2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨 2022 年全国高中数学联合竞赛

一试试题（A2 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 函数 $f(x)=\sin 2022x+|x\quad 11|+|x\quad 27|$ 的最小值为 _____.

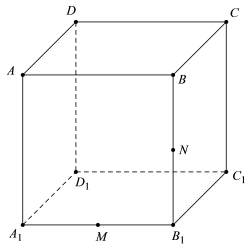
2. 若正数 a,b 满足 $\log_2 a+\log_4 b=8,\log_4 a+\log_8 b=2$, 则 $\log_8 a+\log_2 b$ 的值为 _____.

3. 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 1 , 各项的绝对值之和为 2 , 则首项 a_1 的值为 _____.

4. 设 a 为实数. 若存在实数 t, 使得 $\dfrac{a\quad \mathrm{i}}{t-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$ 为实数 (i 为虚数单位), 则 a 的取值范围是 _____.

5. 在平面直角坐标系中, F_1 、F_2 分别为双曲线 $\Omega: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 交 Ω 于两点 P,Q. 若 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{F_1P}=16$, 则 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$ 的值为 _____.

6. 如图, 正方体 $ABCD\quad A_1B_1C_1D_1$ 中, M,N 分别为棱 A_1B_1,BB_1 的中点, 过 D,M,N 三点作该正方体的截面, 已知截面是一个多边形 Γ, 则 Γ 在顶点 D 处的内角的余弦值为 _____.



7. 在 $1,2,\cdots,10$ 中随机选出三个不同的数, 它们两两互素的概率为 _____.

8. 设 k,l,m 为实数, $m\neq 0$, 在平面直角坐标系中, 函数 $y=f(x)=k+\dfrac{m}{x-l}$ 的图像为曲线 C_1, 另一函数 $y=g(x)$ 的图像为曲线 C_2, 且满足 C_2 与 C_1 关于直线 $y=x$ 对称. 若点 $(1,4),(2,3),(2,4)$ 都在曲线 C_1 或 C_2 上, 则 $f(k+l+m)$ 的值为 _____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. （本题满分 16 分）已知 $\triangle ABC$ 及其边 BC 上的一点 D 满足: $AB=2BD$, $AC=3CD$, 且以 A、D 为焦点可以作一个椭圆 Γ 同时经过 B、C 两点, 求 Γ 的离心率.

10. （本题满分 20 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非负实数, 且满足: 对任意整数 $n\geq 2$, 均有 $a_{n+1}=a_n \quad a_{n\ 1}+n$. 若 $a_2a_{2022}=1$, 求 a_1 的最大可能值.

11. （本题满分 20 分）给定整数 $n(n\geq 2)$. 对于一个 $2n$ 元有序数组

$$T=(a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n),$$

若 T 的每个分量均为 0 或 1 , 且对任意 $p,q(1\leq p<q\leq n)$, 均有 $(a_p,b_p,b_q)\neq(1,0,1)$ 且 $(a_q,b_q,a_p)\neq(1,0,0)$, 则称 T 为“有趣数组”. 求有趣数组的个数.