2022年全国高中数学联合竞赛一试试题（B卷）

一、填空题: 本大题共8小题, 每小题8分, 满分64分.

1.不等式$\frac{20}{x-9}>\frac{22}{x-11}$的解集为_____.

2.在平面直角坐标系中, 以抛物线$\Gamma: y^2=6x$的焦点为圆心作一个圆Ω, 与Γ的准线相切, 则圆Ω的面积为_____.

3.函数$f(x)=\lg 2\cdot\lg 5-\lg 2x\cdot\lg 5x$的最大值为_____.

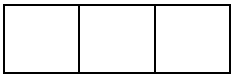
4.一枚不均匀的硬币, 若随机抛掷它两次均得到正面的概率为$\frac{1}{2}$, 则随机 抛掷它两次得到正面、反面各一次的概率为_____.

5.已知复数z满足$|z|=1$, 且$\mathrm{Re}\frac{z+1}{\bar{z}+1}=\frac{1}{3}$, 则$\mathrm{Re}\frac{z}{\bar{z}}$的值为_____.

6.若正四棱雉$P-ABCD$的各条棱长均相等, M为棱AB的中点, 则异面直 线BP与CM所成的角的余弦值为_____.

7.若$\triangle ABC$的三个内角A,B,C满足$\cos A=\sin B=2\tan\frac{C}{2}$, 则$\sin A+\cos A+2\tan A$的值为

8.一个单位方格的四条边中, 若存在三条边染了三种不同的颜色, 则称该 单位方格是“多彩”的. 如图, 一个1×3方格表的表格线共含 10 条单位长线段, 现要对这 10 条线段染色, 每条线段染为红、黄、蓝三色之一, 使得三个单位方 格都是多采的. 这样的染色方式数为_____.



(答案用数值表示).

二.解答题: 本大题共3小题, 满分56分. 解答应写出文字说明、证明过 程或演算步骤。

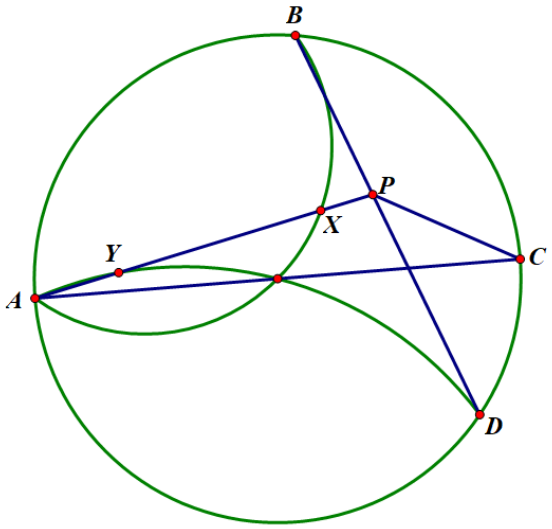
9.(本题满分 16 分) 在平面直角坐标系中, F_1,F_2是双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{3}-y^2=1$的 两个焦点, Γ上一点P满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=1$. 求点$P$到$\Gamma$的两条渐近线的距离之和.

10.(本题满分 20 分) 设正数a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3满足: a_1,a_2,a_3成公差为b_1的 等差数列, b_1,b_2,b_3成公比为a_1的等比数列, 且$a_3=b_3$. 求a_3的最小值, 并确定 当a_3取到最小值时a_2b_2的值.

11.(本题满分 20 分) 若a,b为实数, $a<b$， 函数$y=\sin x$在闭区间$[a,b]$上 的最大值与最小值之差为 1 , 求$b-a$的取值范围.

2022 年全国高中数学联合竞赛 加试试题 (B 卷)

一. (本题满分 40 分) 如图, 设 A,B,C,D 四点在圆 ω 上顺次排列, 其中 AC 经过 ω 的圆心 O. 线段 BD 上一点 P 满足 $\angle APC=\angle BPC$, 线段 AP 上两点 X,Y 满 足 A,O,X,B 四点共圆, A,Y,O,D 四点共圆. 证明: $BD=2XY$.



二. (本题满分 40 分) 给定正实数 $a,b,a<b$. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{2022}\in[a,b]$, 求

$$\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{2021}-x_{2022}|+|x_{2022}-x_1|}{x_1+x_2+\cdots+x_{2022}}$$

的最大值.

三. (本题满分 50 分) 设正整数 a,b 都恰有 $m(m\geq 3)$ 个正约数, 其中 $a_1,a_2\ a_3,\cdots,a_m$ 是 a 的所有正约数的一个排列. 问 $a_1,a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{m-1}+a_m$ 是否可 能恰好是 b 的所有正约数的一个排列? 证明你的结论.

四. (本题满分 50 分) 圆周上依次有 100 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$ (其中 P_{100} 与 P_1 相 邻). 现有 5 种颜色, 要求 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$ 中每个点染 5 种颜色之一, 每种颜色至少 染一个点. 若对任意这样的染色方式, $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$ 中总存在 t 个连续的点含有至 少 3 种颜色, 求 t 的最小值.