2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
一试试题（A2 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-a_2=3, a_1-a_3=2$，则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

2. 函数 $f(x)=2\sin^2 x-\tan^2 x$ 的最大值为_____.

3. 若圆锥的高为 5，侧面积为 30π，则该圆锥的体积为_____.

4. 在边长为 1 的正六边形的六个顶点中随机取出三个顶点，则这三点中有两点的距离为 $\sqrt{3}$ 的概率为_____.

5. 复数 $z_1,z_2,\cdots,z_{100}$ 满足：$z_1=3+2\mathrm{i}$，$z_{n+1}=\bar{z}\cdot\mathrm{i}^n(n=1,2,\cdots,99)$（$i$ 为虚数单位），则 $z_{99}+z_{100}$ 的值为_____.

6. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-x$，且对任意实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$. 记 $a=\log_2 3$，则表达式 $f(a)+f(2a)+f(3a)$ 的值为_____.

7. 设集合 $S=\{1,2,3,\cdots,10\}$，S 的子集 A 满足

$$A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing,\quad A\cup\{4,5,6\}\neq S,$$

这样的子集 A 的个数为_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，Γ_1 是以 $(2,1)$ 为圆心的单位圆，Γ_2 是以 $(10,11)$ 为圆心的单位圆. 过原点 O 作一条直线 l，使得 l 与 Γ_1,Γ_2 各有两个交点，将 Γ_1,Γ_2 共分成四段圆弧，且这四段圆弧中有两段等长. 所有满足条件的直线 l 的斜率之和为_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 已知 ΔABC 满足 $AB=1, AC=2, \cos B+\cos C=1$，求 BC 边的长.

10.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆

$$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

金华一中高一数竞 ZR

设 A 为 Γ 的一个长轴端点，B 为 F 的一个短轴端点，F 为 Γ 的一个焦点. 已知 Γ 上存在关于 O 对称的两点 P,Q，使得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|AB|^2$.

(1) 证明：焦点 F 在 AO 的延长线上；

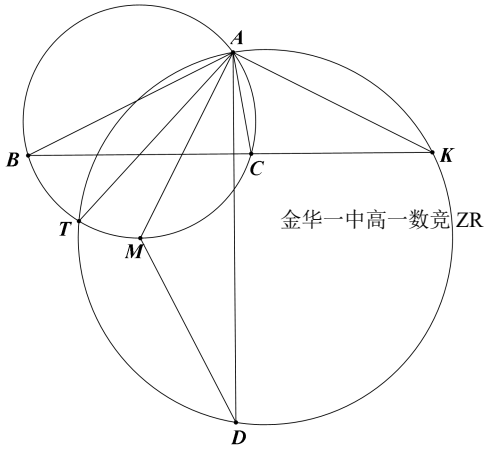
(2) 求 Γ 的离心率的取值范围.

11.（本题满分 20 分） 设 a,b 为实数，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$. 若存在三个实数 x_1,x_2,x_3 满足 $x_1+1\le x_2\le x_3-1$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求 $|a|+2|b|$ 的最小值.

2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
加试试题（A2 卷）

一.（本题满分 40 分）如图所示，在锐角 ΔABC 中，$AB > AC$，M 是 ΔABC 的外接圆 Ω 的劣弧 BC 的中点，K 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与 BC 延长线的交点. 在过点 A 且垂直于 BC 的直线上取一点 D（异于 A），使得 $DM = AM$．设 ΔADK 的外接圆与圆 Ω 相交于点 A 及另一点 T 证明：AT 平分线段 BC．

（答题时请将图画在答卷纸上）



二.（本题满分 40 分）试确定具有下述性质的最大正数 $M > 1$：在区间 $[1, M]$ 中任意取10个不同的实数，均可从中选取三个数，从小到大记为 $a < b < c$，使得一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根.

三.（本题满分 50 分）给定整数 $n \geq 2$．设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n，\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n．$$

求 $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n$ 的最小值.

四.（本题满分 50 分）将连续 k 个正整数从小至大依次写下后构成一个正整数，称为 $k-$ 连续数．例如依次写下 $99,100,101$ 后得到 99100101，是一个 $3-$ 连续数．证明：对任意正整数 N, k，存在一个 $k-$ 连续数被 N 整除.