2020 年全国高中数学联赛一试**答案** (B 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若实数 x 满足 $\log_2 x = \log_4(2x) + \log_8(4x)$，则 $x =$ ____.

解析： 128.

根据题意，有

$$\log_2 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2 x\right) \iff \log_2 x = 7 \iff x = 128.$$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 经过点 $(0,0),(2,4),(3,3)$，则圆 Ω 上的点到原点的距离的最大值为____.

解析： $2\sqrt{5}$.

设 $A(0,0)$，$B(2,4)$，$C(3,3)$，则直线 AC, BC 的斜率分别为 $1,-1$，于是线段 AB 为圆 Ω 的直径，从而所求距离的最大值为 $|AB| = 2\sqrt{5}$.

3. 设集合 $X = \{1,2,\cdots,20\}$，A 是 X 的子集，A 的元素个数至少是 2，且 A 的所有元素可排成连续正整数，则这样的集合 A 的个数为____.

解析： 190.

从 $1,2,\cdots,20$ 中任意选择 a,b 两个数（$a<b$），则 (a,b) 到从 a 到 b 的连续正整数构成的集合形成一一对应

$$(a,b) \mapsto \{a,\cdots,b\},$$

因此所求集合个数为 $\binom{20}{2} = 190$.

4. 在三角形 ABC 中，$BC=4$，$CA=5$，$AB=6$，则 $\sin^6\frac{A}{2} + \cos^6\frac{A}{2} =$____.

解析： $\frac{43}{64}$.

根据题意，有

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5} = \frac{3}{4} \implies \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

于是

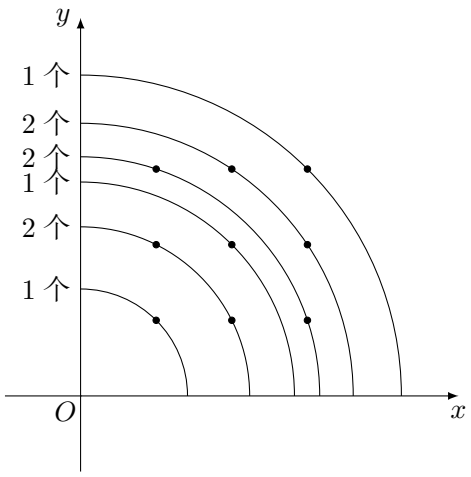
$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 A\\&=\frac{43}{64}.\end{aligned}$$

5. 设 9 元集合 $A=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\{1,2,3\}\}$，$\mathrm{i}$ 是虚数单位．$\alpha=(z_1,z_2,\cdots,z_9)$ 是 A 中所有元素的一个排列，满足 $|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_9|$，则这样的排列 α 的个数为____.

解析：　8.

如图，A 中所有元素的模的分布为

$\lvert z\rvert$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$
个数	1	2	1	2	2	1



因此这样的排列 α 的个数为 $1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot2\cdot1=2^3=8$.

6. 已知一个正三棱柱的各条棱长均为 3，则其外接球的体积为____.

解析：　$\dfrac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.

根据对称性，题中正三棱柱的外接球球心为上下底面中心的连线的中心，于是外接球半径为

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2},$$

因此所求外接球的体积为 $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^3=\dfrac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.

7. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$. 点 P 是四边形 $ABCD$ 所在平面上一点，满足

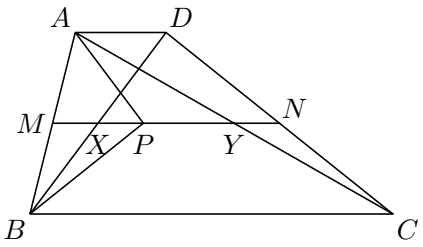
$$\overrightarrow{PA}+2020\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2020\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{0}.$$

设 s,t 分别为四边形 $ABCD$ 与 $\triangle PAB$ 的面积，则 $\dfrac{t}{s}=$____.

解析： $\dfrac{337}{2021}$.

记 AB,CD,BD,AC 的中点分别为 M,N,X,Y，$BC=2AD=2$，BC 与 AD 的距离为 d，则

$$MX=YN=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2},\quad XY=MN-MX-YN=\frac{1}{2},$$



于是

$$\overrightarrow{PA}+2020\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2020\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{PM}+2020\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{0},$$

因此 $PX=\dfrac{1}{4042}$，进而

$$\frac{t}{s}=\frac{[ABCD]}{[PAB]}=\frac{\frac{BC+AD}{2}\cdot d}{\frac{1}{2}\cdot PM\cdot d}=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4042}}=\frac{337}{2021}.$$

8. 已知首项系数为 1 的五次多项式 $f(x)$ 满足：$f(n)=8n$，$n=1,2,\cdots,5$，则 $f(x)$ 的一次项系数为____.

解析： 282.

根据题意，有

$$f(x)-8x=\prod_{k=1}^{5}(x-k),$$

于是 $f(x)$ 的一次项系数为

$$8+5!\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=282.$$

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

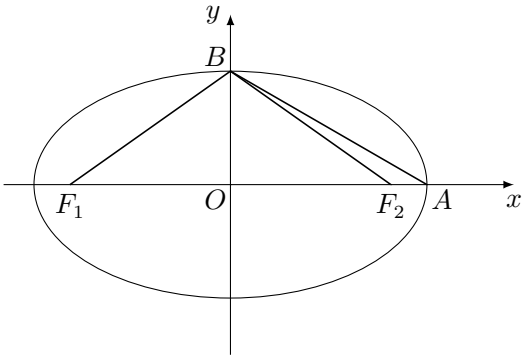
9. 在椭圆中，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点，F_1, F_2 为两个焦点．若

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0,$$

求 $\tan\angle ABF_1\cdot\tan\angle ABF_2$ 的值．

解析: $-\dfrac{1}{5}$.

设 A 为右顶点，B 为上顶点，F_1, F_2 分别为左、右焦点，O 为 F_1F_2 的中点．



根据极化恒等式，有

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0\iff\left(AO^2-\frac{1}{4}F_1F_2^2\right)+\left(BO^2-\frac{1}{4}F_1F_2^2\right)=0,$$

因此 $OA^2+OB^2=2OF^2$，又 $OB^2+OF^2=OA^2$，因此

$$OA:OB:OF=\sqrt{3}:1:\sqrt{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\tan\angle ABF_1\cdot\tan\angle ABF_2&=\tan\left(\angle ABO+\angle OBF_1\right)\cdot\tan\left(\angle ABO-\angle OBF_1\right)\\&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\\&=-\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

10. 设正实数 a, b, c 满足

$$a^2+4b^2+9c^2=4b+12c-2,$$

求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$ 的最小值．

解析：　6.

根据题意，有

$$a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2=3,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} &\geqslant \frac{(1+2+3)^2}{a+2b+3c}\\ &=\frac{36}{a+(2b-1)+(3c-2)+3}\\ &\geqslant \frac{36}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2}+3}\\ &=6,\end{aligned}$$

等号当 $a=b=c=1$ 时取得，因此所求最小值为 6.

11. 设数列 a_n 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),n=1,2,\cdots.$$

证明：存在无穷多个正整数 m，使得 $a_{m+4}a_m-1$ 是完全平方数.

解析：　.

根据求数列通项的特征根法，有

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,n\in\mathbb{N}^*,$$

且 $a_1=a_2=1$. 观察数列 $\{a_n\}$ 的通项

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

尝试证明

$$a_{k+2}^2-a_ka_{k+4}=(-1)^k.$$

注意到 $a_3^2-a_1a_5=-1$，只需要证明

$$a_{k+4}^2-a_{k+2}a_{k+6}=(-1)(a_{k+2}^2-a_ka_{k+4}),$$

也即

$$\frac{a_{k+6}+a_{k+2}}{a_{k+4}}=\frac{a_{k+4}+a_k}{a_{k+2}},$$

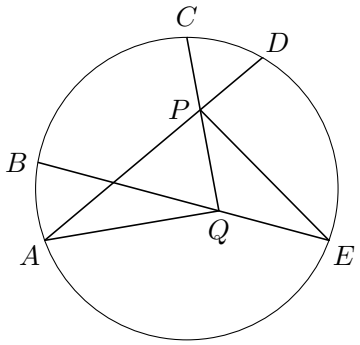
而

$$a_{k+4}=a_{k+3}+a_{k+2}=2a_{k+2}+a_{k+1}=3a_{k+2}-a_k\implies\frac{a_{k+4}+a_k}{a_{k+2}}=3,$$

因此命题得证. 综上所述，对于所有正奇数 m，都有 $a_{m+4}a_m-1=a_{m+2}^2$ 为完全平方数.

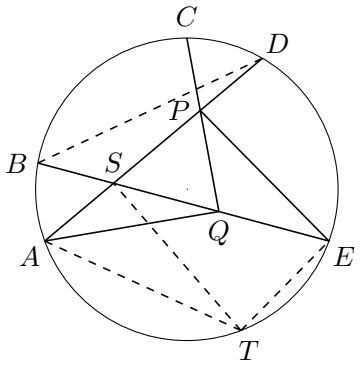
2020 年全国高中数学联赛二试**答案** (B 卷)

一、 如图，A,B,C,D,E 是圆 Ω 上顺次的五点，满足 $ABC=BCD=CDE$，点 P,Q 分别在线段 AD,BE 上，且 P 在线段 CQ 上．证明：$\angle PAQ=\angle PEQ$.



解析： .

设 AD 与 BE 交于点 S，CQ 的延长线交圆 Ω 于 T.



注意到 $ABC=BCD=CDE$，因此 AB,CD 所对的圆周角相等，设为 α，BC,DE 所对的圆周角相等，设为 β．于是

$$\angle ATQ=\angle ATC=\alpha+\beta,$$

$$\angle PTE=\angle CTE=\alpha+beta,$$

$$\angle PSQ=\angle BDA+\angle DBE=\alpha+\beta.$$

由 $\angle ATQ=\angle PSQ$ 可得 S,A,T,Q 四点共圆，由 $\angle PTE=\angle PSQ$ 可得 P,S,T,E 四点共圆．所以

$$\angle PAQ=\angle PTS=\angle PEQ.$$

二、 设集合 $A=\{1,2,\cdots,19\}$. 是否存在集合 A 的非空子集 S_1,S_2，满足 ① $S_1\cap S_2=\varnothing$，$S_1\cup S_2=A$；② S_1,S_2 都至少有 4 个元素；③ S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积？证明你的结论.

解析: .

A 中所有元素之和为 190，而 $6!=720$，因此 S_2 中至多有 5 个元素. 验证

$$\{1,2,3,5,6\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,5\},$$

可知不存在符合题意的 5 元集合 S_2. 考虑 4 元集合 $S_2=\{a,b,x,y\}$，且 $a<b<x<y$，则

$$a+b+x+y+abxy=190,\iff (abx+1)(aby+1)=ab(190-a-b)+1,$$

讨论如下

a	b	方程	(x,y)
1	2	$(2x+1)(2y+1)=3\cdot 5^2$	$(7,12)$
1	3	$(3x+1)(3y+1)=13\cdot 43$	$(4,14)$
1	4	$(4x+1)(4y+1)=3\cdot 13\cdot 19$	无解
2	3	$(6x+1)(6y+1)=11\cdot 101$	无解

其他情形下 $abxy>190$，无解. 因此存在符合题意的 S_1,S_2，所有的 $S_2=\{1,2,7,12\}$ 或 $\{1,3,4,14\}$，$S_1=A\setminus S_2$.

三、 给定整数 $n\geqslant 2$. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n>0$，满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

且对任意 i,j（$1\leqslant i<j\leqslant n$）均有 $a_ia_j\geqslant b_i+b_j$. 求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的最小值.

解析: .

设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i+b_j)=(n-1)S,$$

又

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{a_i^2+a_j^2}{2}=\frac{n-1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

于是

$$S^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\geqslant\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\sum_{1\leqslant j<j\leqslant n}a_ia_j\geqslant 2nS,$$

从而 $S\geqslant 2n$，又当 $a_i=b_i=2$（$i=1,2,\cdots,n$）时，有 $S=2n$，因此所求最小值为 $2n$.

四、 设 a,b 为不超过 12 的正整数，满足：存在常数 C，使得 $a^n+b^{n+9}\equiv C \pmod{13}$ 对任意正整数 n 成立．求所有满足条件的有序数对 (a,b)．

解析： .

根据题意，对任意正整数 n，有

$$a^n+b^{n+9}\equiv a^{n+3}+b^{n+12} \pmod{13}.$$

注意到 13 为素数，a,b 均与 13 互素，由费马小定理，可得

$$a^{12}\equiv b^{12}\equiv 1 \pmod{13}.$$

因此取 $n=12$，化简可得

$$1+b^9\equiv a^3+1 \pmod{13},$$

故

$$b^9\equiv a^3 \pmod{13},$$

代入可得

$$a^n+a^3b^n\equiv a^{n+3}+b^{n+12}\equiv a^{n+3}+b^n \pmod{13},$$

即

$$(a^n-b^n)(1-a^3)\equiv 0 \pmod{13}.$$

情形一 $a^3\equiv 1 \pmod{13}$，此时

$$b^3\equiv a^3b^3\equiv b^{12}\equiv 1 \pmod{13},$$

又 $a,b\in\{1,2,\cdots,12\}$，经检验可知 $a,b\in\{1,3,9\}$．此时

$$a^n+b^{n+9}\equiv a^n+b^n \pmod{13},$$

由条件知

$$a+b\equiv a^3+b^3\equiv 3 \pmod{13},$$

从而 $a=b=1$，经检验，$(a,b)=(1,1)$ 符合题意．情形二 $a^3\not\equiv 1 \pmod{13}$，则对任意正整数 n，有

$$a^n\equiv b^n \pmod{13},$$

特别地，有 $a\equiv b \pmod{13}$，故 $a=b$，从而

$$a^3\equiv b^9=a^9 \pmod{13} \iff a^3(a^3-1)(a^3+1)\equiv 0 \pmod{13},$$

故

$$a^3\equiv -1 \pmod{13} \implies a=4,10,12.$$

经检验，当 $(a,b)=(4,4),(10,10),(12,12)$ 时，对任意正整数 n 有

$$a^n+b^{n+9}=a^n+a^{n+9}=a^n\left(1+(a^3)^3\right)\equiv 0 \pmod{13},$$

满足条件．综上所述，所有满足题意的有序数对 (a,b) 为 $(1,1),(4,4),(10,10),(12,12)$．