2021 年全国高中数学联合竞赛一试试题（A1 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2x+y \mid x,y\in A, x<y\}$， $C=\{2x+y \mid x,y\in A, x>y\}$，则 $B\cap C$ 的所有元素之和为_____.

2. 设 m 为实数，向量 $\vec{a}=(1+2^m,1-2^m)$， $\vec{b}=(4^m-3,4^m+5)$，则数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为_____.

3. 已知 ΔABC 满足：$\tan A,\tan B$ 是方程 $x^2-10x+6=0$ 的两个根，则 $\cos C$ 的值为_____.

4. 在平面直角坐标系中，双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，一条倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线经过 Γ 的一个项点及 Γ 上另外一点 $(2,3)$，则 Γ 的离心率为_____.

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$， $a_n=\dfrac{1}{4a_{n-1}}+\dfrac{1}{n}(n>2)$，则 a_{100} 的值为_____.

6. 设正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长与高相等，点 G 为侧面 ΔPBC 的重心，则直线 AG 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为_____.

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{21}$ 为 $1,2,\cdots,21$ 的排列，满足

$$|a_{20}-a_{21}|\geq|a_{19}-a_{21}|\geq|a_{18}-a_{21}|\geq\cdots\geq|a_1-a_{21}|$$

这样的排列的个数为_____.

8. 正实数 x,y 满足如下条件：存在 $a\in[0,x]$， $b\in[0,y]$，使得

$$a^2+y^2=2,\quad b^2+x^2=1,\quad ax+by=1,$$

则 $x+y$ 的最大值_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

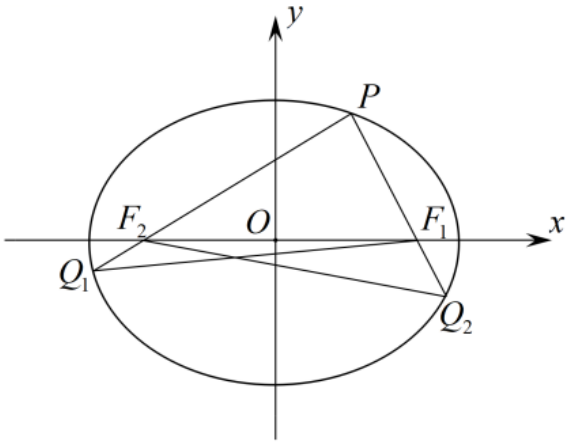
9.（本题满分 16 分）设函数 $f(x)=\left|2-\log_3 x\right|$，正实数 a,b,c 满足 $a<b<c$，且 $f(a)=2f(b)=2f(c)$．求 $\dfrac{ac}{b}$ 的值.

10.（本题满分 20 分）设 $a,b\in\mathbf{R}$．若关于 z 的方程

$$(z^2+az+b)(z^2+az+2b)=0$$

有 4 个互不相等的复数根 z_1,z_2,z_3,z_4，且它们在复平面上对应的点恰是一个边长为 1 的正方形的四个顶点，求 $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ 的值.

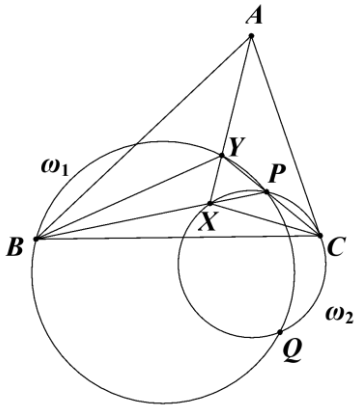
11.（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系中，椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，设 P 是第一象限内 Γ 上一点，PF_1,PF_2 的延长线分别交 Γ 于点 Q_1,Q_2．设 r_1,r_2 分别为 $\Delta PF_1Q_2,\Delta PF_2Q_1$ 的内切圆半径．求 r_1-r_2 的最大值.



2021 年全国高中数学联合竞赛加试试题（A1 卷）

一．**（本题满分 40 分）**如图，在 ΔABC 中，$AB>AC$，ΔABC 内两点 X,Y 均在 $\angle BAC$ 的平分线上，且满足 $\angle ABX=\angle ACY$．设 BX 的延长线与线段 CY 交于点 P，ΔBPY 的外接圆 ω_1 与 ΔCPX 的外接圆 ω_2 交于 P 及另一点 Q．

证明：A,P,Q 三点共线．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



二．**（本题满分 40 分）**求正整数 a,b,n（其中 $n\geq 2$）满足的充分必要条件，使得存在一个从集合

$$S=\{a+bt\mid t=0,1,\cdots n-1\}$$

到自身的一一映射 $f:S\to S$，满足：对任意 $x\in S$，均有 x 与 $f(x)$ 互素.

三．**（本题满分 50 分）**设正实数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：对任意整数$n\geq 101$，有

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}b_{n-j}^2}\ ,\quad b_n=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}a_{n-j}^2}$$

证明：存在正整数m，使得$|a_m-b_m|<0.001$.

四．**（本题满分 50 分）**圆周上给定 100 个不同的点．试确定最大的正整数 k：将这 100 个点中任意 k 个点任意染为红、蓝两色之一，均可将其余的点适当地染为红色或蓝色，使得可用这 100 个点为端点作 50 条线段，任意两条线段没有公共点，且每条线段的端点同色．