2023 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2023 年全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设复数 $z=9+10\mathrm{i}$（i 为虚数单位），若正整数 n 满足 $\left|z^n\right|\leq 2023$，则 n 的最大值为_____.

2. 若正实数 a,b 满足 $a^{\lg b}=2$，$a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}=5$，则 $(ab)^{\lg ab}$ 的值为_____.

3. 将一枚均匀的骰子独立投掷三次，所得的点数依次记为 x,y,z，则事件“$\mathrm{C}_7^x<\mathrm{C}_7^y<\mathrm{C}_7^z$”发生的概率为_____.

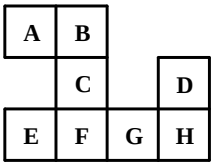
4. 若平面上非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2|\vec{\alpha}|$，$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=3|\vec{\beta}|$，则 $|\vec{\gamma}|$ 的最小值为_____.

5. 方程 $\sin x=\cos 2x$ 的最小的 20 个正实数解之和为_____.

6. 设 a,b,c 为正数，$a<b$. 若 a,b 为一元二次方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根，且 a,b,c 是一个三角形的三边长，则 $a+b-c$ 的取值范围是_____.

7. 平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切，圆心在椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内，且 Ω 与 Γ 有唯一的公共点 $(8,9)$. 则 Γ 的焦距为_____.

8. 八张标有 A, B, C, D, E, F, G, H 的正方形卡片构成下图．现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按 D, A, B, E, C, F, G, H 的次序取走卡片，但不可按 D, B, A, E, C, F, G, H 的次序取走卡片），则取走这八张卡片的不同次序的数目为_____.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$，F 为 Γ 的焦点，A, B 为 Γ 上的两个不重合的动点，使得线段 AB 的一个三等分点 P 位于线段 OF 上（含端点），记 Q 为线段 AB 的另一个三等分点．求点 Q 的轨迹方程．

10.（本题满分 20 分）已知三棱柱$\Omega: ABC-A_1B_1C_1$的9条棱长均相等．记底面ABC所在平面为α．若Ω的另外四个面（即面$A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$）在$\alpha$上投影的面积从小到大重排后依次为$2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$，求$\Omega$的体积．

11.（本题满分 20 分）求出所有满足下面要求的不小于1的实数t：对任意$a, b\in[-1, t]$，总存在$c, d\in[-1, t]$，使得$(a+c)(b+d)=1$．