2024年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）

暨2024年全国高中数学联合竞赛

一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分。

1.设实数$m>1$满足$\log_9(\log_8 m)=2024$，则$\log_3(\log_2 m)$的值为_____.

2.设无穷等比数列$\{a_n\}$的公比q满足$0<|q|<1$，若$\{a_n\}$的各项和等于$\{a_n\}$各项的平方和，则a_2的取值范围是_____.

3.设实数a,b满足：集合$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2-10x+a\le 0\}$与$B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,bx\le b^3\}$的交集为$[4,9]$，则$a+b$的值为依次记为_____.

4.在三棱锥$P-ABC$中，若$PA\perp$底面ABC，且棱AB,BP,BC,CP的长分别为$1,2,3,4$，则该三棱锥的体积为_____.

5.一个不均匀的骰子，掷出$1,2,3,4,5,6$点的概率依次成等差数列。独立地先后掷该骰子两次，所得的点数分别记为a,b.若事件“$a+b=7$”发生的概率为$\frac{1}{7}$，则事件“$a=b$”发生的概率为_____.

6.设$f(x)$是定义为$\mathbf{R}$、最小正周期为5的函数。若函数$g(x)=f(2^x)$在区间$[0,5)$上的零点个数为25，则$g(x)$在区间$[1,4)$上的零点个数为_____.

7.设F_1,F_2为椭圆Ω的焦点，在Ω上取一点P（异于长轴端点），记O为$\triangle PF_1F_2$的外心，若$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，则$\Omega$的离心率的最小值为_____.

8.若三个正整数a,b,c的位数之和为8，且组成a,b,c的8个数码能排列为$2,0,2,4,0,9,0,8$，则称(a,b,c)为“幸运数组”，例如$(9,8,202400)$是一个幸运数组。满足$10<a<b<c$的幸运数组(a,b,c)的个数为_____.

二、解答题:本大题共 3 小题,满分 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9.(本题满分 16 分)在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2}$，求 $\cos C$ 的值。

10.(本题满分 20 分)在平面直角坐标系中，双曲线 Γ：$x^2-y^2=1$ 的右顶点为 A.将圆心在 y 轴上，且与 Γ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”。若两个好圆外切于点 P，圆心距为 d，求 $\frac{d}{|PA|}$ 的所有可能的值。

11.(本题满分 20 分)设复数 z,w 满足 $z+w=2$，求 $S=\left|z^2-2w\right|+\left|w^2-2z\right|$ 的最小可能值。

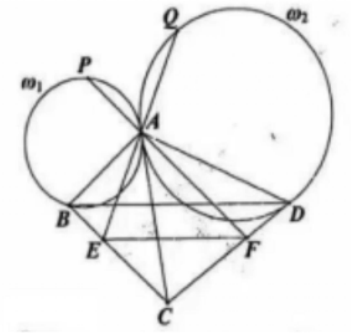
2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）

暨 2024 年全国高中数学联合竞赛

加试试题（A 卷）

一.(本题满分 40 分)给定正整数 r .求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，满足 $\|a_n\|\geq C$ 对所有正整数 n 成立。（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离。）

二.(本题满分 40 分)如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，点 E,F 分别在边 BC,CD 上，满足 $EF//BD$.分别延长 FA,EA 至点 P,Q，使得过点 A,B,P 的圆 ω_1 及过点 A,D,Q 的圆 ω_2 均与直线 AC 相切。证明：B,P,Q,D 四点共圆。



三.(本题满分 50 分)给定正整数 n .在一个 $3\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A,B，存在整数 $l\geq 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1,C_2,\cdots,C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1,2,\cdots,l-1$）.求具有下述性质的最大整数 K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小 K.

四.(本题满分 50 分)设 A,B 为正整数，S 是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

（1）对任意非负整数 k，有 $A^k\in S$；

（2）若正整数 $n\in S$，则 n 的每个正约数均属于 S；

（3）若 $m,n\in S$，且 m,n 互素，则 $mn\in S$；

（4）若 $n\in S$，则 $An+B\in S$.

证明：与 B 互素的所有正整数均属于 S.

2024 年全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）参考答案

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若实数 $m>1$ 满足 $\log_9(\log_8 m)=2024$，则 $\log_3(\log_2 m)$ 的值为_____.

【答案】4049

【解析 1】$\log_3(\log_2 m)=\log_3(3\log_8 m)=1+2\log_9(\log_8 m)=1+2\times2024=4049$.

【解析 2】题设，得

$$\log_8 m=9^{2024}=3^{4048}\Rightarrow\log_2 m=3\log_8 m=3^{4049}\Rightarrow\log_3(\log_2 m)=4049.$$

2. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$的公比 q 满足 $0<|q|<1$，如果 $\{a_n\}$ 的各项和等于 $\{a_n\}$ 各项的平方和，则 a_2 的取值范围是_____.

【答案】$\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup(0,2)$

【解析】由题设得 $\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1^2}{1-q^2}$，即 $a_1=1+q$. 于是 $a_2=q(1+q)=(q+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$.

当 $-1<q<0$ 时，$a_2\in[-\frac{1}{4},0)$；当 $0<q<1$ 时，$a_2\in(0,2)$.

3. 设实数 a，b 满足：集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-10x+a\leqslant0\}$ 与集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid bx\leqslant b^3\}$ 的交集为[4，9]，则 $a+b$ 的值为_____.

【答案】7

【解析】由不等式 $x^2-10x+a\leqslant0\Leftrightarrow(x-5)^2\leqslant25-a$ 解集对称性可知，A 是包含[4，9]且以 $x=5$ 为中点的区间，而 B 是至多有一个有限端点的区间，故必有 $A=[1,9]$，从而 $a=9$.

又因为 $A\cap B=[4,9]$，故只能有 $B=[4,+\infty]$，从而 $b<0$ 且 $4b=b^3$，即 $b=-2$.

所以 $a+b=7$.

4. 三棱锥 P-ABC 中，若 $PA\perp$底面 ABC，棱 AB，BP，BC，CP 的长分别为 1，2，3，4，则该三棱锥的体积为_____.

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】由 $PA\perp$底面 ABC 知 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$.

因此 $PA=\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{CP^2-PA^2}=\sqrt{4^2-3}=\sqrt{13}$.

在$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{1+9-13}{2\times1\times3}=-\frac{1}{2}$，从而 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

该三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}=\frac{3}{4}$.

5. 一个不均匀的骰子，掷出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的概率依次成等差数列. 独立地先后抛掷该骰子两次，所得的点数分别为 a，b，若事件“$a+b=7$”发生的概率为 $\frac{1}{7}$，则事件“$a=b$”发生的概率为_____.

【答案】$\frac{4}{21}$

【解析】设掷出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的概率依次为 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$，则 $\sum_{i=1}^{6} p_i=1$.

由 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ 成等差数列，得 $p_1+p_6=p_2+p_5=p_3+p_4=\frac{1}{3}$.

故 $P(a+b=7)=p_1p_6+p_2p_5+p_3p_4+p_4p_3+p_5p_2+p_6p_1=2(p_1p_6+p_2p_5+p_3p_4)$.

又 $P(a=b)=p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2$.

故 $P(a=b)+P(a+b=7)=(p_1+p_6)^2+(p_2+p_5)^2+(p_3+p_4)^2=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$.

所以 $P(a=b)=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}$.

6. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$、最小正周期为 5 的函数. 若函数 $g(x)=f(2^x)$ 在区间 $[0, 5)$ 上的零点个数为 25，则 $g(x)$ 在区间 $[1, 4)$ 上的零点个数为_____.

【答案】11

【解析】记 $t=2^x$，则当 $x\in[0, 5)$ 时，$t\in[1, 32)$，且 t 随 x 的增大而增大.

因此，$g(x)$ 在 $[0, 5)$ 上的零点个数等于 $f(t)$ 在 $[1, 32)$ 上的零点个数.

注意到 $f(t)$ 的最小正周期为 5，设 $f(t)$ 在一个最小正周期上有 m 个零点，则 $f(t)$ 在 $[2, 32)$（长度恰为 6 个周期）上有 $6m$ 个零点.

设 $f(t)$ 在 $[1, 2)$ 上有 n 个零点，则 $6m+n=25$，且 $0\leqslant n\leqslant m$，于是 $m=4$，$n=1$.

所以 $g(x)$ 在 $[1, 4)$ 上的零点个数 $=f(t)$ 在 $[2, 16)$ 上的零点个数 $=3m-n=11$.

7. 设 F_1, F_2 为椭圆 Ω 的焦点，在 Ω 上取一点 P（异于长轴端点），记 O 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心，若 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，则 Ω 的离心率的最小值为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】设 M 为 F_1F_2 的中点，则 $MO\perp F_1F_2$. 记 $|\overrightarrow{PF_1}|=x$，$|\overrightarrow{PF_2}|=y$，$|\overrightarrow{F_1F_2}|=d$，则

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MO})\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{PF_1})\cdot(\overrightarrow{PF_2}-\overrightarrow{PF_1})=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$.

$2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2xy\cos\angle F_1PF_2=y^2+x^2-d^2$.

依题设得 $\frac{1}{2}(y^2-x^2)=x^2+y^2-d^2$，即 $2d^2=3x^2+y^2$.

由柯西不等式，得 $(\frac{1}{3}+1)(3x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2$，即 $3x^2+y^2\geqslant\frac{3}{4}(x+y)^2$.

于是 $2d^2\geqslant\frac{3}{4}(x+y)^2$，即 $\frac{d^2}{(x+y)^2}\geqslant\frac{6}{16}$，从而 $\frac{d}{x+y}\geqslant\frac{\sqrt{6}}{4}$. 当且仅当 $y=3x$ 时取等号.

所以当 $x:y:d=1:3:\sqrt{6}$ 时，Ω 的离心率 $e=\frac{d}{x+y}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

8. 若三个正整数 a,b,c 的位数之和为 8，且组成 a,b,c 的 8 个数码能排列为 2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8，则称 (a,b,c) 为幸运数组，例如 $(9,8,202400)$ 是一个幸运数组. 满足 $10<a<b<c$ 的幸运数组 (a,b,c) 的个数为_____.

【答案】591

【解析】对于满足 $10<a<b<c$ 的幸运数组 (a,b,c)，分两类情形讨论：

情形 1：a 是两位数，b,c 是三位数.

暂不考虑 b,c 的大小关系，先在 a,b,c 的非最高位（五个位置）中选三个位置填 0，剩下五个位置还未填，任选其中两个填 2，余下三个位置填 4, 8, 9，这样的填法数为 $C_5^3\times C_5^2\times 3!=600$. 再考虑其中 b,c 的大小关系，由于不可能有 $b=c$，故 $b<c$ 与 $b>c$ 的填法种数各占一半. 所以，情形 1 有 300 个满足要求的幸运数组.

情形 2：a,b 是两位数，c 是四位数.

暂不考虑 a,b 的大小关系，类似于情形 1，先在 a,b,c 的非最高位（五个位置）中选三个位置填 0，剩下五个位置填 2, 2, 4, 8, 9，这样的填法数为 600. 再考虑其中 a,b 的大小关系，若 $a=b$，则必有 $a=b=20$，c 是四个数码 0, 4, 8, 9 的排列，且 0 不在首位，有 $3\times 3!=18$ 种填法；除这些填法外，$a<b$ 与 $a>b$ 的填法种数各占一半. 所以，情形 2 有 $\frac{600-18}{2}=291$ 个满足要求的幸运数组.

综上，所求幸运数组的个数为 $300+291=591$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本小题满分 16 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2}$，求 $\cos C$ 的值.

解：由条件知 $\sqrt{2}\cos C=\sin(A+\frac{\pi}{4})=\sin(B+\frac{\pi}{4})$.

假如 $(A+\frac{\pi}{4})+(B+\frac{\pi}{4})=\pi$，则 $A+B=\frac{\pi}{2}$，故 $C=\frac{\pi}{2}$，$\cos C=0$，但 $\sin(A+\frac{\pi}{4})>0$，矛盾.

所以只能有 $A+\frac{\pi}{4}=B+\frac{\pi}{4}$，此时 $A=B\in(0,\frac{\pi}{2})$，$C=\pi-2A$.

注意到 $\sqrt{2}\cos C=\sin(A+\frac{\pi}{4})>0$，故 $C<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

于是 $\cos C=-\cos 2A=-\sin(2A+\frac{\pi}{2})=-2\sin(A+\frac{\pi}{4})\cos(A+\frac{\pi}{4})$

$=-2\times\sqrt{2}\cos C\times[-\sqrt{1-(\sqrt{2}\cos C)^2}]\ (\cos C>0)$. 解得 $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

10.（本小题满分 20 分）

在平面直角坐标系中，双曲线 Γ：$x^2-y^2=1$ 的右顶点为 A. 将圆心在 y 轴上，且与 Γ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”.

若两个好圆外切于点 P，圆心距为 d，求 $\dfrac{d}{|PA|}$ 的所有可能值.

解：考虑以（$0, t$）为圆心，半径为 r 的圆 Ω：$x^2+(y-t)^2=r^2$.

由 Ω 与 Γ 的方程联立消去 x，得 $2y^2-2ty+t^2+1-r^2=0$.

根据题设，该方程的判别式$\triangle=4t^2-8(t^2+1-r^2)=0$，即 $t^2=2r^2-2$.

对于外切于点 P 的两个好圆 Ω_1, Ω_2，显然点 P 在 y 轴上. 设 $P(0, h)$，Ω_1, Ω_2 的半径分别为 m, n，Ω_1, Ω_2 的圆心坐标分别为$(0, h+m)$，$(0, h-n)$，则

$$(h+m)^2=2m^2-2，(h-n)^2=2n^2-2.$$

两式相减，得 $2h(m+n)=m^2-n^2$，注意到 $m+n>0$，得 $h=\dfrac{m-n}{2}$.

于是$(\dfrac{m-n}{2}+m)^2=2m^2-2$，即 $m^2-6mn+n^2+8=0$，变形得 $2(m-n)^2+8=(m+n)^2$.

由于 $d=m+n$，$A(1,0)$，$P(0, h)$，故

$$|PA|^2=h^2+1=\frac{(m-n)^2}{4}+1=\frac{(m+n)^2}{8}=\frac{d^2}{8}.$$

所以$\dfrac{d}{|PA|}=2\sqrt{2}$.

11.（本小题满分 20 分）

设复数 z，w 满足 $z+w=2$，求 $S=|z^2-2w|+|w^2-2z|$的最小可能值.

解：设 $z=1+x+y\mathrm{i}$（$x, y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），则 $w=1-x-y\mathrm{i}$（不妨设 $x\geqslant 0$）.

计算得

$$z^2-2w=(x^2+4x-1-y^2)+(2x+4)y\mathrm{i}，w^2-2z=(x^2-4x-1-y^2)+(2x-4)y\mathrm{i}.$$

所以

$$S\geqslant|\mathrm{Re}(z^2-2w)|+|\mathrm{Re}(w^2-2z)|=|x^2+4x-1-y^2|+|x^2-4x-1-y^2|.$$

利用$|a|+|b|\geqslant|a\pm b|$，可得

$$S\geqslant 8x;\qquad ①$$

或

$$S\geqslant 2|x^2-1-y^2|=2(1-x^2+y^2)\geqslant 2(1-x^2).\qquad ②$$

注意到方程 $8x=2(1-x^2$ 的正根为$\sqrt{5}-2$.

当 $x\geqslant\sqrt{5}-2$ 时，由 ① 得 $S\geqslant 8x\geqslant 8\sqrt{5}-16$;

当 $0\leqslant x<\sqrt{5}-2$ 时，由 ② 得 $S\geqslant 2(1-x^2)>2[1-(\sqrt{5}-2)^2]=8\sqrt{5}-16$.

综上可知，当 $x=\sqrt{5}-2$，$y=0$ 时，S 取得最小值 $8\sqrt{5}-16$.

（其它解法从略）

2024 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案

一、（本题满分 40 分）

给定正整数 r，求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$，满足$\|a_n\|\geqslant C$对所有正整数 n 成立.（$\|x\|$表示实数 x 到与它最近整数的距离.）

解：情形 1：r 为奇数.

对任意实数 x，显然有$\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$，故满足要求的 C 不超过 $\frac{1}{2}$.

又取$\{a_n\}$的首项 $a_1=\frac{1}{2}$，注意到对任意正整数 n，均有 r^{n-1} 为奇数，因此

$$\|a_n\|=\left\|\frac{r^{n-1}}{2}\right\|=\frac{1}{2}.$$

这意味着 $C=\frac{1}{2}$ 满足要求，从而满足要求的 C 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

情形 2：r 为偶数.

设 $n=2m(m\in\mathbf{N}^*)$，对任意实数 a_n，我们证明：$\|a_1\|$与$\|a_2\|$中必有一个不超过$\frac{m}{2m+1}$，从而. $C\leqslant\frac{m}{2m+1}$,

事实上，设 $a_1=k\pm\delta$，其中 k 是与 a_1 最近的整数（之一），且 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}$.

注意到，对任意实数 x 及任意整数 k，均有$\|x+k\|=\|x\|$，$\|-x\|=\|x\|$.

若 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{m}{2m+1}$，则

$$\|a_1\|=\|k\pm\delta\|=\delta\leqslant\frac{m}{2m+1}.$$

若$\frac{m}{2m+1}<\delta\leqslant\frac{1}{2}$，则$\frac{2m^2}{2m+1}<2m\delta\leqslant m$，即 $m-\frac{m}{2m+1}<\delta r\leqslant m$，此时

$$\|a_2\|=\|a_1r\|=\|kr\pm\delta r\|=\|\delta r\|<\frac{m}{2m+1}.$$

另一方面，取 $a_1=\frac{m}{2m+1}$，则对任意正整数 n，有

$$a_n=\frac{m}{2m+1}(2m)^{n-1}=\frac{m}{2m+1}(2m+1-1)^{n-1}=K+(-1)^{n-1}\frac{m}{2m+1},\ K\in\mathbf{Z}.$$

故

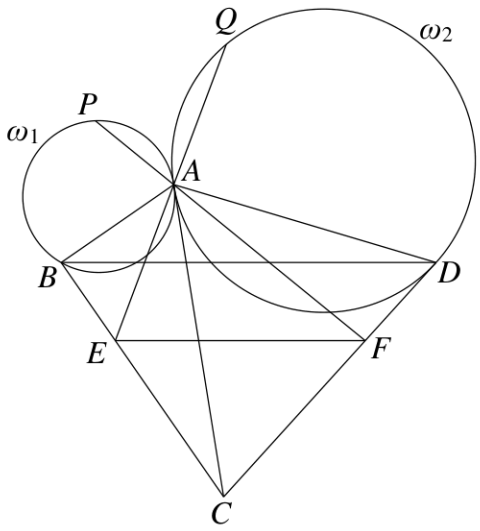
$$\|a_n\|=\frac{m}{2m+1}.$$

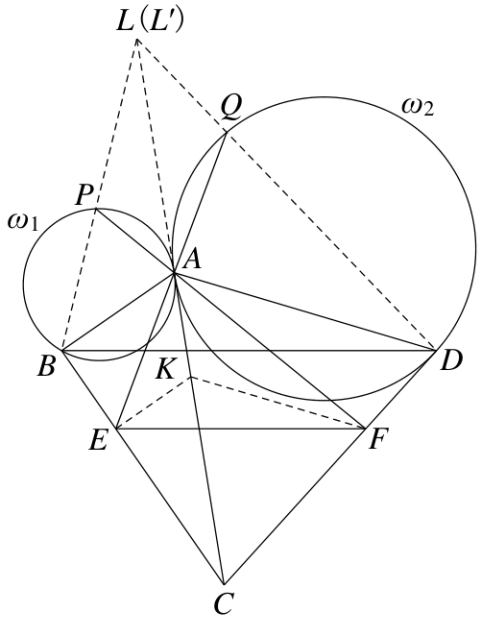
这意味着 $C=\frac{m}{2m+1}$满足要求，从而满足要求的 C 的最大值为 $\frac{m}{2m+1}=\frac{r}{2(r+1)}$,

综上，当 r 为奇数时，所求 C 的最大值为$\frac{1}{2}$；当 r 为偶数时，所求 C 的最大值为$\frac{r}{2(r+1)}$.

二、（本题满分 40 分）

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分$\angle BAD$，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，满足 $EF\parallel BD$. 分别延长 FA, EA 至点 P, Q，使得过点 A, B, P 的圆ω_1及过点 A, D, Q 的圆ω_2均与直线 AC 相切. 证明：B, P, Q, D 四点共圆.





证明：由圆ω_1与 AC 相切知$\angle BPA=\angle BAC=\angle CAD>\angle CAF=180°-\angle PAC$.

故 BP，CA 的延长线相交，记交点为 L.

由 $EF\parallel BD$ 知 $\frac{CE}{CB}=\frac{CF}{CD}$.

在线段 AC 上取点 K，使得$\frac{CK}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{CF}{CD}$，则 $KE\parallel AB$，$KF\parallel AD$.

由$\angle ABL=\angle PAL=\angle KAF$，$\angle BAL=180°-\angle BAC=180°-\angle CAD=\angle AKF$，

可知$\triangle ABL\backsim\triangle KAF$，所以 $AL=\frac{KF\cdot AB}{KA}$.

同理，DQ，CA 的延长线相交于点 L'，且有 $AL'=\frac{KE\cdot AD}{KA}$.

又由 $KE\parallel AB$，$KF\parallel AD$ 知$\frac{KE}{AB}=\frac{CK}{CA}=\frac{KF}{AD}$，即 $KE\cdot AD=KF\cdot AB$.

于是 $AL'=AL$，即 L'与 L 重合.

由切割线定理知 $LP\cdot LB=LA^2=LQ\cdot LD$，所以 B, P, Q, D 四点共圆.

三、（本题满分 50 分）

给定正整数 n. 在一个 $3\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A，B，存在整数 $l\geqslant 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1, C_2, \cdots, C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1, 2, \cdots, l-1$）.

求具有下述性质的最大整数 K：若该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于 K.

解：所求最大的 $K=n$. 理由如下：

对一个由小方格构成集合 S，记 S_b 是 S 中的黑格个数，S_w 是 S 中的白格个数.

用 $[i，j]$ 表示第 i 行第 j 列处的方格，这里 $1\leqslant i\leqslant 3$，$1\leqslant j\leqslant n$. 对于两个方格 $A=[i，j]$，$B=[i'，j']$，定义它们之间的距离为 $d(A, B)=|i-i'|+|j-j'|$.

首先，如果将方格表按国际象棋盘一样黑白间隔染色，我们证明：对任意连通的集合 S，均有 $|S_b-S_w|\leqslant n$，这表明 $K\leqslant n$.

设 $[1, 1]$ 是黑格，并记 $\varepsilon\in\{0, 1\}$，满足 $\varepsilon\equiv n\pmod 2$.

先证明 $S_b-S_w\leqslant n$.

不妨假设 S 包含所有黑格，这是因为若 S 不包含所有黑格，取不属于 S 的黑格 A 满足 $d(A, S)$ 最小，这里 $d(A, S)=\min\limits_{B\in S} d(A, B)$. 易知 $d(A, S)=1$ 或 2.

若 $d(A, S)=1$，取 $S'=S\cup\{A\}$，则 S' 仍是连通的，且 $S'_b-S'_w$ 更大.

若 $d(A, S)=2$，则存在与 A 相邻的白格 C，而 C 与 S 中某方格 B 相邻，取 $S'=S\cup\{A, B\}$，则 S' 仍是连通的，且 $S'_b-S'_w$ 不变. 因而可逐步扩充 S，使得 S 包含所有黑格，保持 S 的连通性，且 S_b-S_w 不减.

考虑白格集合 $W_k=\{[i，j]\,|\,i+j=k\}$，$k=3, 5, \cdots, n+1+\varepsilon$，每个 W_k 中至少有一个方格属于 S，否则不存在从黑格 $A=[1, 1]\in S$ 到黑格 $B=[3, n-1+\varepsilon]\in S$ 的路径，故 $S_w\geqslant\dfrac{1}{2}(n+\varepsilon)$.

而 $S_b=\dfrac{1}{2}(3n+\varepsilon)$，所以 $S_b-S_w\leqslant n$.

类似可证 $S_w-S_b\leqslant n$.

同上，不妨设 S 包含所有白格，从而 $S_w=\dfrac{1}{2}(3n-\varepsilon)$. 再考虑黑格集合 $B_k=\{[i，j]\,|\,i+j=k\}$，$k=4, 6, \cdots, n+2+\varepsilon$，每个 B_k 中至少有一个黑格属于 S，否则不存在从白格 $A=[1, 2]\in S$ 到白格 $B=[3, n-\varepsilon]\in S$ 的路径，从而 $S_b\geqslant\dfrac{1}{2}(n-\varepsilon)$，故 $S_w-S_b\leqslant n$.

下面证明 $K=n$ 具有题述性质，即

对任意的染色方案，总存在连通的集合 S，使得 $|S_b-S_w|\geqslant n$.

设表格中共有 X 个黑格和 Y 个白格，在第二行中有 x 个黑格和 y 个白格，于是 $X+Y=3n$，$x+y=n$. 故

$$(X-y)+(Y-x)=(X+Y)-(x+y)=2n.$$

由平均值原理可知 $\max\{X-y, Y-x\}\geqslant n$.

不妨设 $X-y\geqslant n$. 取 S 为第二行中的 y 个白格以及所有 X 个黑格. 由于 S 包含第二行中所有方格，因此 S 是连通的. 而 $S_b=X$，$S_w=y$，$S_b-S_w=X-y\geqslant n$.

综上所述，$K_{\max}=n$.

四、（本题满分 50 分）

设 A，B 为正整数，S 是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

（1）对任意非负整数 k，有 $A^k\in S$；

（2）若 $n\in S$，则 n 的每个正约数均属于 S；

（3）若 $m,n\in S$，且 m,n 互素，则 $mn\in S$；

（4）若 $n\in S$，则 $An+B\in S$.

证明：与 B 互素的所有正整数均属于 S.

证明：首先证明一个引理.

引理 若 $n\in S$，则 $n+B\in S$.

引理的证明.

对 $n\in S$，设 n_1 是 n 的与 A 互素的最大约数，并设 $n=n_1n_2$，则 n_2 的素因子均整除 A，从而 $(n_1,n_2)=1$. 由性质（1）及（2）知，对任意素数 $p\mid A$ 及任意正整数 k，有 $p^k\in S$. 因此，将 $A^{k-1}n_1$ 作标准分解，并利用性质（3）知 $A^{k-1}n_1\in S$. 又 $n_2\mid n$，而 $n\in S$，故由（2）知 $n_2\in S$.

因 $(A^{k-1}n_1,n_2)=1$，故由（3）知 $A^{k-1}n_1\cdot n_2\in S$，即 $A^{k-1}n\in S$. 再由（4）知

$$A^{k-1}n+B\in S\text{（对任意正整数 }k\text{）}. \qquad ①$$

设 $n+B=C\cdot D$，正整数 C 的所有素因子均整除 A，正整数 D 与 A 互素，故 $(C,D)=1$. 由（1）及（2）知 $C\in S$（见上面 $A^{k-1}n\in S$ 的证明）.

另一方面，因 $(D,A)=1$，故由欧拉定理知 $D\mid A^{\varphi(D)}-1$. 因此

$$A^{\varphi(D)}n+B=\left(A^{\varphi(D)}-1\right)n+(n+B)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,D).$$

但由①知 $A^{\varphi(D)}n+B\in S$，故由（2）知 $D\in S$.

结合 $C\in S$ 及 $(C,D)=1$ 知 $CD\in S$，即 $n+B\in S$. 引理证毕.

回到原问题.

在性质（1）中取 $k=0$ 得 $1\in S$，反复应用引理可知，对任意正整数 y，有 $1+By\in S$.

对任意正整数 n，$(n,B)=1$，存在正整数 x,y 使得 $nx=1+By$，因此 $nx\in S$.

因 $n\mid nx$，故 $n\in S$. 证毕.