2019 年全国高中数学联赛一试**答案** (B 卷)

一、 **填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.**

1. 已知实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为_____.

   解析 -3.

   条件等价于 $1,2,3,x$ 中除最大数以外的另三个数之和为 0. 显然 $x<0$，从而 $1+2+x=0$，得 $x=-3$.

2. 若平面向量 $\vec{a}=(2^m,-1)$ 与 $\vec{b}=(2^m-1,2^{m+1})$ 垂直，其中 m 为实数，则 $\vec{a}$ 的模为_____.

   解析 $\sqrt{10}$.

   令 $2^m=t$，则 $t>0$. 条件等价于 $t\cdot(t-1)+(-1)\cdot 2t=0$，解得 $t=3$. 因此 $\vec{a}$ 的模为 $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

3. 设 $\alpha,\beta\in(0,\pi),\cos\alpha,\cos\beta$ 是方程 $5x^2-3x-1=0$ 的两根，则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的值为_____.

   解析 $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

   由条件知 $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5},\cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{5}$，从而 $(\sin\alpha\sin\beta)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

   $=(1+\cos\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2=(\dfrac{4}{5})^2-(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{7}{25}$.

   又由 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 知 $\sin\alpha\sin\beta>0$，从而 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

4. 设三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA=PB=3,AB=BC=CA=2$，则该三棱锥的体积的最大值为_____.

   解析 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

   设三棱锥 $P-ABC$ 的高为 h. 取 M 为棱 AB 的中点，则 $h\leqslant PM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$. 当平面 PAB 垂直于平面 ABC 时，h 取到最大值 $2\sqrt{2}$. 此时三棱锥 $P-ABC$ 的体积取到最大值 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot 2\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

5. 将 5 个数 $2,0,1,9,2019$ 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为_____.

   解析 95.

   易知 $2,0,1,9,2019$ 的所有不以 0 为开头的排列共有 $4\times 4!=96$ 个，其中，除了

$(2,0,1,9,2019)$ 和 $(2019,2,0,1,9)$ 这两种排列对应同一个数 20192019，其余的数互不相等，因此满足条件的 8 位数的个数为 $96-1=95$.

6. 设整数 $n>4,(x+2\sqrt{y}-1)^n$ 的展开式中 x^{n-4} 与 xy 两项的系数相等，则 n 的值为_____.

解析　51.

注意到 $(x+2\sqrt{y}-1)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r x^{n-r}(2\sqrt{y}-1)^r$.

其中 x^{n-4} 项仅出现在求和指标 $r=4$ 时的展开式 $C_n^4x^{n-4}(2\sqrt{y}-1)^4$ 中，其 x^{n-4} 项系数为 $(-1)^4C_n^4=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

而 xy 项仅出现在求和指标 $r=n-1$ 时的展开式 $C_n^{n-1}x(2\sqrt{y}-1)^{n-1}$ 中，其 xy 项系数为 $C_n^{n-1}C_{n-2}^2 4\cdot(-1)^{n-3}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$.

因此有 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$. 注意到 $n>4$，化简得 $n-3=(-1)^{n-3}48$，故只能是 n 为奇数且 $n-3=48$. 解得 $n=51$.

7. 在平面直角坐标系中，若以 $(r+1,0)$ 为圆心，r 为半径的圆上存在一点 (a,b) 满足 $b^2\geqslant 4a$，则 r 的最小值为_____.

解析　4.

由条件知 $(a-r-1)^2+b^2=r^2$，故 $4a\leqslant b^2=r^2-(a-r-1)^2=2r(a-1)-(a-1)^2$.

即 $a^2-2(r-1)a+2r+1\leqslant 0$.

上述关于 a 的一元二次不等式有解，故判别式 $(2(r-1))^2-4(2r+1)=4r(r-4)\geqslant 0$，解得 $r\geqslant 4$.

经检验，当 $r=4$ 时，$(a,b)=(3,2\sqrt{3})$ 满足条件. 因此 r 的最小值为 4.

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，首项 $a_1=2019$，且对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$. 这样的数列 $\{a_n\}$ 的个数为_____.

解析　5.

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由条件知 $a_1+a_2=a_k$（k 是某个正整数），则 $2a_1+d=a_1+(k-1)d$，即 $(k-2)d=a_1$，因此必有 $k\neq 2$，且 $d=\dfrac{a_1}{k-2}$，这样就有 $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+\dfrac{n-1}{k-2}a_1$，而此时对任意正整数 n，

$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=a_1+(n-1)a_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=a_1+\left((n-1)(k-2)+\dfrac{n(n-1)}{2}\right)d$

确实为 $\{a_n\}$ 中的一项.

因此，仅需考虑使 $k-2|a_1$ 成立的正整数 k 的个数. 注意到 2019 为两个素数 3 与 673 之积，易知 $k-2$ 可取 $-1,1,3,673,2019$ 这 5 个值，对应得到 5 个满足条件的等差数列.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 在椭圆 Γ 中，F 为一个焦点，A,B 为两个顶点．若 $|FA|=3,|FB|=2$，求 $|AB|$ 的所有可能值．

解析

不妨设平面直角坐标系中椭圆 Γ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，并记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．由对称性，可设 F 为 Γ 的右焦点．

易知 F 到 Γ 的左顶点的距离为 $a+c$，到右顶点的距离为 $a-c$，到上，下顶点的距离均为 a．分以下情况讨论：

（1）A,B 分别为左右顶点，，此时 $a+c=3,a-c=2$，故 $|AB|=2a=5$（相应地，$b^2=(a+c)(a-c)=6$，Γ 的方程为 $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{y^2}{6}=1$）

（2）A 为左顶点，B 为上顶点或下顶点，此时 $a+c=3,a=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$（相应的 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$）

（3）A 为上顶点或下顶点，B 为右顶点，此时 $a=3,a-c=2$ 故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=8$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17}$（相应的 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$）

综上可知，$|AB|$ 的所有可能值为 $5,\sqrt{7},\sqrt{17}$．

10. 设 a,b,c 均大于 1，满足 $\begin{cases}\log a+\log_b c=3\\ \log b+\log_a c=4\end{cases}$ 求 $\log a\cdot\log c$ 的最大值．

解析

设 $\log_a=x,\log_b=y,\log_c=z$，由 $a,b,c>1$ 可知 $x,y,z>0$．

由条件及换底公式知 $x+\dfrac{z}{y}=3,y+\dfrac{z}{x}=4$，即 $xy+z=3y=4x$．

由此，令 $x=3t,y=4t(t>0)$，则 $z=4x-xy=12t-12t^2$．其中由 $z>0$ 可知 $t\in(0,1)$．

因此，结合三元平均不等式得

$\log_a\log_c=xz=3t\cdot12t(1-t)=18\cdot t^2(2-2t)\leqslant18\cdot\left(\dfrac{t+t+(2-2t)}{3}\right)^3=18\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{16}{3}$

当 $t=2-2t$，即 $t=\dfrac{2}{3}$（相应的 a,b,c 分别为 $100,10^{\frac{8}{3}},10^{\frac{8}{3}}$）时，$\log_a\log_c$ 取到最大值 $\dfrac{16}{3}$．

11. 设复数数列 $\{z_n\}$ 满足：$|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．证明；对任意正整数 m，均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

解析

归纳地可知 $z_n\neq0(n\in\mathbb{N}^*)$，由条件得 $4\left(\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\left(\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right)+1=0(n\in\mathbb{N}^*)$

解得 $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}(n\in\mathbb{N}^*)$

因此 $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$，故 $|z_n|=|z_1|\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbb{N}^*)$ ①

进而有 $|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}(n\in\mathbb{N}^*)$ ②

当 m 为偶数时，设 $m=2s(s\in\mathbb{N}^*)$．利用 ② 可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\leqslant\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当 m 为奇数时，设 $m=2s+1(s\in\mathbb{N})$．由 ①，② 可知

$$|z_{2s+1}|=\frac{1}{2^s}<\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|$$

故 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|\right)+|z_{2k+1}|<\sum\limits_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，结论获证．

2019 年全国高中数学联赛二试**答案** (B 卷)

一、 设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 满足 $a_i\geqslant a_{101-i}(i=1,2,\cdots,50)$. 记 $x_k=\dfrac{ka_{k+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_k}(k=1,2,\cdots,99)$. 证明：$x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}\leqslant 1$.

解析

注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}>0$. 对 $k=1,2,\cdots,99$，由平均值不等式知 $0<\left(\dfrac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)^k\leqslant\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$

从而有 $x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}=\prod\limits_{k=1}^{99}a_{k+1}^k\left(\dfrac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\right)\leqslant\prod\limits_{k=1}^{99}\dfrac{a_{k+1}^k}{a_1a_2\cdots a_k}$ ①

记 ① 的右端为 T，则对任意 $i=1,2,\cdots,100$，a_i 在 T 的分子中的次数为 $i-1$，在 T 的分母中的次数为 $100-i$. 从而

$T=\prod\limits_{i=1}^{100}a_i^{2i-101}=\prod\limits_{i=1}^{50}a_i^{2i-101}a_{101-i}^{2(101-i)-101}=\prod\limits_{i=1}^{50}\left(\dfrac{a_{101-i}}{a_i}\right)^{101-2i}$

又 $0\leqslant a_{101-i}\leqslant a_i(i=1,2,\cdots,50)$，故 $T\leqslant 1$，结合 ① 得 $x_1x_2^2\cdots x_{99}^{99}\leqslant T\leqslant 1$.

二、 求满足以下条件的所有正整数 n：

（1）n 至少有 4 个正约数；

（2）若 $d_1<d_2<\cdots<d_k$ 是 n 的所有正约数，则 $d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots,d_k-d_{k-1}$ 构成等比数列.

解析

由条件知 $k\geqslant 4$，且 $\dfrac{d_3-d_2}{d_2-d_1}=\dfrac{d_k-d_{k-1}}{d_{k-1}-d_{k-2}}$.

易知 $d_1=1,d_k=n,d_{k-1}=\dfrac{n}{d_2},d_{k-2}=\dfrac{n}{d_3}$，代入上式得

$\dfrac{d_3-d_2}{d_2-1}=\dfrac{n-\frac{n}{d_2}}{\frac{n}{d_2}-\frac{n}{d_3}}$，化简得 $(d_3-d_2)^2=(d_2-1)^2d_3$.

由此可知 d_3 是完全平方数. 由于 $d_2=p$ 是 n 的最小素因子，d_3 是平方数，故只能 $d_3=p^2$.

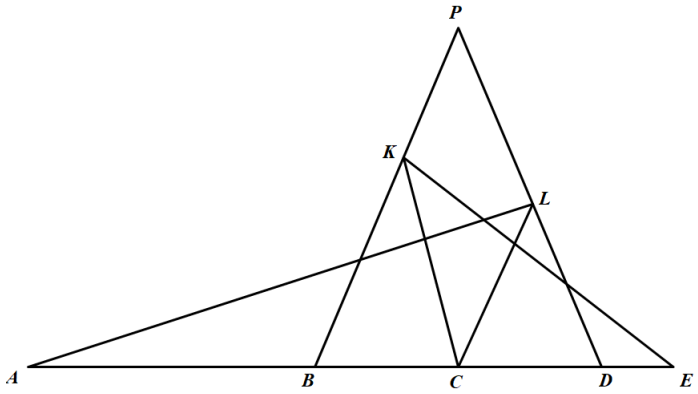
从而序列 $d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots,d_k-d_{k-1}$ 为 $p-1,p^2-p,p^3-p^2,\cdots,p^{k-1}-p^{k-2}$，即 $d_1,d_2,d_3,\cdots,d_k$ 为 $1,p,p^2,\cdots,p^{k-1}$，而此时相应的 n 为 p^{k-1}.

综上可知，满足条件的 n 为所有形如 p^a 的数，其中 p 是素数，整数 $a\geqslant 3$.

三、 如图，点 A,B,C,D,E 在一条直线上顺次排列，满足 $BC=CD=\sqrt{AB\cdot DE}$，点 P 在该直线外，满足 $PB=PD$. 点 K,L 分别在线段 PB,PD 上，满足 KC 平分 $\angle BKE$，

LC 平分 $\angle ALD$.

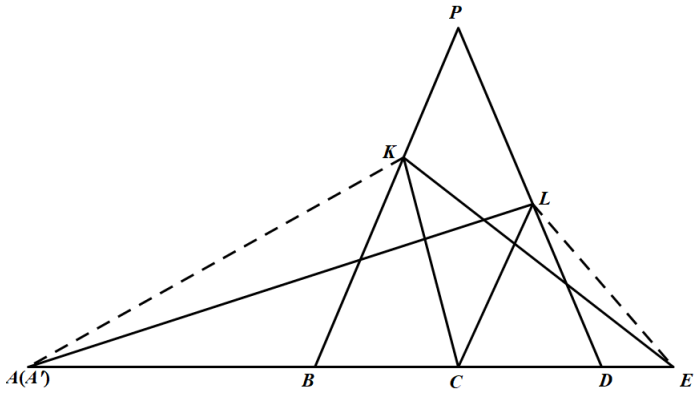
证明：A, K, L, E 四点共圆.



解析

令 $AB=1, BC=CD=t(>0)$，由条件知 $DE=t^2$.

注意到 $\angle BKE<\angle ABK=\angle PDE<180^\circ-\angle DEK$，可在 CB 延长线上取一点 A'，使得 $\angle A'KE=\angle ABK=\angle A'BK$.



此时有 $\triangle A'BK\sim\triangle A'KE$，故 $\dfrac{A'B}{A'K}=\dfrac{A'K}{A'E}=\dfrac{BK}{KE}$.

又 KC 平分 $\angle BKE$，故 $\dfrac{BK}{KE}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{1}{t+t^2}=\dfrac{1}{1+t}$. 于是有

$$\frac{A'B}{A'E}=\frac{A'B}{A'K}\cdot\frac{A'K}{A'E}=\left(\frac{BK}{KE}\right)^2=\frac{1}{1+2t+t^2}=\frac{AB}{AE}.$$

由上式两端减 1，得 $\dfrac{BE}{A'E}=\dfrac{BE}{AE}$，从而 $A'=A$. 因此 $\angle AKE=\angle A'KE=\angle ABK$.

同理可得 $\angle ALE=\angle EDL$.

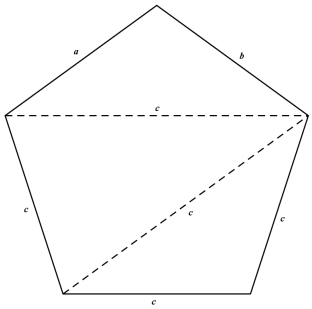
而 $\angle ABK=\angle EDL$，所以 $\angle AKE=\angle ALE$. 因此 A, K, L, E 四点共圆.

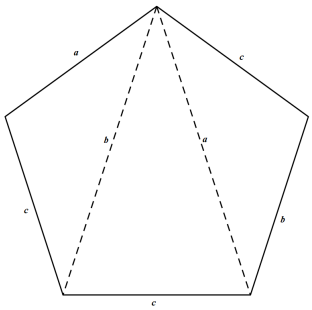
四、 将一个凸 2019 边形的每条边任意染为红，黄，蓝三种颜色之一，每种颜色的边各 673 条．证明：可作这个凸 2019 边形的 2016 条在内部互不相交的对角线将其剖分成 2017 个三角形，并将所作的每条对角线也染为红，黄，蓝三种颜色之一，使得每个三角形的三条边或者颜色全部相同，或者颜色互不相同．

解析

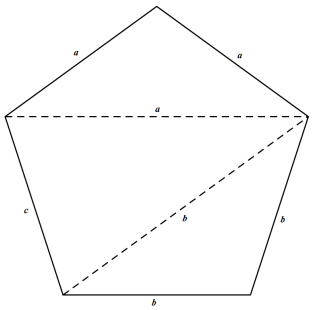
我们对 $n \geqslant 5$ 归纳证明加强的命题：如果将凸 n 边形的边染为三种颜色 a, b, c，并且三种颜色的边均至少有一条，那么可作满足要求的三角形剖分．

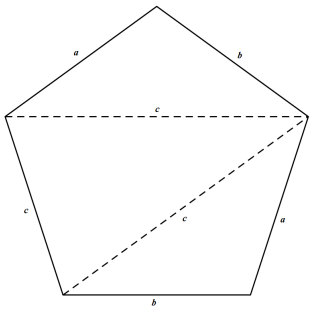
当 $n=5$ 时，若三种颜色的边数为 $1,1,3$，由对称性，只需考虑如下两种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．

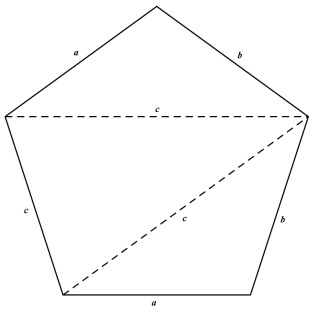




若三种颜色的边数为 $1,2,2$，由对称性，只需考虑如下三种情形，分别可作图中所示的三角形剖分．







假设结论对 $n(n \geqslant 5)$ 成立，考虑 $n+1$ 的情形，将凸 $n+1$ 边形记为 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$.

情形一：有两种颜色的边各只有一条．不妨设 a, b 色边只有一条．由于 $n+1 \geqslant 6$，故存在连续两条边均为 c 色，不妨设是 $A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$．作对角线 A_1A_n，并将 A_1A_n 染为 c 色，则三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

情形二：某种颜色的边只有一条，其余颜色的边均至少两条．不妨设 a 色边只有一条，于是可以选择两条相邻边均不是 a 色，不妨设 $A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ 均不是 a 色，作对角线 A_1A_n，则 A_1A_n 有唯一的染色方式，使得三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色或互不同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

情形三：每种颜色的边均至少两条．作对角线 A_1A_n，则 A_1A_n 有唯一的染色方式，使得三角形 $A_nA_{n+1}A_1$ 的三边全部同色或互不同色．此时凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的三种颜色的边均至少有一条，由归纳假设，可对其作符合要求的三角形剖分．

综合以上 3 种情形，可知 $n+1$ 的情形下结论也成立．

由数学归纳法，结论获证．