2023 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2023 年全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 函数 $y=\log_{2023}(x^2-9x-10)$ 的定义域为_____.

2. 若实数 m 满足 $2^{2^m}=4^{4^m}$，则 m 的值为_____.

3. 若双曲线 $\Gamma_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的离心率为 3，则双曲线 $\Gamma_2:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 的离心率为_____.

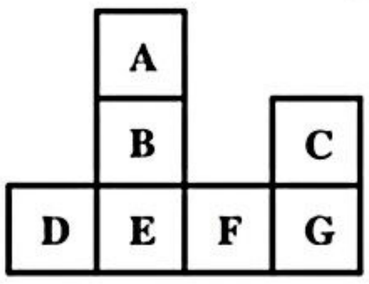
4. 设 n 为正整数. 从 $1,2,\cdots,n$ 中随机选出一个数 a，若事件“$2<\sqrt{a}\le 4$”发生的概率为 $\frac{2}{3}$，则 n 的所有可能的值为_____.

5. 平面上五点 A,B,C,D,E 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=4$，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=5$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=8$，则 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的值为_____.

6. 将所有非完全平方的正奇数与所有正偶数的立方从小到大排成一列（前若干项依次为$3,5,7,8,11,13,\cdots$），则该数列的第2023项的值为_____.

7. 设$P-ABCD$与$Q-ABCD$为两个正四棱锥，且$\angle PAQ=90^\circ$，点M在线段AC上，且$CM=3AM$．将异面直线PM,QB所成的角记为θ，则$\cos\theta$的最大可能值为_____.

8. 七张标有A,B,C,D,E,F,G的正方形卡片构成下图．现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按D,A,B,E,C,F,G的次序取走卡片，但不可按D,B,A,E,C,F,G的次序取走卡片），则取走这七张卡片的不同次序的数目为_____.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）将方程 $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的所有正实数解从小到大依次记为 $x_1, x_2, x_3, \cdots$．求 $x_1+x_2+\cdots+x_{20}$ 的值．

10.（本题满分 20 分）平面直角坐标系中，圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切，与椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有唯一的公共点 $A(8,9)$，且 Ω 的圆心位于 Γ 内．试比较 Ω 的直径与 Γ 的焦距的大小．

11.（本题满分 20 分）求出所有满足下面要求的不小于 -1 的实数 t：对任意 $a\in[-2,t]$，总存在 $b,c\in[-2,t]$，使得 $ab+c=1$.