2024 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 复数 $z=1+\sqrt{3}i$（i 为虚数单位），则 $z+2\overline{z}+3|z|$ 的模为_____.

2. 设 a,b 为实数. 若一元二次不等式 $x^2+b<ax$ 的解集为 $(1,5)$，则一元二次不等式 $x^2-a>bx$ 的解集为_____.

3. 函数 $y=\dfrac{4^x+1}{2^x+1}$ 的最小值为_____.

4. 一只青蛙在正方形 $ABCD$ 的四个顶点间跳跃，每次跳跃总是等可能地跳至与当前所在顶点相邻的两个顶点之一，且各次跳跃是独立的. 若青蛙第一次跳跃前位于顶点 A，则它第 6 次跳跃后恰好仍位于顶点 A 的概率为_____.

5. 在椭圆 Ω 中，F_1,F_2 为焦点，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点. 若 $\angle F_1BF_2=\angle F_1AB$，则 Ω 的离心率为_____.

6. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且对任意正整数 n，均有 $a_{n+1}=10^n a_n^2$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

7. 四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，且 AB,BC,CD,DA 的长分别为 $1,2,3,4$，则四面体 $ABCD$ 的体积为_____.

8. 若三个正整数 a,b,c 的位数之和为 8，且组成 a,b,c 的 8 个数码能排列为 $2,0,2,4,0,9,0,8$，则称 (a,b,c) 为“幸运数组”，例如 $(9,8,202400)$ 是一个幸运数组. 满足 $10<a<b<100$ 的幸运数组 (a,b,c) 的个数为_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足 $0 < |q| < 1$. 若 $\{a_n\}$ 的各项和等于 $\{a_n\}$ 各项的平方和，求 a_2 的取值范围.

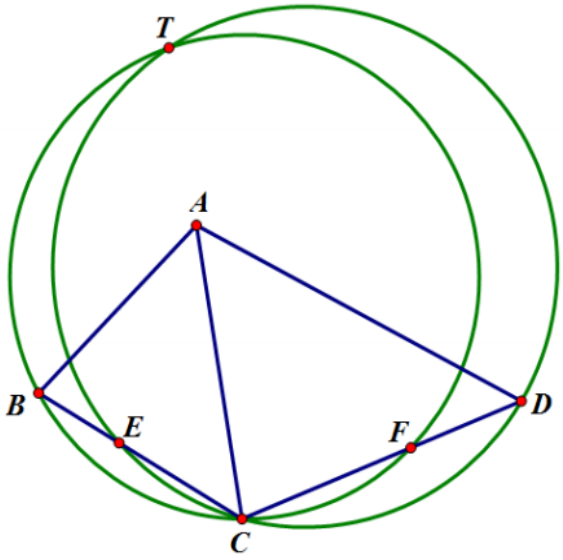
10.（本题满分 20 分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos C = \dfrac{\sin A + \cos A}{2} = \dfrac{\sin B + \cos B}{2}$. 求 $\sin C$ 的值.

11.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，将圆心在 y 轴上，且与双曲线 $\Gamma : x^2 - y^2 = 1$ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”. 是否存在常数 λ 及 x 轴上的一个定点 A，满足：若两个好圆外切于点 P，则它们的圆心距 $d = \lambda |PA|$？证明你的结论.

2024 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）

一、（本题满分 40 分）给定正整数 a. 求函数 $f(x)=\min\{\|x\|,\|ax\|\}$ 的最大值.（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离；$\min\{s,t\}$ 表示实数 s,t 中较小的数.）

二、（本题满分 40 分）如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，且 $AC^2=AB\cdot AD$，点 E,F 分别在边 BC,CD 上，满足 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{DF}{FC}$. 过点 C,B,F 的圆 ω_1 与过点 C,D,E 的圆 ω_2 交于 C 及另一点 T. 求证：点 T 在直线 AC 上.



三、（本题满分 50 分）给定素数 p，$p\equiv 2\pmod 3$. 求同时满足下面两个条件的三元有序数组 (a,b,c) 的数目：

(1) $a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$；

(2) 三个数 $a(b+1),b(c+1),c(a+1)$ 除以 p 所得的余数相同.

四、（本题满分 50 分）给定正整数 n. 在一个 $2\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A,B，存在整数 $l\geq 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1,C_2,\cdots,C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1,2,\cdots,l-1$）.

求具有下述性质的最大整数 K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于 K.

2024 年全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）参考答案

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $z+2\bar{z}+3|z|$ 的模为_____.

【答案】$2\sqrt{21}$

【解析】$z+2\bar{z}+3|z|=1+\sqrt{3}\mathrm{i}+2-2\sqrt{3}\mathrm{i}+3\times2=9-\sqrt{3}\mathrm{i}$，其模 $\sqrt{9^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{21}$.

2. 设 a,b 为实数，如果一元二次不等式 $x^2+b<ax$ 的解集为 $(1,5)$，那么一元二次不等式 $x^2-a>bx$ 的解集为_____.

【答案】$(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$

【解析】由题知 1, 5 为一元二次方程 $x^2-ax+b=0$ 的根，故 $a=1+5=6$，$b=1\times5=5$.

所以一元二次不等式 $x^2-a>bx$ 等价于 $x^2-5x-6>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>6$.

3. 函数 $y=\dfrac{4^x+1}{2^x+1}$ 的最小值为_____.

【答案】$2\sqrt{2}-2$

【解析】$y=\dfrac{4^x+1}{2^x+1}=\dfrac{(4^x-1)+2}{2^x+1}=(2^x+1)+\dfrac{2}{2^x+1}-2\geqslant2\sqrt{(2^x+1)\cdot\dfrac{2}{2^x+1}}-2=2\sqrt{2}-2$，

当且仅当 $2^x+1=\dfrac{2}{2^x+1}$，即 $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$ 时取等号.

4. 一只青蛙在正方形 $ABCD$ 的四个顶点间跳跃，每次跳跃总是等可能地跳至与当前所在顶点相邻的两个顶点之一，且各次跳跃是独立的. 若青蛙第一次跳跃前位于顶点 A，则它第 6 次跳跃后恰好仍位于顶点 A 的概率为_____.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】设该青蛙纵向、横向跳跃的次数分别为 X，Y，由题意可知 X，Y 均为偶数，且

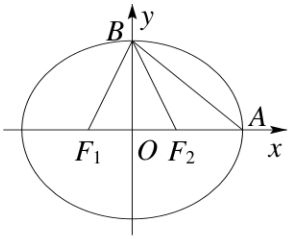
$$P(X=6,Y=0)=P(X=0,Y=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64};$$

$$P(X=4,Y=2)=P(X=2,Y=4)=\mathrm{C}_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}.$$

因此所求概率为 $P=2\times\dfrac{1}{64}+2\times\dfrac{15}{64}=\dfrac{1}{2}$.

5. 在椭圆 Ω 中，F_1，F_2 为焦点，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点，若 $\angle F_1BF_2=\angle F_1AB$，则 Ω 的离心率为_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$



【解析】因为 $\angle F_1BF_2=\angle F_1AB$，$\angle BF_1F_2=\angle BF_1A$，

所以 $\triangle F_1BF_2\backsim\triangle F_1AB$，故 $\angle F_1BA=\angle BF_1A$，

从而 $|F_1A|=|BA|$，即 $a+c=\sqrt{a^2+b^2}$.

由 $a^2=b^2+c^2$，上式可化为 $2c^2+2ac-a^2=0$，即 $2e^2+2e-1=0$.

注意到 $e>0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

6. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=10^n a_n^2$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】10^{2^n-n-1}

【解析】由题设知，对任意正整数 n，有 $a_n>0$，于是 $\lg a_{n+1}=\lg 10^n a_n^2=n+2\lg a_n$.

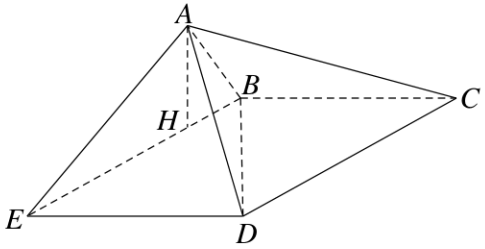
从而 $\lg a_{n+1}+(n+1)+1=\lg 10^n a_n^2=2(\lg a_n+n+1)$.

所以 $\{\lg a_n+n+1\}$ 是公比为 2，首项为 $\lg a_1+1+1=2$ 的等比数列.

因此 $\lg a_n+n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，由此可得 $a_n=10^{2^n-n-1}$.

7. 四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，且 AB,BC,CD,DA 的长分别为 $1,2,3,4$，则四面体 $ABCD$ 的体积为_____.

【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



【解析】如图，过 B 作 $BE/\!/CD$，且 $BE=CD$.

则 $\angle ABE=\theta$（或其补角）是 AB 与 CD 所成角.

易知 $BC\perp$ 平面 ABE，从而平面 $BCD\perp$ 平面 ABE.

作 $AH\perp BE$，垂直为 H，则 $AH\perp$ 平面 BCD.

因为 $16=\overrightarrow{AD}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=1^2+2^2+3^2+2\times 1\times 3\cos\theta$.

所以 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，故 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，从而 $AH=AB\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

又 $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$，所以 $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot AH=\dfrac{1}{3}\times 3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. 若三个正整数 a, b, c 的位数之和为 8，且组成 a, b, c 的 8 个数码能排列为 2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8，则称(a, b, c)为幸运数组，例如$(9, 8, 202400)$是一个幸运数组. 满足 $10<a<b<100$ 的幸运数组(a, b, c)的个数为_____.

【答案】291

【解析】暂不考虑 a, b 的大小关系，先在 a, b, c 的非最高位（五个位置）中选三个位置填 0，剩下五个位置还未填，任选其中两个填 2，余下三个位置填 4, 8, 9，这样的填法数为

$$C_5^3 \times C_5^2 \times 3! = 600.$$

再考虑其中 a, b 的大小关系，若 $a=b$，则必有 $a=b=20$，此时 c 是四个数码 0, 4, 8, 9 的排列，且 0 不在首位，有 $3\times 3!=18$ 种填法；除这些填法外，$a<b$ 与 $a>b$ 的填法种数各占一半，故有$\frac{600-18}{2}=291$ 个满足要求的幸运数组.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本小题满分 16 分）

已知无穷等比数列$\{a_n\}$的公比 q 满足 $0<|q|<1$，若$\{a_n\}$的各项和等于$\{a_n\}$各项的平方和，求 a_2 的取值范围.

解：易知，$\{a_n\}$各项的平方构成首项为a_1^2，公比为 q^2 的等比数列.

由题设得$\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1^2}{1-q^2}$，即 $a_1=1+q$，从而 $a_2=q(1+q)=(q+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$.

当$-1<q<0$ 时，$a_2\in[-\frac{1}{4}, 0)$；当 $0<q<1$ 时，$a_2\in(0, 2)$.

所以 a_2 的取值范围是$[-\frac{1}{4}, 0)\cup(0, 2)$.

10.（本小题满分 20 分）

在$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2}$，求 $\sin C$ 的值.

解：由条件知 $\sqrt{2}\cos C=\sin(A+\frac{\pi}{4})=\sin(B+\frac{\pi}{4})$.

若$(A+\frac{\pi}{4})+(B+\frac{\pi}{4})=\pi$，则 $A+B=\frac{\pi}{2}$，故 $C=\frac{\pi}{2}$，$\cos C=0$，但 $\sin(A+\frac{\pi}{4})>0$，矛盾.

所以只能有 $A+\frac{\pi}{4}=B+\frac{\pi}{4}$，即 $A=B$，从而 $C=\pi-2A$.

于是 $\sin C=\sin 2A=-\cos(2A+\frac{\pi}{2})=2\sin^2(A+\frac{\pi}{4})-1=4\cos^2 C-1=3-4\sin^2 C$.

整理得 $4\sin^2 C+\sin C-3=0$.

注意到 $\sin C>0$，解得 $\sin C=\frac{3}{4}$.

11.（本小题满分 20 分）

在平面直角坐标系中，将圆心在 y 轴上，且与双曲线 Γ：$x^2-y^2=1$ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”. 是否存在常数 λ 及 x 轴上的一个定点 A，满足：若两个好圆外切于点 P，则它们的圆心距 $d=\lambda|PA|$？

解：设好圆 Ω：$x^2+(y-a)^2=r^2$，与 $x^2-y^2=1$ 联立，消去 x，得

$$2y^2-2ay+a^2-r^2+1=0.$$

依题意，其判别式 $\triangle=4a^2-8(a^2-r^2+1)=0$，即 $r^2=\dfrac{a^2+2}{2}$.

于是，两个好圆的方程可分别设为（其中 $m\neq n$）

$$\Omega_1：x^2+(y-m)^2=\frac{m^2+2}{2}, \qquad ①$$

$$\Omega_2：x^2+(y-n)^2=\frac{n^2+2}{2}. \qquad ②$$

由 ①−②，得 Ω_1 与 Ω_2 的公切线方程 $y=\dfrac{m+n}{4}$.

故 Ω_1 与 Ω_2 的切点为 $P\left(0,\ \dfrac{m+n}{4}\right)$. 代入①，整理得 $m^2+n^2=16+6mn$.

由此 $d^2=|m-n|^2=m^2+n^2-2mn=16+4mn$.

设 $A(t,0)$，则 $|PA|^2=\left(\dfrac{m+n}{4}\right)^2+t^2=\dfrac{m^2+n^2+2mn}{16}+t^2=\dfrac{mn}{2}+1+t^2$.

由 $d=\lambda|PA|$，得 $d^2=\lambda^2|PA|^2$，即 $16+4mn=\lambda^2\left(\dfrac{mn}{2}+1+t^2\right)$.

依题意，有 $\lambda^2=8$ 且 $16=\lambda^2(1+t^2)$（$\lambda>0$），解得 $\lambda=2\sqrt{2}$，$t=\pm1$.

所以，存在满足题述条件的常数 $\lambda=2\sqrt{2}$ 和定点 $A(\pm1,0)$.

2024 年全国高中数学联合竞赛
加试（B 卷）参考答案

一、（本题满分 40 分）

给定正整数 a，求函数 $f(x)=\min\{\|x\|,\ \|ax\|\}$ 的最大值.（$\|x\|$表示实数 x 到与它最近整数的距离；$\min\{s,t\}$表示实数 s,t 中较小的数.）

解：（1）当 a 为奇数时，$\left\|\frac{a}{2}\right\|=\frac{1}{2}$，且对任意实数 x，有$\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$.

于是 $f(x)=\min\{\|x\|,\ \|ax\|\}\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\min\left\{\left\|\frac{1}{2}\right\|,\ \left\|\frac{a}{2}\right\|\right\}=\frac{1}{2}$.

所以，当 a 为奇数时，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$.

（2）当 a 为偶数时，$\frac{a}{2}$ 为正整数. 注意到

$$f\left(\frac{a}{2(a+1)}\right)=\min\left\{\left\|\frac{a}{2(a+1)}\right\|,\ \left\|\frac{a^2}{2(a+1)}\right\|\right\}$$

$$=\min\left\{\left\|\frac{a}{2(a+1)}\right\|,\ \left\|\frac{a}{2}-\frac{a}{2(a+1)}\right\|\right\}=\frac{a}{2(a+1)}.$$

下面我们证明 $f(x)\leqslant\frac{a}{2(a+1)}$. 用反证法.

假设存在 x_0，使得 $f(x_0)>\frac{a}{2(a+1)}$，不妨设 $x_0\in[0,\ 1)$，则$\|x_0\|\geqslant f(x_0)>\frac{a}{2(a+1)}$.

于是 $x_0\in\left(\frac{a}{2(a+1)},\ \frac{a+2}{2(a+1)}\right)$，从而 $ax_0\in\left(\frac{a^2}{2(a+1)},\ \frac{a^2+2a}{2(a+1)}\right)$.

因 $\frac{a^2}{2(a+1)}=\frac{a}{2}-\frac{a}{2(a+1)}$，$\frac{a^2+2a}{2(a+1)}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2(a+1)}$，且 $\frac{a}{2}\in\mathbf{N}^*$，故$\|ax_0\|<\frac{a}{2(a+1)}$.

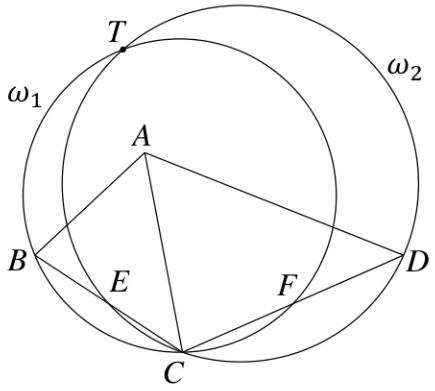
这与$\|x_0\|\geqslant f(x_0)>\frac{a}{2(a+1)}$矛盾. 所以当 a 为偶数时，$f(x)_{\max}=\frac{a}{2(a+1)}$.

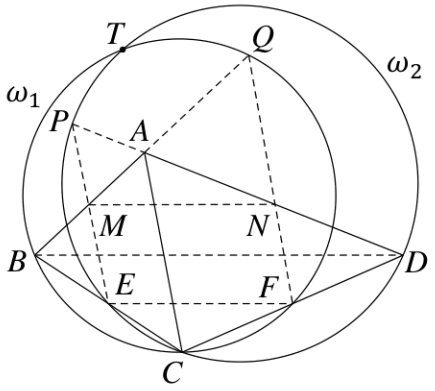
综上，当 a 为奇数时，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$；当 a 为偶数时，$f(x)_{\max}=\frac{a}{2(a+1)}$..

二、（本题满分 40 分）

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，且 $AC^2=AB\cdot AD$，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，满足 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{DF}{FC}$. 设过点 C, B, F 的圆 ω_1 及过点 C, D, E 的圆 ω_2 交于点 C 及另一点 T.

证明：点 T 在直线 AC 上.





证明：设 BA 与圆 ω_1 交于点 B、Q，DA 与圆 ω_2 交于点 D、P，PE 交 AB 于点 M，QF 交 AD 于点 N.

由 AC 平分 $\angle BAD$，且 $AC^2=AB\cdot AD$，知 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

故 $\angle PEB=\angle CDP=\angle ACB$，从而 $PE/\!/AC$.

同理可证 $QF/\!/AC$. 所以 $QF/\!/PE/\!/AC$.

因而 $\angle P=\angle CAD=\angle BAC=\angle AMP$，从而 $AP=AM$.

同理可得 $AQ=AN$.

所以 $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{CE}{BE}.=\dfrac{CF}{DF}=\dfrac{AN}{ND}$，因此 $MN/\!/BD$.

所以 $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AD}$，即 $AM\cdot AD=AN\cdot AB$，从而 $AP\cdot AD=AQ\cdot AB$.

由原蜜定理可知，点 A 对圆 ω_1 和圆 ω_2 的幂相等，即点 A 在圆 ω_1 与圆 ω_2 的根轴上.

又 CT 为圆 ω_1 与圆 ω_2 的根轴，故 T 在直线 AC 上.

三、（本题满分 50 分）

给定素数 p，$p\equiv 2 \pmod 3$. 求同时满足下面两个条件的三元有序数组 (a, b, c) 的数目：

（1）$a, b, c\in\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$；

（2）三个数 $a(b+1)$，$b(c+1)$，$c(a+1)$ 除以 p 所得的余数相同.

解：当 a, b, c 之中有一个为 0 时，不妨设 $a=0$，此时

$$0\equiv b(c+1)\equiv c \pmod p \Rightarrow b\equiv c\equiv 0 \pmod p.$$

故 $a=b=c=0$，因此 $(a, b, c)=(0, 0, 0)$ 为满足条件的一组解.

现考虑 a, b, c 均不为 0 的情况. 条件（2）即 $a(b+1)\equiv b(c+1)\equiv c(a+1) \pmod p$.

由 $a(b+1)\equiv b(c+1) \pmod p$，得 $p\mid a(b+1)-b(c+1)$，即

$$p\mid b(a-c)+(a-b); \qquad ①$$

同理

$$p\mid c(b-a)+(b-c); \qquad ②$$

$$p\mid a(c-b)+(c-a). \qquad ③$$

由①得 $b-a\equiv b(a-c) \pmod p$，代入②，有

$$c-b\equiv c(b-a)\equiv bc(a-c) \pmod p.$$

将上式代入③得

$$a-c\equiv a(c-b)\equiv abc(a-c) \pmod p \Rightarrow p\mid (abc-1)(a-c).$$

情况一：若 $p\mid a-c$，由 $a, c\in\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ 知 $a=c$，则

$$b-a\equiv b(a-c)\equiv 0 \pmod p \Rightarrow a=b.$$

于是 $a=b=c$，此时 $(a, b, c)=(t, t, t)$ $(t=0, 1, 2, \cdots, p-1)$ 为满足条件的解.

情况二：若 $p\mid abc-1$，则 (a, b, c) 可表示为

$$(x^{-1},\ y,\ xy^{-1})，\text{其中 } x，\ y\in\{0，\ 1，\ 2，\ \cdots，\ p-1\}.$$

代入 $a(b+1)\equiv b(c+1)\equiv c(a+1) \pmod p$，得

$$x^{-1}y+x^{-1}\equiv y+x\equiv xy^{-1}+y^{-1} \pmod p \Rightarrow y^2+y\equiv x^2+x\equiv xy(x+y) \pmod p.$$

于是

$$p\mid (x^2+x)-(y^2+y)=(x-y)(x+y+1).$$

（ⅰ）若 $p\mid x-y$，则

$$x^2+x\equiv\ xy(x+y)\equiv x^2\cdot 2x \pmod p \Rightarrow p\mid x(x-1)(2x+1) \pmod p.$$

因 $p\nmid x$，故 $p\mid x-1$ 或 $p\mid 2x+1$.

当 $p\mid x-1$ 时，$x=1\Rightarrow x=y=1$，此时 $(a, b, c)=(1, 1, 1)$ 为满足条件的解.

当 $p\mid 2x+1$ 时，$x=\dfrac{p-1}{2}\Rightarrow x=y=\dfrac{p-1}{2}$，此时 $c=xy^{-1}=1$，由 $b(c+1)\equiv c(a+1) \pmod p$，

得 $a+1\equiv\dfrac{p-1}{2}\cdot 2=p-1 \pmod p$，故 $a=p-2$，

所以$(a,b,c)=(p-2,\frac{p-1}{2},1)$为满足条件的解.

（ii）若$p|x+y+1$，则

$$a^{-1}+b\equiv -1\pmod p\Rightarrow 1+ab\equiv -a\pmod p.$$

此时，对于每一个$a\in\{1，2，\cdots，p-2\}$（因为$a=p-1$时有$c^{-1}=0$），都有唯一的解b，由$abc\equiv 1\pmod p$可解出唯一的c. 此时有$p-2$组解.

综上，满足题意的解共有$p-2+p=2p-2$组.

【注】其中x^{-1}表示x的数论倒数，即$x\cdot x^{-1}\equiv 1\pmod p$.

四、（本题满分 50 分）

给定正整数n. 在一个$2\times n$的方格表上，由一些方格构成的集合S称为“连通的”，如果对S中任意两个不同的小方格A，B，存在整数$l\geqslant 2$及S中l个方格$A=C_1,C_2,\cdots,C_l=B$，满足C_i与C_{i+1}有公共边（$i=1,2,\cdots,l-1$）.

求具有下述性质的最大整数K：若该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合S，使得S中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于K.

解：以下有时将有公共边的格子称为“相邻的”.

首先证明：对任意摆放的黑格、白格，都有$K_{\max}\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.

设有a个黑格，b个白格，不失一般性，设$a\geqslant b$.

取黑格较多的一行（$1\times n$），设有a_1个黑格，b_1个白格，则$a\geqslant n$，$a_1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$；另一行有$a_2$个黑格，$b_2$个白格.

由对称性，记黑格较多（相等则任取即可）的一行为第 1 行，另一行为第 2 行.

记S为这样的集合：第 1 行所有的格子以及第 2 行的所有黑格所组成的集合.

下面说明S是连通的.

（1）任选两个格子A，B如果都在第 1 行，则取这两个格子以及中间的所有格子，从左至右依次记为$A=C_1,C_2,\cdots,C_l=B$，C_i与C_{i+1}均有竖直相邻边（$i=1,2,\cdots,l-1$）.

（2）任选两个格子，如果存在格子在第 2 行，由于第 1 行所有格子均是S中的元素，则选择第 2 行格子相邻的地 1 行格子，这样就转化为（1）的情况.

由（1）（2）可以说明S是连通的.

由于$a\geqslant n$，$a_1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，因而$a_1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，$b_1\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，从而

$$a_1+a_2-b_1=n-b_1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]，\text{即 } K_{\max}\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]\text{成立.}$$

下面给出 $K_{\max}\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ 的构造.

不妨假设黑格子不少于白格子.



如图，对所有小方格进行黑白相间染色，按图中自左至右依次截取 2×2 图形，我们考察黑格子与白格子数量之差.

若差值为 2，则黑格子为 2，白格子为 0，此时选择该黑格子 A，B，不妨假设 A 在 2×2 图形右上格子，则 A 左边、下边相邻的格子不是 S 的元素，故不存在 $A=C_1, C_2, \cdots, C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1, 2, \cdots, l-1$），即 $A\notin S$，$B\notin S$ 至少之一成立.

这与差值为 2 的构造矛盾. 所以每一个 2×2 图形的黑格子与白格子之差至多为 1.

共有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个 2×2 图形，至多剩余一个 2×1 图形，且黑格子与白格子各一个，则其黑格子与白格子之差至多为 1，故 $K_{\max}\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.

综上，满足题述条件的最大整数 $K_{\max}=\left[\frac{n}{2}\right]$.