2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛 (初赛)
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
一试试题(B卷)

一、填空题：本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 $a_{2021} = a_{20} + a_{21}$, 则 $\frac{a_1}{d}$ 的值为 _____.

2. 设 m 为实数, 复数 $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = m + 3\mathrm{i}$ (这里 i 为虚数单位), 若 $z_1\overline{z_2}$ 为纯虚数, 则 $|z_1 + z_2|$ 的值为 _____.

3. 当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x$ 的取值范围是 _____.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且对任意 $x \in D$, 均有 $f(x) = \frac{f(1)\cdot x^2 + f(2)\cdot x - 1}{x}$, 则 $f(x)$ 的所有零点之和为 _____.

5. 设 $a, b, c > 1$, 满足 $(a^2 b)^{\log_a c} = a \cdot (ac)^{\log_a b}$, 则 $\log_c(ab)$ 的值为 _____.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $AC = 2$, $\cos B = 2\sin C$, 则 BC 的长为 _____.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 - 3x + 3$ $(a \neq 0)$ 的图像与抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 的图像关于直线 $y = x + m$ 对称, 则实数 a, p, m 的乘积为 _____.

8. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ 是 $1, 2, \ldots, 10$ 的一个随机排列, 则在 $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_9a_{10}$ 这 9 个数中既出现 9 又出现 12 的概率为 _____.

二、解答题：本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. 令

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 求 a_{100} 的值.

10. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 函数 $y=\frac{1}{|x|}$ 的图像为 Γ. 设 Γ 上的两点 P, Q 满足: P 在第一象限, Q 在第二象限, 且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q. 求 $|PQ|$ 的最小值.

11. (本题满分 20 分) 在正 n ($n \geq 3$) 棱锥 $P-A_1A_2\cdots A_n$ 中, O 为底面正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, B 为棱 A_1A_n 的中点.

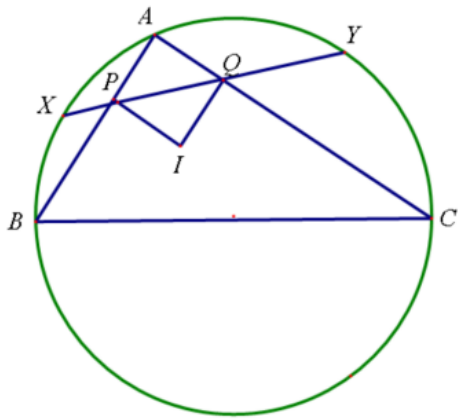
(1) 证明：$PO^2\sin^2\frac{\pi}{n}+PA_1^2\cos^2\frac{\pi}{n}=PB^2$;

(2) 设正 n 棱锥 $P-A_1A_2\cdots A_n$ 的侧棱与底面所成的角为 α, 侧面与底面所成的角为 β, 试确定 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\angle A_iPB$ 与 $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ 的大小关系, 并予以证明.

2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛 (初赛)
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
加试试题 (B 卷)

一. **(本题满分 40 分)** 如图所示, I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 点 P, Q 分别为 I 在边 AB, AC 上的投影. 直线 PQ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 X、Y (P 在 X、Q 之间). 已知 B, I, P, X 四点共圆, 证明：C, I, Q, Y 四点共圆.

(答题时请将图画在答卷纸上)



二. **(本题满分 40 分)** 求最大的正整数 n, 使得存在 8 个整数 x_1, x_2, x_3, x_4 和 y_1, y_2, y_3, y_4, 满足：

$$\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \left\{|x_i - x_j| \mid 1 \le i < j \le 4\right\} \cup \left\{|y_i - y_j| \mid 1 \le i < j \le 4\right\}.$$

三. **(本题满分 50 分)** 已知 $a,b,c,d\in[0,\sqrt[4]{2})$, 满足: $a^3+b^3+c^3+d^3=2$, 求 $\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}+\frac{b}{\sqrt{2-b^4}}+\frac{c}{\sqrt{2-c^4}}+\frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$ 的最小值.

四. **(本题满分 50 分)** 设 a 为正整数. 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a_n^2+20,\quad n=1,2,\cdots$$

(1) 证明: 存在一个非立方数的正整数 a, 使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数.

(2) 证明：数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.