2022 年全国高中数学联合竞赛一试（A1 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设复数 $z=\sqrt{\dfrac{\pi}{e+\pi}}(1+i)+\sqrt{\dfrac{e}{\pi+e}}(1-i)$（$e$ 为自然对数的底数，i 为虚数单位），则 z 的模为_____.

2. 在平面直角坐标系中，圆 $\Omega: x^2+y^2+dx+ey+f=0$（其中 d,e,f 为实数）的一条直径为 AB，其中 $A(20,22), B(10,30)$，则 f 的值为_____.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=|x-2|+a$（其中 a 为实数）. 若 $f(x)$ 为奇函数，则不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集为_____.

4. 若 $\triangle ABC$ 满足 $\dfrac{\angle A}{3}=\dfrac{\angle B}{4}=\dfrac{\angle C}{5}$，则 $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|BC|^2}$ 的值为_____.

5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 及正整数 $m(m\geq 3)$ 满足：$a_1=1, a_m=2$，且

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}a_m}=3,$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 的值为_____.

6. 在某次数学竞赛小组交流活动中，四名男生与三名女生按随机次序围坐一圈，则三名女生两两不相邻的概率为_____.

7. 已知四面体 $ABCD$ 满足 $AB\perp BC, BC\perp CD, AB=BC=CD=2\sqrt{3}$，且该四面体的体积为 6，则异面直线 AD 与 BC 所成的角的大小为_____.

8. 在 5×5 矩阵中，每个元素都为 0 或 1，且满足：五行的元素之和都相等，但五列的元素之和两两不等. 这样的矩阵的个数为_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）对任意正实数 a，记函数 $f(x)=|\lg x|$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_a，函数 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0,a]$ 上的最大值为 M_a．若 $M_a-m_a=\dfrac{1}{2}$，求 a 的所有可能值．

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，设一条动直线 l 与抛物线 $\Gamma:y^2=4x$ 相切，且与双曲线 $\Omega:x^2-y^2=1$ 交于左、右两支各一点 A、B．求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值．

11.（本题满分 20 分）设正整数数列 $\{a_n\}$ 同时具有以下两个性质：

(i) 对任意正整数 k，均有 $a_{2k-1}+a_{2k}=2^k$；

(ii) 对任意正整数 m，均存在正整数 $l\le m$，使得 $a_{m+1}=\sum\limits_{i=l}^{m}a_i$．

求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}$ 的最大值．

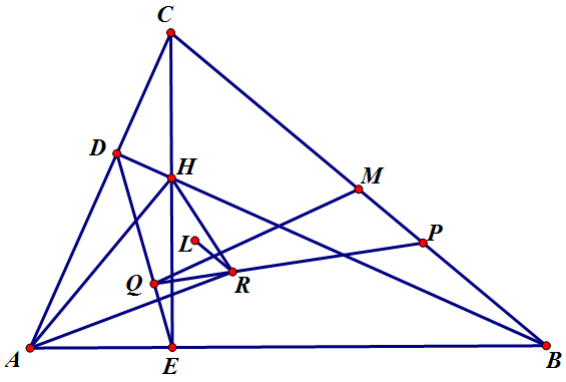
2022 年全国高中数学联合竞赛加试（A1 卷）

一、（本题满分 40 分）设实数 a,b,c,d 满足 $a\geq b$，$c\geq d$，且

$$|a|+2|b|+3|c|+4|d|=1.$$

记 $P=(a-b)(b-c)(c-d)$，求 P 的最小值与最大值.

二、（本题满分 40 分）如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，H 为垂心，BD,CE 为高，M 为边 BC 的中点. 在线段 BM,DE 上各取一点 P,Q，并在线段 PQ 上取一点 R，使得 $\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{PR}{QR}$. 设 L 为 $\triangle AHR$ 的垂心，求证：直线 QM 平分线段 RL.



三、（本题满分 50 分）是否存在一个无限正整数集合 S，具有下述性质：对任意 $x,y,z,w\in S$，$x<y,z<w$，若有序数对 $(x,y)\neq(z,w)$，则 $xy+2022$ 与 $zw+2022$ 互素？

四、（本题满分 50 分）给定实数 r，甲、乙两人玩如下的游戏.

黑板上写着一个含有三个绝对值的算式：

$$S=|\square-\square|+|\square-\square|+|\square-\square|,$$

其中 6 个空格“$\square$”中尚未填数. 每一回合，甲选取区间 $[0,1]$ 中的一个实数（不同回合中可以选相同的数），乙将该数填在某个空格之中. 经过六个回合之后所有 6 个空格中均填了数，S 的值也随之确定. 若 $S\geq r$，则甲胜，否则乙胜.

求所有的实数 r，使得甲有获胜策略.