2019 年全国高中数学联赛一试**答案** (A 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知正实数 a 满足 $a^a=(9a)^{8a}$，则 $\log_a 3a$ 的值为_____.

   解析 $\dfrac{9}{16}$.

   容易知道 $a\neq 1$，故方程变为 $a=(9a)^8$，$a^{-7}=3^{16}$，取对数可得 $\log_a^3=-\dfrac{7}{16}$.

   故 $\log_a^{3a}=-\dfrac{7}{16}+1=\dfrac{9}{16}$.

2. 若实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素和最小元素之差等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为_____.

   解析 $-\dfrac{3}{2}$.

   容易得到集合中最小元素为 x，且 $x<0$.

   故 $3-x=1+2+3+x$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$.

3. 平面直角坐标系中，$\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，且 $|\vec{a}|^2\leqslant 5|\vec{a}+t\vec{e}|$ 对任意实数 t 成立，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是_____.

   解析

   容易得到，整个题目的计算与 $\vec{e}$ 无关.

   于是可设 $\vec{e}=(1,0)$，进而可设 $\vec{a}=(2,y)$.

   由 $(\vec{a}+t\vec{e})=(2+t,y)$，

   容易得到 $|\vec{a}+t\vec{e}|\geqslant|y|$.（等号成立当且仅当 $t=-2$）.

   转化为 $4+y^2\leqslant 5|y|$. 解得 $|y|\in[1,4]$.

   $|\vec{a}|=\sqrt{4+y^2}\in\left[\sqrt{5},2\sqrt{5}\right]$.

4. 设 A,B 为椭圆 Γ 的长轴顶点，E,F 为 Γ 的两个焦点，$|AB|=4$，$|AF|=2+\sqrt{3}$，P 为 Γ 上一点，满足 $|PE|\cdot|PF|=2$，则 $\triangle PEF$ 的面积为_____.

   解析 1.

   容易得到 $a=2$，$c=\sqrt{3}$.

   设 $|PE|=p$，$|PF|=q$.

   由题意可知 $pq=2$，$p+q=4$.

   进而可以求得 $p^2+q^2=12=4c^2$.

   于是 $\angle P=90^\circ$.

   $\triangle PEF$ 的面积等于 $\dfrac{1}{2}pq=1$.

5. 在 $1,2,3,\cdots,10$ 中随机选出一个数 a，在 $-1,-2,-3,\cdots,-10$ 中随机选取一个数 b，则 a^2+b 被 3 整除的概率是_____.

解析　$\dfrac{37}{100}$.

$p=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{4}{10}=\dfrac{37}{100}$

6. 对任意区间 I，用 M_I 表示函数 $y=\sin x$ 在 I 上的最大值．若正实数 a 满足 $M_{[0,a]}=2M_{[a,2a]}$，则 a 的值为_____.

解析　$a=\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{12}$.

容易得到 $2a\leqslant\dfrac{13\pi}{6}$，即 $a\leqslant\dfrac{13\pi}{12}$.

另一方面 $a>\dfrac{\pi}{2}$，故 $M_{[0,a]}=1$，进而 $M_{[a,2a]}=\dfrac{1}{2}$．解得 $a=\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{12}$.

7. 如图，在正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A,C 及棱 EF 上一点 K，且将正方体分成体积比为 $3:1$ 的两部分，则 $\dfrac{EK}{KF}$ 的值为_____.

解析

容易得到截面 ACK 的两部分含 B 的部分是一个棱台.

不妨设正方体的棱长为 1，设 $KF=x$.

台体下底面积为 $\dfrac{1}{2}$，上底为 $\dfrac{1}{2}x^2$.

$V_{台}=\dfrac{1}{3}\times1\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

故 $\dfrac{EK}{KF}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$.

8. 将 6 个数 $2,0,1,9,20,19$ 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为_____.

解析　498.

容斥原理，首项为 0 也算进去的总数为 $A_6^6-\dfrac{1}{2}\times2A_5^5+\dfrac{1}{4}\times A_4^4=606$，

首项为 0 的所有情况为 $A_5^5-\dfrac{1}{2}\times A_4^4=108$.

$606-108=498$.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a,CA=b,AB=c$．若 b 是 a 与 c 的等比中项，且 $\sin A$ 是 $\sin(B-A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项，求 $\cos B$ 的值.

解析　$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

罗列条件 $b^2=ac$，

$2\sin A=\sin(B-A)+\sin C=\sin(B-A)+\sin(B+A)=2\sin B\cos A$.

$\cos A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

即 $2ac=b^2+c^2-a^2$，由 $b^2=ac$

可得 $c^2-ca-a^2=0$．于是 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

于是 $b^2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a^2$，$c^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a^2$.

解得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 与抛物线 $\Gamma:y^2=4x$ 恰有一个公共点，且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F．求圆 Γ 的半径.

解析　$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

设抛物线上的点为 $A(x_0,y_0)$，则该点处的切线为 $y_0y=2(x+x_0)$，

其法向量 $\vec{n}=(2,-y_0)$

则线段 AF 的中垂线为 $(x_0-1)\left(x-\dfrac{x_0+1}{2}\right)+y_0\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)=0$.

其与 $x=1$ 的交点为 $\Omega\left(1,\dfrac{(x_0+1)^2}{2y_0}\right)$.

向量 $\overrightarrow{A\Omega}=\left(1-x_0,\dfrac{(x_0+1)^2}{2y_0}-y_0\right)$，

由 $\overrightarrow{A\Omega}$ 与 $\vec{n}$ 共线解得 $x_0=\dfrac{1}{3}$，$y_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

故 $r=\dfrac{(x_0+1)^2}{2|y_0|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

11. 称一个复数列 $\{z_n\}$ 是”有趣的”，若 $|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．求最大的常数 C，使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m，均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|\geqslant C$.

解析　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

根据题意，有

$$z_{n+1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}z_n\iff z_{n+1}=\left(\pm\frac{2\pi}{3}:\frac{1}{2}\right)\cdot z_n.$$

记 $q_1=\left(\dfrac{2\pi}{3}:\dfrac{1}{2}\right)$，$q_2=\left(-\dfrac{2\pi}{3}:\dfrac{1}{2}\right)$．取 $z_1=1$，且

$$z_{n+1}=\begin{cases}q_1\cdot z_n, & 2\nmid n,\\ q_2\cdot z_n, & 2\mid n,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}(z_1+z_2+\cdots+z_m)&=(0:1)+\left(\frac{2\pi}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\left(-\frac{2\pi}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)\\&=(0:1)+\left(\frac{2\pi}{3}:\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2\pi}{3}:\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i},\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{m\to+\infty}|z_1+z_2+\cdots+z_m|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

接下来证明 $C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 符合题意．考虑

$$|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|1+\left(\pm\frac{2\pi}{3}:\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n},$$

于是当 $m=1$ 时，有 $|z_1|=1>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；当 m 为偶数时，有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_m|&\geqslant|z_1+z_2|-|z_3+z_4|-\cdots-|z_{m-1}+z_m|\\&>\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}+\cdots\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{aligned}$$

当 m 为不小于 3 的奇数时，有

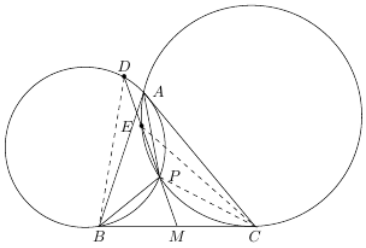
$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_m|&\geqslant|z_1+z_2|-|z_3+z_4|-\cdots-|z_{m-2}+z_{m-1}|-|z_m|\\&>\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}+\cdots+\frac{\sqrt{3}}{2^{m-2}}\right)-\frac{1}{2^m}\\&>\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}+\cdots+\frac{\sqrt{3}}{2^{m-2}}+\frac{\sqrt{3}}{2^m}\right)\\&>\frac{\sqrt{3}}{3},\end{aligned}$$

综上所述，符合题意的最大常数为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2019 年全国高中数学联赛二试**答案** (A 卷)

一、 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 边的中点，点 P 在 $\triangle ABCC$ 内，使得 AP 平分 $\angle BAC$．直线 MP 与 $\triangle ABP$，$\triangle ACP$ 的外接圆分别相交于不同于点 P 的两点 D, E．证明：若 $DE = MP$，则 $BC = 2BP$．

解析



由于 M 是中点，对 $\triangle PBC$ 有 $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{\sin\angle BPM}{\sin\angle CPM}$．

而对 $\triangle BDP$ 由正弦定理有 $\dfrac{BP}{\sin\angle BDP} = \dfrac{BD}{\sin\angle BPD}$．

同理也有 $\dfrac{CE}{\sin\angle CPE} = \dfrac{CP}{\sin\angle CEP}$．

故由 $\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP$ 有 $BD = BP\cdot\dfrac{\sin\angle BPD}{\sin\angle BDP} = CP\cdot\dfrac{\sin\angle CPM}{\sin\angle BPM}\cdot\dfrac{\sin\angle BPD}{\sin\angle BDP} = CP\cdot\dfrac{\sin\angle CPE}{\sin\angle CEP} = CE$

于是由 $\angle BDP = \angle CEM$ 且有条件可知 $DE = MP$，我们有 $\triangle BDP \cong \triangle CEM$，即 $BP = CM$．故 $BC = 2BP$．

二、 设整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ 满足 $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2019} = 99$．

记 $f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + \cdots + a_{2017}a_{2019})$．

求 f 的最小值 f_0．并确定使 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$ 的个数．

解析

$$f=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2017}(a_i-a_{i+2})^2+\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_{2018}^2}{2}+\frac{a_{2019}^2}{2}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2015}(a_i-a_{i+2})^2+\frac{(a_{2016}-a_{2017})^2}{2}+\frac{(a_{2017}-a_{2019})^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_{2017}^2}{2}+4901$$

(因为$a_{2017}\leqslant a_{2018}$)

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2015}(a_{i+2}-a_i)+\frac{(a_{2017}-a_{2016})}{2}+\frac{(a_{2017}-a_{2019})^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_{2017}^2}{2}+4901$$

(因为整数平方大于等于自己)

$$=a_{2017}-\frac{a_2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{(a_{2017}-99)^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_{2017}^2}{2}+4901$$

$$\geqslant a_{2017}^2-98a_{2017}+9801$$

$$\geqslant 7400$$

第一个不等号取等在于 $(a_{2016}-a_{2018})^2+a_{2018}^2=(a_{2016}-a_{2017})^2+a_{2017}^2$，即我们有 $a_{2018}=a_{2017}$.

第二个不等号取等在于 $a_i-a_{i+2}=0$ 或 -1（$1\leqslant i\leqslant 2015$）和 $a_{2016}-a_{2017}=0$ 或 -1.

第三个不等号取等在于 $a_2^2=a_2$，也是 $a_2=1$.

第四个不等号取等条件在于 $a_{2017}=\frac{98}{2}=49$.

所以综上，$f\geqslant 7400$ 的取等条件是 $a_2=1$，$a_{2017}=a_{2018}=49$，而 a_2 到 a_{2017} 之间每两个相邻的数的差为 0 或 -1.

所以取等的组数等于 a_i-a_{i-2}（$4\leqslant i\leqslant 2017$）和 $a_{2017}-a_{2016}$ 中的 1 的个数.

由于这些数可以分两组：

2, 4, 6, . . . , 2016, 2018

1, 3, 5, . . . , 2015, 2017

并由于 $a_1=a_2=1$，$a_{2017}=a_{2018}=49$，所以显然对每一个 i 而言，a_{i-1} 和 a_{i+1} 总有一个与 a_i 相等.

故我们设 $a_i=j$（$1\leqslant j\leqslant 49$）的解数为 b_j+1.

则 $b_j\geqslant 1$，且 $b_1+\ldots+b_{49}=2018-49=1969$.

所以 $(b_1,\ldots,b_{49})$ 的解数为 C_{1968}^{48}，即 $(a_3,\ldots,a_{2016})$ 的取法有 C_{1968}^{48} 种.

三、 设 m 为整数，$|m|>2$. 整数数列 $a_1,a_2,\ldots$ 满足：a_1,a_2 不全为零，且对任意正整数 n，均有 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$.

证明：若存在整数 r,s（$r>s\geqslant 2$）使得 $a_r=a_s=a_1$，则 $r-s\geqslant|m|$.

解析

首先我们不妨设 $(a_1,a_2)=1$，不然整个数列每一项都除以一个 (a_1,a_2) 可以得到同样的结果和结论.

我们先证一个非常显然的引理.

引理：对任意 a_n，$n \geqslant 3$，我们都可以将 a_n 写成 $a_n = k_n a_2 + l_n a_1$，其中 $m \mid k_n - 1$，$m \mid l_n$.

引理的证明：$a_3 = a_2 - ma_1$，$a_4 = a_3 - ma_2 = (1-m)a_2 - ma_1$. 所以 $n = 3, 4$ 时显然. 若 $n-2$ 和 $n-1$ 时都成立的话，则

$a_n = a_{n-1} - ma_{n-2} = (k_{n-1} - mk_{n-2})a_2 + (l_{n-1} - ml_{n-2})a_1$ 所以还是显然.

所以在模 m 的时候我们总有 $a_n \equiv a_2 \pmod m$，故 $a_r = a_s = a_1$ 就表明了 $a_2 \equiv a_1 \pmod m$，由 $(a_1, a_2) = 1$ 可得 $(a_1, m) = 1$.

那么 $\dfrac{a_r - a_s}{m} = \displaystyle\sum_{i=s+1}^{r} \frac{a_i - a_{i-1}}{m} = \sum_{i=s+1}^{r} a_{i-2} \equiv (r-s)a_1 \pmod m$

故 $m \mid (r-s)a_1$，所以 $m \mid r - s$. 于是 $r - s \geqslant |m|$.

四、 设 V 是空间中 2019 个点构成的集合，其中任意四点不共面. 某些点之间连有线段，记 E 为这些线段构成的集合. 试求最小的正整数 n，满足条件：若 E 至少有 n 个元素，则 E 一定含有 908 个二元子集，其中每个二元子集中的两条线段有公共端点，且任意两个二元子集的交为空集.

解析

为了叙述方便，称一个图中的两条相邻的边构成一个“角”.

先证明一个引理：设 $G = (V, E)$ 是一个简单图，且 G 是连通的，则 G 含有 $[\frac{|E|}{2}]$ 个两两无公共边的角（这里 $[\alpha]$ 表示实数 α 的整数部分）.

引理的证明：对 E 的元素个数 $|E|$ 归纳证明. 当 $|E| = 0, 1, 2, 3$ 时，结论显然成立. 下面假设 $|E| \geqslant 4$，并且结论在 $|E|$ 较小时均成立.

只需证明，在 G 中可以选取两条边 a, b 构成一个角，在 G 中删去 a, b 这两条边后，剩下的图含有一个连通分支包含 $|E| - 2$ 条边. 对这个连通分支应用归纳假设即得结论成立.

考虑 G 中的最长路 $P : v_1 v_2 \ldots v_k$，其中 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 是互不相同的顶点. 因为 G 连通，故 $k \geqslant 3$.

情形 1：$\deg(v_1) \geqslant 2$. 由于 P 是最长路，v_1 的邻点均在 $v_2, \ldots, v_k$ 中，设 $v_1 v_i \in E$，其中 $3 \leqslant i \leqslant k$. 则 $\{v_1 v_2, v_1 v_i\}$ 是一个角，在 E 中删去这两条边. 若 v_1 处还有第三条边，则剩下的图是连通的：若 v_1 处仅有被删去的两条边，则 v_1 成为孤立点，其余顶点仍互相连通. 总之在剩下的图中有一个连通分支含有 $|E| - 2$ 条边.

情形 2：$\deg(v_1) = 1$，$\deg(v_2) = 2$. 则 $\{v_1 v_2, v_2 v_3\}$ 是一个角，在 G 中删去这两条边后，v_1, v_2 都成为孤立点，其余的点互相连通，因此有一个连通分支含有 $|E| - 2$ 条边.

情形 3：$\deg(v_1) = 1$，$\deg(v_2) \geqslant 3$，且 v_2 与 $v_4, \ldots, v_k$ 中某个点相邻. 则 $\{v_1 v_2, v_2 v_3\}$ 是一个角，在 G 中删去这两条边后，v_1 成为孤立点，其余点互相连通，因此有一个连通分支含有 $|E| - 2$ 条边.

情形 4：$\deg(v_1) = 1$，$\deg(v_2) \geqslant 3$，且 v_2 与某个 $u \notin \{v_1, v_3, \ldots, v_k\}$ 相邻. 由于 P 是

最长路，故 u 的邻点均在 $v_2,\ldots,v_k$ 之中．因 $\{v_1v_2,v_2u\}$ 是一个角，在 G 中删去这两条边，则 v_1 是孤立点，若 u 处仅有边 uv_2，则删去所述边后 u 也是孤立点，而其余点互相连通．若 u 处还有其他边 uv_i，$3\leqslant i\leqslant k$，则删去所述边后，除 v_1 外其余点互相连通，总之，剩下的图中有一个连通分支含有 $|E|-2$ 条边．引理获证．

回到原题，题中的 V 和 E 可看作一个图 $G=(V,E)$．

首先证明 $n\geqslant 2795$．

设 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2019}\}$．在 $v_1,v_2,\ldots,v_{61}$ 中，首先两两连边，再删去其中 15 条边（例如 $v_1v_2,v_1v_3,\ldots,v_1v_{16}$），共连了 $C_{61}^2-15=1815$ 条边，则这 61 个点构成的图是连通图．再将剩余的 $2019-61=1958$ 个点配成 979 对，每对两点之间连一条边，则图 G 中一共连了 $1815+979=2794$ 条线段．

由上述构造可见，G 中的任何一个角必须使用 $v_1,v_2,\ldots,v_{61}$ 相连的边，因此至多有 $[\frac{1815}{2}]=907$ 个两两无公共边的角．故满足要求的 n 不小于 2795．另一方面，若 $|E|\geqslant 2795$，可任意删去若干条边，只考虑 $|E|=2795$ 的情形．设 G 有 k 个连通分支，分别有 $m_1,\ldots,m_k$ 个点，及 $e_1,\ldots,e_k$ 条边．下面证明 $e_1,\ldots,e_k$ 中至多有 979 个奇数．

反证法，假设 $e_1,\ldots,e_k$ 中有至少 980 个奇数，由于 $e_1+\ldots+e_k=2795$ 是奇数，故 $e_1,\ldots,e_k$ 中至少有 981 个奇数，故 $k\geqslant 981$．不妨设 $e_1,e_2,\ldots,e_{981}$ 都是奇数，显然 $m_1,m_2,\ldots,m_{981}\geqslant 2$．令 $m=m_{981}+\ldots+m_k\geqslant 2$．则有 $C_{m_i}^2\geqslant e_i$（$1\leqslant i\leqslant 980$），$C_m^2\geqslant e_{981}+\ldots+e_k$，故

$$2795=\sum_{i=1}^{k}e_i\leqslant C_m^2+\sum_{i=1}^{980}C_{m_i}^2$$

利用组合数的凸性，即对 $x\geqslant y\geqslant 3$，有 $C_x^2+C_y^2\leqslant C_{x+1}^2+C_{y-1}^2$，可知当 $m_1,\ldots,m_{980},m$ 由 980 个 2 以及一个 59 构成时，$C_m^2+\sum_{i=1}^{980}C_{m_i}^2$ 取得最大值．于是

$$C_{m_i}^2+\sum_{i=1}^{980}C_{m_i}^2\leqslant C_{59}^2+980C_2^2=2691<2795$$

这与前式矛盾．

从而 $e_1,\ldots,e_k$ 中至多有 979 个奇数．对每个连通分支应用引理，可知 G 中含有 N 个两两无公共边的角，其中

$$N=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{e_i}{2}\right]\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}e_i-979\right)=\frac{1}{2}(2795-979)=908$$

综上，所求最小的 n 是 2795．