2020 年全国高中数学联赛一试**答案** (A 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_9=13,a_{13}=1$, 则 $\log_{a_1} 13$ 的值为____.

   解析: $\dfrac{1}{3}$.

   由等比数列的性质知道 $\dfrac{a_1}{a_9}=\left(\dfrac{a_9}{a_{13}}\right)^2$, 故 $a_1=\dfrac{a_9^3}{a_{13}^2}=13^3$. 所以 $\log_{a_1} 13=\dfrac{1}{3}$.

2. 在椭圆 Γ 中，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点，F_1,F_2 为两个焦点，若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$, 则 $\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为____.

   解析: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   不妨设 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$A(a,0),B(0,b),F_1(-c,0),F_2(c,0)$, 其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$. 由条件可知

   $$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+\left(-c^2+b^2\right)=a^2+b^2-2c^2=0,$$

   所以 $\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 设 $a>0$，函数 $f(x)=x+\dfrac{100}{x}$ 在区间 $(0,a]$ 上的最小值为 m_1，在区间 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_2，若 $m_1m_2=2020$，则 a 的值为____.

   解析: 1 或 100.

   注意到 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上单调递减, 在 $[10,+\infty)$ 上单调递增. 当 $a\in(0,10]$ 时,$m_1=f(a),m_2=f(10)$; 当 $a\in[10,+\infty)$ 时,$m_1=f(10),m_2=f(a)$. 因此总有 $f(a)f(10)=m_1m_2=2020$.

   即 $a+\dfrac{10}{a}=\dfrac{2020}{20}=101$, 解得 $a=1$ 或 $a=100$.

4. 设 z 为复数，若 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$ 为实数（i 为虚数单位），则 $|z+3|$ 的最小值为____.

   解析: $\sqrt{5}$.

   解法 1: 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$, 由条件可知

   $$\mathrm{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right)=\frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2}=0,$$

故 $a+2b=2$. 从而

$$\sqrt{5}\,|z+3|=\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left((a+3)^2+b^2\right)}\geqslant|a+3+2b|=5,$$

即 $|z+3|\geqslant\sqrt{5}$. 当 $a=-2,b=2$ 时,$|z+3|$ 取到最小值 $\sqrt{5}$.

解法 2: 由 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbb{R}$ 及复数出发的几何意义, 可知复平面中 z 所对应的点在 2 与 i 所对应的点的连线上 (i 所对应的点除外), 故 $|z+3|$ 的最小值即为平面直角坐标系 xOy 中的点 $(-3,0)$ 到直线 $x+2y-2=0$ 的距离, 即 $\dfrac{|-3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$BC=4$，边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$，则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为____.

解析: $\dfrac{211}{256}$.

记 M 为 AC 的中点, 由中线长公式可得 $4BM^2+AC^2=2\left(AB^2+BC^2\right)$,

可得 $AC=8$.

在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理，可得

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{7}{8},$$

而

$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2A\\&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2A\\&=\frac{211}{256}.\end{aligned}$$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为 1，L,M,N 分别为棱 PA,PB,PC 的中点，则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为____.

解析: $\dfrac{\pi}{3}$.

将正三棱锥 $P-ABC$ 补形为棱长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方体，每条棱均为正方体的面对角线，可得正三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径

$$R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4},$$

正三棱锥的高

$$H=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

因此其外接球球心到平面 LMN 的距离

$$h=\left|\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right|=\frac{\sqrt{6}}{12},$$

从而所求截面面积为 $\pi(R^2-h^2)=\dfrac{\pi}{3}$.

7. 设 $a,b>0$，满足关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3=b$，则 $a+b$ 的值为____.

解析： 144.

令 $t=\dfrac{a}{2}$, 则关于 t 的方程 $\sqrt{\left|t-\dfrac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\dfrac{a}{2}\right|}=b$ 恰有三个不同的实数解 $t_i=x_i+\dfrac{a}{2}(i=1,2,3)$.

由于 $f(t)=\sqrt{\left|t-\dfrac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\dfrac{a}{2}\right|}$ 为偶函数, 故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于数轴原点对称分布, 从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$. 以下求 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解.

当 $|t|\leqslant\dfrac{a}{2}$ 时,$f(t)=\sqrt{\dfrac{a}{2}-t}+\sqrt{\dfrac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\leqslant 2a$, 等号成立当且仅当 $t=0$; 当 $t>\dfrac{a}{2}$ 时,$f(t)$ 单调递增, 且当 $t=\dfrac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$; 当 $t<-\dfrac{a}{2}$ 时,$f(t)$ 单调递减, 且当 $t=-\dfrac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$.

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解 $t_1=-\dfrac{5}{8}a$,$t_2=0$, $t_3=\dfrac{5}{8}a$.

由条件可知 $b=x_3=t_3-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{8}$, 结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$.

于是 $a+b=\dfrac{9a}{8}=144$.

8. 现有 10 张卡片，每张卡片上写有 $1,2,3,4,5$ 中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同．将这 10 张卡片放入标号为 $1,2,3,4,5$ 的五个盒子中，规定写有 i,j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中．一种方法称为“好的”，如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数，则“好的”放法共有____ 种.

解析： 120.

用 (i,j) 表示写有 i,j 的卡片，则这 10 张卡片为 (i,j)（$1\leqslant i<j\leqslant 5$）．考虑“好的”放法．五个盒子一共放有 10 张卡片，故 1 号盒至少有 3 张卡片，能放入 1 号盒的卡片只有 $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)$.

情形一 4 张卡片都在 1 号盒，此时其余每个盒中已经不可能达到 4 张卡片，故剩下的 6 张卡片无论如何放置都符合要求，有 $2^6=64$ 种放法.

情形二 4 张卡片中有 3 张在 1 号盒,且其余每盒最多仅有 2 张卡片.考虑 $(1,2),(1,3,)(1,4)$

在 1 号盒，且 $(1,5)$ 在 5 号盒的放法数 N，根据对称性，情形二的所有放法数为 $4N$. 卡片 $(2,3),(2,4),(3,4)$ 的放法有两类，在 $2,3,4$ 号盒中的某一个中放两张，或者在 $2,3,4$ 号盒中各放一张. 分类讨论可得放法数为

$$N=6\cdot 1+2\cdot 4=14,$$

因此情形二共有 $4N=56$ 种放法.
综上，“好的”放法数共有 $64+56=120$ 种.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\cos B+\sqrt{2}\cos C$ 的取值范围.

解析: $(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.
根据题意，$A=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $A=\dfrac{3\pi}{4}$. 情形一: $A=\dfrac{\pi}{4}$. 此时

$$\begin{aligned}\cos B+\sqrt{2}\cos C&=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)+2\sqrt{2}\cos C\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C\\&=\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

其中 $C\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，从而题中代数式的取值范围是 $(0,1]$. 情形二:$A=\dfrac{3\pi}{4}$. 此时

$$\begin{aligned}\cos B+\sqrt{2}\cos C&=\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)+2\sqrt{2}\cos C\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C\\&=\sqrt{5}\sin(C+\arctan 3),\end{aligned}$$

其中 $C\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，从而题中代数式的取值范围是 $(0,\sqrt{5}]$. 综上所述，所求代数式的取值范围是 $(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.

10. 对正整数 n 及实数 x（$0\leqslant x<n$），定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot\binom{[x]}{n}+\{x\}\cdot\binom{[x]+1}{n},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$. 若整数 $m,n\geqslant 2$ 满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求 $f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$ 的值.

解析： 74.

对 $k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}f\left(m,k+\frac{i}{n}\right)=\binom{m}{k}\cdot\sum_{i=1}^{n=1}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\binom{m}{k+1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}=\frac{n-1}{2}\cdot\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1},$$

于是

$$\begin{aligned}g(m,n)&=f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j}+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(m,k+\frac{i}{n}\right)\\&=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k+1}\right)\\&=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot 2^m-1+2^m-1\\&=(2^m-1)n-1,\end{aligned}$$

根据题意，有

$$(2^m-1)n-1=123\iff(2^m-1)n=2^2\cdot 31,$$

于是 $m=5$，$n=4$，从而

$$\begin{aligned}f\left(n,\frac{1}{m}\right)+f\left(n,\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)&=g(n,m)\\&=(2^n-1)m-1\\&=(2^4-1)\cdot 5-1\\&=74.\end{aligned}$$

11. 在平面直角坐标系中，点 A,B,C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形．求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

解析： $3\sqrt{3}$.

设 $A\left(a,\dfrac{1}{a}\right)$，平移坐标系使 A 为原点，此时双曲线方程为

$$H':(x+a)\left(x+\frac{1}{a}\right)=1\iff xy+\frac{1}{a}x+ay=0,$$

设 $B'(\theta:r)$，$C'\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}:r\right)$，其中 $r>0$，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}r^2$．根据题意，有

$$\begin{cases}r^2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{r\cos\theta}{a}+ar\sin\theta=0,\\-r^2\sin\theta\cos\theta-\dfrac{r\sin\theta}{a}+ar\cos\theta=0,\end{cases}$$

于是

$$r=\frac{-a\sin\theta-\dfrac{1}{a}\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{a\cos\theta-\dfrac{1}{a}\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta},$$

从而可得

$$a^2=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta},$$

因此

$$r^2=\frac{a^2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{a^2}\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{a^2\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{a^2}\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta},$$

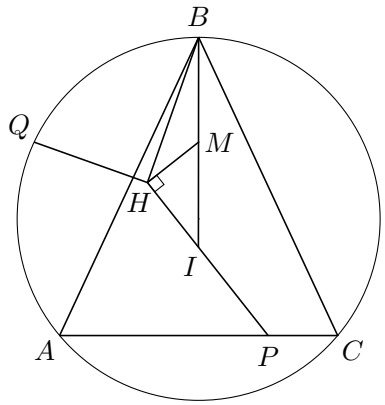
进而

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}r^2\\&=\frac{a^2+\dfrac{1}{a^2}}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{2}{\sin^2 2\theta\cos 2\theta}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\cos^2 2\theta)^2\cdot 2\cos^2 2\theta}}\\&\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3}}=3\sqrt{3},\end{aligned}$$

等号当 $\cos^2 2\theta=\dfrac{1}{3}$ 时取得，因此所求面积的最小值为 $3\sqrt{3}$.

2020 年全国高中数学联赛二试**答案** (A 卷)

一、 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，I 为内心，M 为 BI 的中点，P 为边 AC 上一点，满足 $AP=3PC$，PI 延长线上一点 H 满足 $MH\perp PH$，Q 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上劣弧 AB 的中点．证明：$BH\perp QH$．



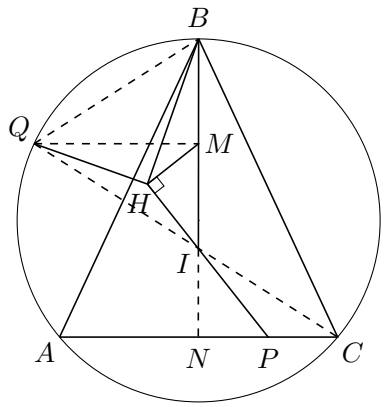
解析:

取 AC 的中点 N.由 $AP=3PC$,可知 P 为 NC 的中点.易知 B,I,N 共线,$\angle INC=90^\circ$.

由 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，可知 CI 经过点 Q，且

$$\angle QIB=\angle IBC+\angle ICB=\angle ABI+\angle ACQ=\angle ABI+\angle ABQ=\angle QBI,$$

又 M 为 BI 的中点，所以 $QM\perp BI$，进而 $QM\parallel CN$．



考虑 $\triangle HMQ$ 和 $\triangle HIB$．由于 $MH \perp PH$，故

$$\angle HMQ = 90^\circ - \angle HMI = \angle HIB.$$

又 $\angle IHM = \angle INP = 90^\circ$，故 $\dfrac{HM}{HI} = \dfrac{NP}{NI}$，于是

$$\frac{HM}{HI} = \frac{NP}{NI} = \frac{1}{2}\cdot\frac{NC}{NI} = \frac{1}{2}\cdot\frac{MQ}{MI} = \frac{MQ}{IB},$$

所以 $\triangle HMQ \sim \triangle HIB$，得 $\angle HQM = \angle HBI$．从而 H, M, B, Q 四点共圆，于是有

$$\angle BHQ = \angle BMQ = 90^\circ,$$

即 $BH \perp QH$．

二、 给定整数 $n \geqslant 3$，设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数，满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} > 0,$$

且对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$，有 $a_i a_{i+2} \geqslant b_i + b_{i+1}$（这里 $a_{2n+1} = a_1$，$a_{2n+2} = a_2$，$b_{2n+1} = b_1$），求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ 的最小值．

解析:

在两组数之和相等的情况下由条件 $a_i a_{i+2} \geqslant b_i + b_{i+1}$ 可以猜想两种情形：$2 \cdot 2 = 2 + 2$ 以及 $0 \cdot 0 = 0 + 0$．记

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n} b_k = S, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = T,$$

不妨设 $T \leqslant \dfrac{1}{2}S$．情形一 $n = 3$．取 $a_i = b_i = 2$（$i = 1, 2, \cdots, 2n$），可得 $S = 12$．而

$$T^2 - 3(a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1) = \frac{1}{2}\left((a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_5)^2 + (a_5 - a_1)^2\right) \geqslant 0,$$

于是

$$\frac{S^2}{4} \geqslant T^2 \geqslant 3(a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1) \geqslant 3\sum_{k=1}^{6} b_k = 3S \implies S \geqslant 12,$$

因此 S 的最小值为 12．情形二 $n \geqslant 4$．此时若 n 为偶数，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}a_{2k+1} \leqslant (a_1 + a_5 + \cdots + a_{2n-3})(a_3 + a_7 + \cdots + a_{2n-1}) \leqslant \frac{T^2}{4},$$

若 n 为奇数，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}a_{2k+1} &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1}a_{2k+1}\right) + a_{2n-1}a_3 \\ &\leqslant (a_1 + a_5 + \cdots + a_{2n-1})(a_3 + a_7 + \cdots + a_{2n-3}) \\ &\leqslant \frac{T^2}{4},\end{aligned}$$

于是

$$S\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leqslant\frac{T^2}{4}\leqslant\frac{S^2}{16}\implies S\geqslant 16,$$

取

k	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n$
a_k	4	4	4	4	0	0	$\cdots$	0
b_k	0	16	0	0	0	0	$\cdots$	0

可得 $S=16$. 因此 S 的最小值为 16. 综上所述，当 $n=3$ 时，S 的最小值为 12；当 $n\geqslant 4$ 时，S 的最小值为 16.

三、 设 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，$n=3,4,\cdots$. 证明：对整数 $n\geqslant 5$，a_n 必有一个模 4 余 1 的素因子.

解析:

记 $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$，则

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n),$$

构造

$$b_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha+\beta}=\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n),$$

则

$$b_n=2b_{n-1}+b_{n-2},n\in\mathbb{Z},$$

且 $b_1=1$，$b_2=3$. 易知 $b_n\in\mathbb{Z}$ 且

$$b_n^2-2a_n^2=\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{2}\right)^2=(\alpha\beta)^n=(-1)^n,\quad n\geqslant 1.$$

给出引理：[[sol]] 引理 [[/sol]] 若正整数 m,n 满足 $m\mid n$，则 $a_m\mid a_n$. [[sol]] 引理的证明 [[/sol]] 设 $n=km$，其中 $k\in\mathbb{N}^*$，则

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_m}&=\frac{\alpha^{km}-\beta^{km}}{\alpha^m-\beta^m}\\&=\sum_{i=0}^{k}(\alpha^m)^{k-i}(\beta^m)^i\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\left((\alpha^m)^{k-i}(\beta^m)^i+(\alpha^m)^i(\beta^m)^{k-i}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left((\alpha\beta)^{mi}\left(\alpha^{m(k-2i)}+\beta^{m(k-2i)}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{mi}\cdot 2b_{m(k-2i)}\right)\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

于是 $a_m \mid a_n$．情形一 n 的最大奇数约数为 1．此时 $n = 2^l$（$l \geqslant 3$），由于

$$a_8 = 408 = 24 \cdot 17, \quad 17 \equiv 1 \pmod 4,$$

于是由 $a_8 \mid a_n$ 可得 a_n 有素因子 17．情形二 n 的最大奇数约数 m 不小于 3．此时有 $a_m \mid a_n$，只需要考虑 a_m 有一个模 4 余 1 的素因子．由 a_1 为奇数推得 a_m 为不小于 5 的奇数，因此 a_m 有素因子 p．从而

$$b_m^2 - 2a_m^2 = (-1)^m \implies b_m^2 \equiv -1 \pmod p \implies b_n^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p,$$

又 $(p, b_m) = 1$，由费马小定理可得 $b_m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，从而

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \implies (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \implies p \equiv 1 \pmod 4.$$

综上所述，命题得证．

四、 给定凸 20 边形 P．用 P 的 17 条在内部不相交的对角线将 P 分割成 18 个三角形．所得图形称为 P 的一个三角剖分图．对 P 的任意一个三角剖分图 T，P 的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为 T 的边．T 的任意 10 条两两无公共端点的边的集合称为 T 的一个完美匹配．当 T 取遍 P 的所有三角剖分图时，求 T 的完美匹配个数的最大值．

解析:

将 20 边形换成 $2n$ 边形，考虑一般的问题．

对凸 $2n$ 边形 P 的一条对角线，若其两侧各有奇数个 P 的顶点，称其为奇弦，否则称为偶弦．首先注意下述基本事实：

引理一: 对 P 的任意三角剖分图 T, T 的完美匹配不含奇弦．

引理一的证明: 如果完美匹配中有一条奇弦 e_1，因为 T 的一个完美匹配给出了 P 的顶点集的一个配对划分，而 e_1 两侧各有奇数个顶点，故该完美匹配中必有 T 的另一条边 e_1，端点分别在 e_1 的两侧，又 P 是凸多边形，故 e_1 与 e 在 P 的内部相交，这与 T 是三角剖分图矛盾．记 $f(T)$ 为 T 的完美匹配的个数．设 $F_1 = 1$，$F_2 = 2$，对 $k \geqslant 2$，$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ 是 Fibonacci 数列．下面对 n 归纳证明：

引理二: 若 T 是凸 $2n$ 边形的任意一个三角剖分图，则 $f(T) \leqslant F_n$．

引理二的证明: 设 $P = A_1A_2 \cdots A_{2n}$ 是凸 $2n$ 边形．从 P 的 $2n$ 条边中选 n 条边构成完美匹配,恰有两种方法,$A_1A_2, A_1A_4, \cdots, A_{2n-1}A_{2n}$ 或 $A_2A_3, A_4A_5, \cdots, A_{2n-2}A_{2n-1}, A_{2n}A_1$．

当 $n = 2$ 时，凸四边形 P 的三角剖分图 T 没有偶弦，因此 T 的完美匹配只能用 P 的边，故 $f(T) = 2 = F_2$．当 $n = 3$ 时，凸六边形 P 的三角剖分图 T 至多有一条偶弦．若 T 没有偶弦，同上可知 $f(T) = 2$．若 T 含有偶弦，不妨设是 A_1A_4，选用 A_1A_4 的完美匹配是唯一的，另两条边只能是 A_2A_3, A_3A_6，此时 $f(T) = 3$．总之 $f(T) \leqslant 3 = F_3$．结论在 $n = 2, 3$ 时成立．

假设 $n \geqslant 4$，且结论在小于 n 时均成立．考虑凸 $2n$ 边形 $P = A_1A_2 \cdots A_{2n}$ 的一个三

角剖分图 T．若 T 没有偶弦，则同上可知 $f(T)=2$．对于偶弦 e，记 e 两侧中 P 的顶点个数的较小值为 $w(e)$，若 T 含有偶弦，取其中一条偶弦 e 使 $w(e)$ 达到最小．设 $w(e)=2k$，不妨设 e 为 $A_{2n}A_{2k+1}$，则每个 A_i（$i=1,2,\cdots,2k$）不能引出偶弦．

事实上，假设 A_iA_j 是偶弦，若 $j\in\{2k+2,2k+3,\cdots,2n-1\}$，则 A_iA_j 与 e 在 P 的内部相交，矛盾．若 $j\in\{1,2,\cdots,2k+1,2n\}$，则 $w\left(A_iA_j\right)<2k$，与 $w(e)$ 的最小性矛盾．又完美匹配中没有奇弦，故 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k}$ 只能与其相邻顶点配对，特别地，A_1 只能与 A_2 或 A_{2n} 配对．下面分两种情况．

情形一选用边 A_1A_2．则必须选用边 $A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$．注意到 $A_{2n}A_{2k+1}$ 的两侧分别有 $2k,2n-2k-2$ 个顶点，$2n-2k-2\geqslant w\left(A_{2n}A_{2k+1}\right)=2k$，而 $n\geqslant 4$，因此 $2n-2k\geqslant 6$．在凸 $2n-2k$ 边形 $P_1=A_{2k+1}A_{2k+2}\cdots A_{2n}$ 上，T 的边给出了 P_1 的三角剖分图 T_1，在 T 中再选取 $n-k$ 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$，与 $A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$ 一起构成 T 的完美匹配，当且仅当 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$ 是 T_1 的完美匹配．故情形一中的 T 的完美匹配个数等于 $f\left(T_1\right)$．

情形二选用边 A_1A_{2n}．则必须选用边 $A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$．在凸 $2n-2k-2$ 边形 $P_2=A_{2k+2}A_{2k+3}\cdots A_{2n-1}$ 中构造如下的三角剖分图 T_2：对 $2k+2\leqslant i<j\leqslant 2n-1$，若线段 A_iA_j 是 T 的边，则也将其作为 T_2 的边，由于这些边在内部互不相交，因此可再适当地添加一些 P_2 的对角线，得到一个 P_2 的三角剖分图 T_2，它包含了 T 的所有在顶点 $A_{2k+2},A_{2k+3},\cdots,A_{2n-1}$ 之间的边．因此每个包含边 $A_{2n}A_1,A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$ 的 T 的完美匹配，其余的边必定是 T_2 的完美匹配．故情形二中的 T 的完美匹配个数不超过 $f\left(T_2\right)$．

由归纳假设得

$$f\left(T_1\right)\leqslant F_{n-k},\quad f\left(T_2\right)\leqslant F_{n-k-1},$$

结合上面两种情形以及 $k\geqslant 1$，有

$$f(T)\leqslant f\left(T_1\right)+f\left(T_2\right)\leqslant F_{n-k}+F_{n-k-1}=F_{n-k+1}\leqslant F_n.$$

下面说明等号可以取得．考虑凸 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的三角剖分图 Δ_n：添加对角线 $A_2A_{2n},A_{2n}A_3,A_3A_{2n-1},A_{2n-1}A_4,A_4A_{2n-2},\cdots,A_{n+3}A_n,A_nA_{n+2}$．重复前面的论证过程，有

$$f\left(\Delta_2\right)=2,f\left(\Delta_3\right)=3.$$

对 Δ_n，$n\geqslant 4$，考虑偶弦 A_nA_3．情形一，用 A_1A_2，由于在凸 $2n-2$ 边形 $A_3A_4\cdots A_{2\pi}$ 中的三角剖分图恰是 Δ_{n-1}，此时有 $f\left(\Delta_{n-1}\right)$ 个 T 的完美匹配．情形二，用 A_1A_{2n}，由于在凸 $2n-4$ 边形 $A_4A_5\cdots A_{2n-1}$ 中 T 的边恰构成三角剖分图 Δ_{n-2}，不用添加任何对角线，故这一情形下 T 的完美匹配个数恰为 $f\left(\Delta_{n-2}\right)$．从而对 $n\geqslant 4$，有

$$f\left(\Delta_n\right)=f\left(\Delta_{n-1}\right)+f\left(\Delta_{n-2}\right).$$

由数学归纳法即得 $f(\Delta_n) = F_n$．结论得证．因此，对凸 20 边形 P，$f(T)$ 的最大值等于 $F_{10} = 89$.