2022年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)

暨2022年全国高中数学联合竞赛

一试试题（A卷）

一、填空题:本大题共8小题，每小题8分,满分64分.

1.集合$A=\{n \mid n^3<2022<3^n, n\in Z\}$的所有元素之和为_____.

2.设函数$f(x)=\frac{x^2+x+16}{x}(2\le x\le a)$,其中实数$a>2$.若$f(x)$的值域为$[9,11]$,则$a$的取值范围是_____.

3.一枚不均匀的硬币,若随机抛掷它两次均得到正面的概率是均得到反面的概率的9倍,则随机抛掷它两次得到正面、反面各一次的概率为_____.

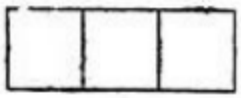
4.若复数z满足:$\frac{z-3\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$为负实数(i为虚数单位),$\frac{z-3}{z+1}$为纯虚数,则$z$的值为_____.

5.若四棱锥$P-ABCD$的棱AB,BC的长均为$\sqrt{2}$,其他各条棱长均为1,则该四棱锥的体积为_____.

6.已知函数$y=f(x)$的图像既关于点$(1,1)$中心对称,又关于直线$x+y=0$轴对称.若$x\in(0,1)$时,$f(x)=\log_2(x+1)$,则$f(\log_2 10)$的值为_____.

7.在平面直角坐标系中,椭圆$\Omega:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,$P$为$\Omega$上的动点,$A,B$为两个定点,其中$B$的坐标为$(0,3)$.若$\triangle PAB$的面积的最小值为1、最大值为5,则线段$AB$的长为_____.

8.一个单位方格的四条边中,若有两条边染了颜色i,另两条边分别染了异于i色的另两种不同颜色,则称该单位方格是“i色主导”的.如图,一个1×3方格表的表格线共含10条单位长线段,现要对这10条线段染色,每条线段染为红、黄、蓝三色之一,使得红色主导、黄色主导、蓝色主导的单位方格各有一个.这样的染色方式数为_____(答案用数值表示).



二、解答题:本大题共 3 小题,满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

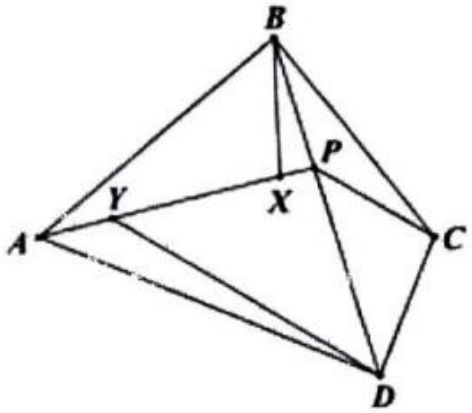
9. (本题满分 16 分)若△ ABC的内角A,B,C满足$\sin A=\cos B=\tan C$, 求$\cos^3 A+\cos^2 A-\cos A$的值.

10. (本题满分 20 分)给定正整数$m(m\geq 3)$. 设正项等差数列$\{a_n\}$与正项等比数列$\{b_n\}$满足:$\{a_n\}$的首项等于$\{b_n\}$的公比,$\{\}$的首项等于$\{a_n\}$的公差,且$a_m=b_m$. 求a_m的最小值,并确定当a_m取到最小值时a_1与b_1的比值.

11. (本题满分 20 分)在平面直角坐标系中,双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{3}-y^2=1$. 对平面内不在$\Gamma$上的任意一点$P$,记$\Omega_P$为过点$P$且与$\Gamma$有两个交点的直线的全体. 对任意直线$l\in\Omega_p$,记$M,N$为$l$与$\Gamma$的两个交点,定义$f_p(l)=|PM|\cdot|PN|$. 若存在一条直线$l_0\in\Omega_p$满足:$l_0$与$\Gamma$的两个交点位于$y$轴异侧,且对任意直线$l\in\Omega_p, l\neq l_0$,均有$f_P(l)>f_P(l_0)$,则称$P$为“好点”. 求所有好点所构成的区域的面积.

加试试题(A 卷)

一. (本题满分 40 分)如图,在凸四边形$ABCD$中,$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$,对角线$BD$上一点$P$满足$\angle APB=2\angle CPD$,线段$AP$上两点$X,Y$满足$\angle AXB=2\angle ADB, \angle AYD=2\angle ABD$. 证明:$BD=2XY$. (答题时请将图画在答卷纸上)



二. (本题满分 40 分)设整数$n(n>1)$恰有k个互不相同的素因子, 记n的所有正约数之和为$\sigma(n)$. 证明：$\sigma(n) \mid (2n-k)$.

三. (本题满分 50 分)设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是非负整数, 同时满足以下条件:

(1)存在正整数$k \leq 100$, 使得$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, 而当$i>k$时$a_i = 0$;

(2)$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 100$;

(3)$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 2022$.

求$a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + 100^2 a_{100}$的最小可能值.

四. (本题满分 50 分)求具有下述性质的最小正整数t：将100×100的方格纸的每个小方格染为某一种颜色, 若每一种颜色的小方格数目均不超过 104, 则存在一个$1 \times t$或$t \times 1$的矩形, 其中t个小方格含有至少三种不同颜色.