_2|+|QF_2|=8$，即线段 F_1Q 的长为 $\sqrt{14}+1$.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=(x-1)f(x)$，$h(x)=f(x)+x$. 若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

答案： $\dfrac{1}{4}$.

解： 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $\begin{cases} g(-x)=-g(x), \\ h(-x)=h(x), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (-x-1)f(-x)=-(x-1)f(x), \\ f(-x)-x=f(x)+x. \end{cases}$

所以 $(x-1)f(x)=(x+1)f(-x)=(x+1)(f(x)+2x)$.

因此 $f(x)=-x(x+1)=\frac{1}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{4}$.

5. 若正整数 k 满足 $\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}\right)^k\in\mathbf{R}$（i 为虚数单位），则 k 的最小值为_____.

答案： 18.

解： 由于

$$\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cdot \mathrm{i}}{\cos 20^\circ\cos 25^\circ}=\frac{\sin 40^\circ+\sin 50^\circ\cdot \mathrm{i}}{2\cos 20^\circ\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{1}{2\cos 20^\circ\cos 25^\circ}\cdot(\cos 50^\circ+\sin 50^\circ\cdot \mathrm{i}),$$

故

$$\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}\right)^k=\frac{1}{(2\cos 20^\circ\cos 25^\circ)^k}\cdot(\cos 50k^\circ+\sin 50k^\circ\cdot \mathrm{i}),$$

上式为实数当且仅当 $\sin 50k^\circ=0$，即 $18\mid 5k$，故所求 k 的最小值为 18.

6. 设 Γ 为任意四棱柱，在 Γ 的 12 条棱中随机选取两条不同的棱 l_1, l_2，将事件“l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 $P(\Gamma)$，则 $P(\Gamma)$ 的所有可能值为_____.

答案： $\frac{5}{33}, \frac{7}{33}, \frac{3}{11}$.

解： 记 Γ 为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则 $AB\parallel A_1B_1$, $BC\parallel B_1C_1$, $CD\parallel C_1D_1$, $DA\parallel D_1A_1$，且 $AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$，并且底面上的棱与侧棱不平行.

考虑底面 $ABCD$ 的形状. 当两组对边都不平行时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_2^2\times 4+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{5}{33}$；当 $ABCD$ 为梯形时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_2^2\times 2+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{7}{33}$；当 $ABCD$ 为平行四边形时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{3}{11}$. 因此 $P(\Gamma)$ 的所有可能值为 $\frac{5}{33}, \frac{7}{33}, \frac{3}{11}$.

7. 平面中的 3 个单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]$（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数），则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的取值范围是_____.

答案： $\{1\}\cup(\sqrt{5},\sqrt{2}+1]$.

解： 由 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=1$ 及 $\vec{a}\cdot\vec{b}=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]\in\mathbf{Z}$，可知 $\vec{a}\cdot\vec{b}\in\{-1,0,1\}$.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $\vec{a}=\vec{b}$，此时 $[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=2[\vec{a}\cdot\vec{c}]$ 为偶数，不可能为 1，矛盾.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，则 $\vec{b}=-\vec{a}$，此时 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$（相应的例子存在，例如 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为锐角时，由 $-1<-\vec{b}\cdot\vec{c}<0<\vec{a}\cdot\vec{c}<1$ 知 $[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=-1=\vec{a}\cdot\vec{b}$）.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，不妨设 $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,1)$, $\vec{c}=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$.

记 $f(\theta)=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=[\cos\theta]+[\sin\theta]$.

当$\theta=0$或$\frac{\pi}{2}$时，$f(\theta)=1\neq 0$，当$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$时，$f(\theta)<0$，均不合要求.

当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(\theta)=0$，满足要求，此时

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\in(\sqrt{5},\sqrt{2}+1].$$

综上，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$的取值范围是$\{1\}\cup(\sqrt{5},\sqrt{2}+1]$.

8. 将$1,2,3,\cdots,9$排列为a,b,c,d,e,f,g,h,i，使得3个三位数$\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi}$之和等于2025，则不同的排列方法数为_____.

答案：1944.

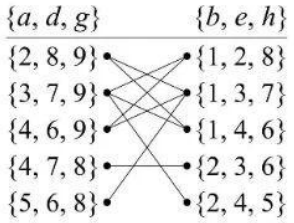
解：记$A=a+d+g,\ B=b+e+h,\ C=c+f+i$.

由条件知$A+B+C=1+2+3+\cdots+9=45$，且$100A+10B+C=2025$.

注意到C为5的倍数，且$1+2+3\leq C\leq 9+8+7$，故$C=15$.

从而$A+B=30$，且$100A+10B=2010$. 解得$A=19,\ B=11$.

满足$A=19,\ B=11$且$\{a,d,g\}$与$\{b,e,h\}$是$\{1,2,3,\cdots,9\}$的两个不交的集合的情形，恰有如下连线所表示的9种，每种情形均使集合$\{c,f,i\}$随之确定，再考虑到a,d,g的次序，b,e,h的次序，c,f,i的次序分别有$3!=6$种选择，故所求排列方法数为$9\times 6^3=1944$.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）在平面直角坐标系xOy中，点集

$$\Gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\,y^2=2x+2|x|\right\}.$$

若Γ中的3个不同的点M,P,Q满足：M为PQ的中点，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求点$M$的坐标.

解：根据条件，Γ是x轴负半轴与抛物线$\Omega:y^2=4x$的并集. ……4 分

假如P,Q均在x轴负半轴上，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$，与$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$矛盾.

假如P,Q均在Ω上，则PQ的中点M不可能在Ω上，且M也不可能在x轴负半轴上，与$M\in\Gamma$矛盾.

因此，可不妨设P在x轴负半轴上，Q在抛物线Ω上，易知此时M在Ω上.

设$P(a,0),\ Q(b^2,2b),\ M(m^2,2m)$，其中$a<0$，$b,m\in\mathbf{R}$.

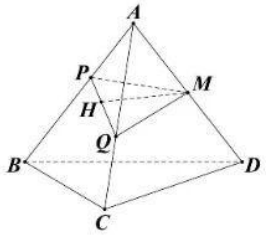
由M为PQ的中点知$\begin{cases}a+b^2=2m^2,\\2b=4m,\end{cases}$故$\begin{cases}a=-2m^2,\\b=2m.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a\cdot b^2+0=-8m^4$. ……12 分

由 $-8m^4=-2$ 得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

……16 分

10.（本题满分 20 分）设正四面体 $ABCD$ 各棱长均为 2，P, Q 分别是棱 AB, AC 上的动点（允许位于棱的端点），$AP+AQ=2$，M 为棱 AD 的中点．在 ΔMPQ 中，MH 为 PQ 边上的高．求 MH 长度的最小值．



解法 1：设 $AP=1-t,\ AQ=1+t\ (-1\le t\le 1)$.

由 $\angle BAD=\angle CAD=\angle BAC=60^\circ$ 及 $AM=1$，可知

$$MP=\sqrt{1+(1-t)^2-(1-t)}=\sqrt{1-t+t^2},$$

$$MQ=\sqrt{1+(1+t)^2-(1+t)}=\sqrt{1+t+t^2},$$

$$PQ=\sqrt{(1-t)^2+(1+t)^2-(1-t)(1+t)}=\sqrt{1+3t^2}.$$

因此 $\cos\angle PMQ=\dfrac{MP^2+MQ^2-PQ^2}{2MP\cdot MQ}=\dfrac{1-t^2}{2MP\cdot MQ}$，进而

$$2S_{\Delta MPQ}=MP\cdot MQ\cdot\sin\angle PMQ=\sqrt{MP^2\cdot MQ^2-(MP\cdot MQ\cdot\cos\angle PMQ)^2}$$

$$=\sqrt{(1-t+t^2)(1+t+t^2)-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}(1+t^2)}{2}.$$

所以 $MH=\dfrac{2S_{\Delta MPQ}}{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}(1+t^2)}{2\sqrt{1+3t^2}}$. ……10 分

由基本不等式得

$$MH=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{1+3t^2}+\frac{2}{\sqrt{1+3t^2}}\right)\ge\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

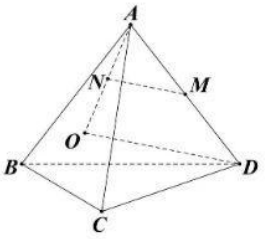
当 $\sqrt{1+3t^2}=\sqrt{2}$，即 $t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，MH 取到最小值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……20 分

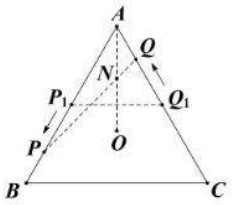
解法 2：取点 M 在平面 ABC 上的射影 N，则有 $MH\ge MN$. ……5 分

取点 D 在平面 ABC 上的射影 O．由正四面体的性质知 O 为正三角形 ABC 的中心，又由 M 为 AD 的中点知 N 为 AO 的中点．从而

$$MH\ge MN=\frac{1}{2}DO=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

……10 分





下面证明存在 P, Q 的适当位置，使得点 N, H 重合.

让动点 P 从 AB 的中点 P_1 出发沿 AB 边向点 B 运动，点 Q 从 AC 的中点 Q_1 出发沿 CA 边向 A 运动，始终保持 $AP+AQ=2$. 记 PQ 与 AO 的交点为 T，则最初 T 为线段 P_1Q_1 与 AO 的交点，在线段 NO 上，最终 T 重合于 A，故在运动过程中存在一个时刻，T 与 N 重合，对该时刻的 P, Q，由 $MN\perp$ 平面 ABC 知 $MN\perp PQ$ 于点 N，即 N, H 重合. 此时 MH 取到最小值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……20 分

11.（本题满分 20 分） 设 α 为实数，m, n 为正整数，且 $\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha\neq 0$.

证明：$\dfrac{1}{|\sin m\alpha|}+\dfrac{1}{|\sin n\alpha|}>\dfrac{1}{m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|}$.

证明： 不等式两边乘以 $m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|$，化简为

$$m|\sin n\alpha|+m|\sin m\alpha|+\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin m\alpha|}+\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}>1.$$

事实上，我们证明

$$\max\left\{m|\sin n\alpha|,\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}\right\}\geq 1. \qquad ①$$

记 $x=n\alpha$. 存在整数 k，使得 $k\pi\leq x<(k+1)\pi$，记

$$x_0=\min\{x-k\pi,(k+1)\pi-x\},$$

则 $0\leq x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$. 易知

$$|\sin n\alpha|=\sin x_0, \qquad ②$$

$$|\sin mn\alpha|=|\sin mx|=|\sin mx_0|. \qquad ③$$

由于 $\sin n\alpha\neq 0$，由②知 $x_0\neq 0$，故 $0<x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$.

若 $0<x_0<\dfrac{\pi}{m+1}$，则 $0<x_0\leq mx_0<\pi-x_0<\pi$，故由②、③知

$$|\sin n\alpha|=\sin x_0<\sin mx_0=|\sin mn\alpha|,$$

即 $\dfrac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}\geq 1$. ……10 分

若 $\dfrac{\pi}{m+1}\leq x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$，则对 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，利用 $\sin x$ 的上凸性易知 $\sin x\geq\dfrac{2}{\pi}x$，故

$$m|\sin n\alpha|=m\sin x_0\geq m\sin\frac{\pi}{m+1}\geq m\cdot\frac{\pi}{m+1}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2m}{m+1}\geq 1.$$

这就证明了①，从而原不等式得证. ……20 分

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准

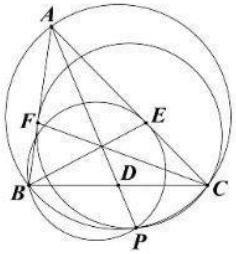
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

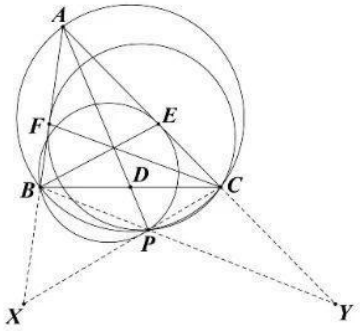
2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（本题满分 40 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 的中点，延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 P，过点 B, P 作一个圆与边 AC 相切于点 E，过点 C, P 作一个圆与边 AB 相切于点 F．证明：AD, BE, CF 三线共点．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证法 1：如图，延长 CP, AB 交于点 X，延长 BP, AC 交于点 Y．



由圆幂定理知 $XF^2 = XP \cdot XC = XA \cdot XB$，结合比例性质得

$$\frac{AF}{FB} = \frac{XA - XF}{XF - XB} = \frac{XA - \sqrt{XA \cdot XB}}{\sqrt{XA \cdot XB} - XB} = \sqrt{\frac{XA}{XB}}. \qquad ①$$

同理有

$$\frac{AE}{EC} = \sqrt{\frac{YA}{YC}}. \qquad ②$$

……20 分

对 $\triangle ABC$ 及点 P 用塞瓦定理，得

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

又D为边BC的中点，所以$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{CY}{YA}=1$，结合①、②得

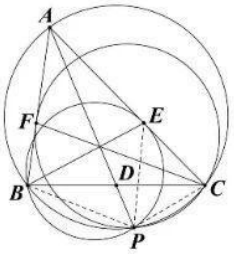
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\sqrt{\frac{XA}{XB}}\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{YC}{YA}}=\sqrt{\frac{AX}{XB}\cdot\frac{CY}{YA}}=1,$$

故由塞瓦定理的逆定理知AD,BE,CF三线共点．　　……40分

证法 2：连接PB,PE,PC．由于过B,P,E的圆与AC相切于点E，并且A,B,P,C四点共圆，故

$$\angle CBE=\angle AEB-\angle ACB=\angle EPB-\angle APB=\angle EPA,$$

结合$\angle CBA=\angle CPA$，又有$\angle EBA=\angle CPE$．　　……10分



记$\angle CBE=\angle EPA=\alpha$，$\angle EBA=\angle CPE=\beta$，则

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CBE}}=\frac{AB\cdot\sin\beta}{BC\cdot\sin\alpha},\qquad①$$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle CPE}}=\frac{AP\cdot\sin\alpha}{PC\cdot\sin\beta}.\qquad②$$

由①、②知$\dfrac{AE}{EC}=\sqrt{\dfrac{AB\cdot AP}{BC\cdot PC}}$．同理有$\dfrac{AF}{FB}=\sqrt{\dfrac{AC\cdot AP}{BC\cdot PB}}$．　　……20分

为证明AD,BE,CF共点，由塞瓦定理的逆定理，仅需证明

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

而$BD=DC$，故等价于证明$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AF}{FB}$，即$\sqrt{\dfrac{AB\cdot AP}{BC\cdot PC}}=\sqrt{\dfrac{AC\cdot AP}{BC\cdot PB}}$，亦即

$$AB\cdot PB=AC\cdot PC.$$

注意$\angle ABP$与$\angle ACP$互补，故

$$\frac{AB\cdot PB}{AC\cdot PC}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot PB\cdot\sin\angle ABP}{\frac{1}{2}AC\cdot PC\cdot\sin\angle ACP}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{DC}=1,$$

从而结论得证．　　……40分

二．（本题满分 40 分）设 m, n, k 都是正整数，$m \geq 2$，且 $n \geq k \geq 2$，实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$，满足以下两个条件：

(i) $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m \geq 1$；

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k$．

证明：$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 1$．

证法 1：反证法，假设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < 1$，此时有

$$1 > x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq \cdots \geq x_n \geq 0.$$

设 $x_k = u$，则 $u \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} < \dfrac{1}{k}$，又 $m \geq 2$，故

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^m \leq \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=k+1}^{n} x_k x_i = u \sum_{i=k+1}^{n} x_i,$$

结合(i)、(ii)可知

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^m \geq 1 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^m \geq 1 - u \sum_{i=k+1}^{n} x_i \geq 1 - u\left(k - \sum_{i=1}^{k} x_i\right). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 20\text{ 分}$$

利用 $x_i^m \leq x_i^2$ 及 $x_i - u \geq 0\ (1 \leq i \leq k)$，得

$$\begin{aligned} 1 - uk &\leq \sum_{i=1}^{k} x_i^m - u \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - u \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i (x_i - u) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} (x_i - u) = \sum_{i=1}^{k} x_i - uk, \end{aligned}$$

这与 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < 1$ 的假设矛盾．

因此原命题成立． $\cdots\cdots\cdots\cdots 40$ 分

证法 2：若 $x_1 \geq 1$，则结论显然成立．

以下设 $1 > x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$．由 $m \geq 2$ 知 $x_i^2 \geq x_i^m\ (1 \leq i \leq n)$，结合(i)可得

(i') $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 1$．

反证法，假设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = t < 1$．

记 $u = x_k$，则 $0 \leq u \leq \dfrac{t}{k}$．将 $x_2, \cdots, x_k$ 都减少到 u，x_1 增加到 $t - (k-1)u$，即设 $x_1' = t - (k-1)u$，$x_2' = \cdots = x_k' = u$，那么

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 = (t - (k-1)u)^2 + (k-1)u^2. \qquad ①$$

（这里用到函数 x^2 的下凸性：对 $a \leq b$，$\varepsilon > 0$，有 $a^2 + b^2 \leq (a - \varepsilon)^2 + (b + \varepsilon)^2$．）

$\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

又 $x_i \leq u\ (k+1 \leq i \leq n)$，故结合(ii)可知

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=k+1}^{n} u x_i \leq u(k - t). \qquad ②$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots 20$ 分

将①、②相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq (t - (k-1)u)^2 + (k-1)u^2 + u(k-t) = k(k-1)u^2 + (k + t - 2kt)u + t^2.$$

将右边记为 $f(u)$，由 $k(k-1) \geq 0$ 知 $f(u)$ 是 u 的下凸函数，从而

$$f(u) \leq \max\left\{f(0), f\left(\frac{t}{k}\right)\right\}.$$

由于 $f(0) = t^2 < 1$，$f\left(\dfrac{t}{k}\right) = \dfrac{k-1}{k} t^2 + \dfrac{k + t - 2kt}{k} t + t^2 = t < 1$，故 $f(u) < 1$，这与(i')矛盾．故假设不成立，原命题成立． $\cdots\cdots\cdots\cdots 40$ 分

三．（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 n：存在 n 的一个倍数 N，其在十进制表示下不含数码 0，但含有 $1,2,\cdots,9$ 中每一个数码，并且对任意 $i\in\{1,2,\cdots,9\}$，可以删去 N 的十进制表示中的一个数码 i，使所得的数仍是 n 的倍数．

解：所求 n 为满足：$3\nmid n$，且 $10\nmid n$ 的所有正整数 n．

必要性：若 $10\mid n$，则 n 的任何倍数的个位数为 0，但 N 不能有数码 0，从而结论不成立．若 $3\mid n$，则 $3\mid N$，可知 N 的数码和被 3 整除，但是 N 删去一个 1 后，数码和不被 3 整除，从而不可能是 n 的倍数． ……10 分

充分性：首先证明一个引理．

引理：设 d 是正整数，且 d 与 10 互素，则存在正整数 k，使得不含数码 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．

引理的证明：设不含数码 0 的所有 l 位数模 d 的全部余数为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，且 $s<d$，则 $l+1$ 位数中，首位为 1 可以得到 s 个不同余数 $10^l+r_i\ (1\le i\le s)$，首位为 2 也可以得到 s 个不同余数 $2\times10^l+r_i\ (1\le i\le s)$，这两组余数不能完全相同，否则

$$\sum_{i=1}^{s}(10^l+r_i)\equiv\sum_{i=1}^{s}(2\times10^l+r_i)\ (\mathrm{mod}\,d),$$

得 $d\mid 10^l s$．但 d 与 10 互素，且 $0<s<d$，这不成立．故不含数码 0 的 $l+1$ 位数中模 d 的不同余数个数严格增加了．从而对充分大的整数 k，不含数码 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．引理得证． ……30 分

回到原问题．由于 $10\nmid n$，可设 $n=p^\alpha d$，这里 $p\in\{2,5\}$，$\alpha\in\mathbf{N}$，d 与 10 互素．

对正整数 L,M，记 $\overline{L*M}$ 是将 L 和 M 在十进制下拼接而成的正整数（即将 M 的十进制表示写在 L 之后），类似也可以定义多个正整数的拼接．

由引理，存在 $k>\alpha$，使得不含 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．构造 N 为如下形式：

$$N=\overline{A_1*1*A_2*2*A_3*3*\cdots*A_9*9*B},$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 是 k 位正整数，B 是 $k+\alpha$ 位正整数，均不含数码 0．对 $1\le i\le 9$，将 N 删去上面表达式中的 i 后所得数记为 N_i，则

$$N-N_i=(9\times\overline{A_1*1*\cdots*A_{i-1}*(i-1)*A_i}+i)\times10^{l_i},$$

其中 $l_i=(9-i)(k+1)+k+\alpha$．

我们要求 $d\mid N-N_i\ (1\le i\le 9)$．

取 A_1 满足 $9A_1+1\equiv0\ (\mathrm{mod}\,d)$，这由 $3\nmid d$ 及引理知可行．从而 $d\mid N-N_1$．

假设已经取了 $A_1,\cdots,A_i\ (i<9)$，使得 $d\mid N-N_j\ (1\le j\le i)$，由引理知可取 A_{i+1} 满足

$$9\times(\overline{A_1*1*\cdots*A_i*i}\times10^k+A_{i+1})+(i+1)\equiv0\ (\mathrm{mod}\,d),$$

从而 $d\mid N-N_{i+1}$．这样取定了 $A_1,A_2,\cdots,A_9$．

设 B 的前 k 位为 B_1，后 α 位为 B_2（$\alpha=0$ 时没有 B_2），$B=\overline{B_1*B_2}$．

断言：对 $p\in\{2,5\}$，存在一个不含数码 0 的 α 位数 B_2 被 p^α 整除．

断言的证明放在最后．取出断言中的 B_2，则

$$N=10^\alpha\times\overline{A_1*1*A_2*2*A_3*3*\cdots*A_9*9*B_1*B_2}\equiv0\ (\mathrm{mod}\,p^\alpha),$$

又可以取 B_1 使得 $N \equiv 0 \pmod{d}$（由引理，$10^{\alpha} B_1$ 可取到模 d 的完系），此时 $n \mid N$．又 $d \mid N - N_i$，而 $l_i \geq \alpha$，故 $p^{\alpha} \mid N - N_i$，从而 $n \mid N - N_i$，这样 $n \mid N_i \ (1 \leq i \leq 9)$，所构造的 N 满足要求．

断言的证明：对 α 归纳．$\alpha = 1$ 时结论显然．假设 $\alpha = t$ 时，存在一个 t 位不含 0 的正整数 M，使得 $p^t \mid M$，则 $t+1$ 时，考虑

$$\overline{a*M} = 10^t a + M = p^t \left(\left(\frac{10}{p} \right)^t a + \frac{M}{p^t} \right),$$

由于 $\frac{10}{p}$ 与 p 互素，可取 $a \in \{1, 2, \cdots, p\}$，使得 $\left(\frac{10}{p} \right)^t a + \frac{M}{p^t} \equiv 0 \pmod{p}$，这样 $p^{t+1} \mid \overline{a*M}$．

……50 分

四．（本题满分 50 分）给定整数$t>10000$．甲乙两人玩如下的游戏，猜一个满足$\tau(N)\le t^2+t+100$的正整数N，这里$\tau(N)$是N的正约数个数．规则如下：

先由甲确定一个正整数k，并告知乙．然后乙想一个满足要求的N，并且：

(i) 告诉甲$\tau(N)$的值；

(ii) 给出N的k个不同的正约数（若$\tau(N)\le k$，则乙只需给出N的所有正约数；若$\tau(N)>k$，则乙可以选择性地给出N的k个正约数）．

求最小的k，使得甲一定能猜出N．

解：所求$k_{\min}=t^2+1$．为书写简单，下面的约数均指正约数．

首先若$k\le t^2$，则甲未必能确定N．例如乙告诉甲$\tau(N)=t(t+1)$，以及如下t^2个N的约数：$2^i3^j\ (i,j=0,1,\cdots,t-1)$，则$N=2^{t-1}3^t$或$N=2^t3^{t-1}$都可以．

……10 分

下面证明$k=t^2+1$时，甲一定可以确定N．记$m=t^2+1$，若$\tau(N)\le m$，则乙写出了N的所有约数，其中最大的数即为N．下面假设$\tau(N)>m$，乙写了N的m个约数$d_1,d_2,\cdots,d_m$．

对正整数L和素数p，记$v_p(L)$为L的标准分解中素因子p的幂次．对每个素数p，甲可以算出$\alpha_p=\max\limits_{1\le i\le m}v_p(d_i)$，则$p^{\alpha_p}\mid N$，故$v_p(N)\ge\alpha_p$．

断言：若$\alpha_p\le t-2$，则$v_p(N)=\alpha_p$．特别地，若$\alpha_p=0$，则$p\nmid N$．

断言的证明：假设$v_p(N)\ge\alpha_p+1$．由$\tau(N)$的计算公式易知$\dfrac{m}{\tau(N)}\le\dfrac{\alpha_p+1}{v_p(N)+1}$．

若$v_p(N)\ge\alpha_p+2$，则

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{v_p(N)+1}\tau(N)\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+3}\tau(N)\le\frac{t-1}{t+1}(t^2+t+100)<t^2+1,$$

这不成立．故$v_p(N)=\alpha_p+1$．

……20 分

若$\alpha_p\le t-100$，则

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+2}\tau(N)\le\frac{t-99}{t-98}(t^2+t+100)<t^2+1,$$

不成立．故$t-99\le\alpha_p\le t-2$．

……30 分

设$v_p(N)+1=\alpha_p+2=t-u$，其中$0\le u\le 97$．

由$v_p(N)+1\mid\tau(N)$，即$t-u\mid\tau(N)$，可知

$$\tau(N)=t^2+t-u^2-u.$$

这是因为$t^2+t-u^2-u\equiv 0\pmod{t-u}$，且$t^2<t^2+t-u^2-u<t^2+t+100$，而

$$t^2+t-u^2-u-(t-u)<t^2,\quad t^2+t-u^2-u+(t-u)>t^2+t+100,$$

故在$(t^2,t^2+t+100]$中被$t-u$整除的数只有t^2+t-u^2-u．于是

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+2}\tau(N)=\frac{t-u-1}{t-u}(t^2+t-u^2-u)=(t-u-1)(t+u+1)<t^2+1,$$

也不成立．断言获证．

……40 分

由断言知，可以识别出N的所有素因子，且对于满足$\alpha_p\le t-2$的素数p，

有 $v_p(N)=\alpha_p$．若 $\alpha_p \geq t-1$，称这样的素数 p 为“特殊的”.

特殊的素数至多两个，否则 $\tau(N) \geq t^3 > t^2+t+100$，矛盾.

若没有特殊的素数，则 N 已经确定．若恰有一个特殊的素数 p，则除 p 外的其余素因子的幂次均已确定，由 $\tau(N)$ 的值也唯一确定 p 的幂次，N 也确定.

下面只需讨论恰有两个特殊素数 p,q 的情况，此时

$$v_p(N) \geq \alpha_p \geq t-1，\ v_q(N) \geq \alpha_q \geq t-1.$$

N 没有其他素因子，否则 $\tau(N) \geq 2t^2 > t^2+t+100$，矛盾．由于所有 $m=t^2+1$ 个约数均为 $p^a q^b$ 的形式，故必有 $\max\{\alpha_p,\alpha_q\} \geq t$．不妨设 $\alpha_p \geq t$.

若 $v_p(N) \geq t+1$ 或 $v_q(N) \geq t$，则由 $\tau(N)=(v_p(N)+1)(v_q(N)+1)$ 知

$$\tau(N) \geq \min\{(t+2)t,(t+1)(t+1)\} = t^2+2t > t^2+t+100，$$

不成立．故只能 $v_p(N)=t$，$v_q(N)=t-1$，$N=p^t q^{t-1}$.

综上，当 $k=t^2+1$ 时，甲总能确定 N．　　……50 分