2018 年全国高中数学联赛一试**答案** (B 卷)

一、 **填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.**

1. 设集合 $A=\{2,0,1,8\}, B=\{2a|a\in A\}$，则 $A\bigcup B$ 的所有元素之和是_____.

   解析　31.

   易知 $B=\{4,0,2,16\}$，故 $A\bigcup B=\{0,1,2,4,8,16\}$. $A\bigcup B$ 的所有元素之和是 $0+1+2+4+8+16=31$.

2. 已知圆锥的顶点为 P，底面半径长为 2，高为 1. 在圆锥底面上取一点 Q，使得直线 PQ 与底面所成角不大于 45°，则满足条件的点 Q 所构成的区域的面积为_____.

   解析　3π.

   圆锥顶点 P 在底面上的投影即为底面中心，记之为 O. 由条件知，$\dfrac{OP}{OQ}=\tan\angle OQP\leqslant 1$，即 $OQ\geqslant 1$，故所求的区域面积为 $\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$.

3. 将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行，记为 a,b,c,d,e,f，则 $abc+def$ 是奇数的概率为_____.

   解析　$\dfrac{1}{10}$.

   当 $abc+def$ 为奇数时，abc, def 必为一奇一偶，若 abc 为奇数，则 a,b,c 为 $1,3,5$ 的排列，d,e,f 为 $2,4,6$ 的排列，这样有 $3!\times 3!=36$ 种情况. 由对称性可知，满足条件的情况数为 $36\times 2=72$ 种，从而所求概率为 $\dfrac{72}{6!}=\dfrac{72}{720}=\dfrac{1}{10}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 通过原点，$\vec{n}=(3,1)$ 是 l 的一个法向量. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 n，点 (a_{n+1},a_n) 均在 l 上. 若 $a_2=6$，则 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 的值为_____.

   解析　-32.

   易知直线 l 的方程是 $3x+y=0$. 因此对任意正整数 n，有 $3a_{n+1}+a_n=0$，即 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n$，故 $\{a_n\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 于是 $a_3=-\dfrac{1}{3}a_2=-2$. 由等比数列的性质可得，$a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=(-2)^5=-32$.

5. 设 α,β 满足 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-3, \tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=5$，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为_____.

   解析　$-\dfrac{7}{4}$.

   由两角差的正切公式可知 $\tan\left((\alpha+\dfrac{\pi}{3})-(\beta-\dfrac{\pi}{6})\right)=\dfrac{-3-5}{1+(-3)\times 5}=\dfrac{4}{7}$，即 $\tan\left(\alpha-\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{7}$，从而 $\tan(\alpha-\beta)=-\cot\left(\alpha-\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{7}{4}$.

6. 设抛物线 $C:y^2=2x$ 的准线与 x 轴交于点 A，过点 $B(-1,0)$ 作一直线 l 与抛物线 C 相切于点 K，过点 A 作 l 的平行线，与抛物线 C 交于点 M,N，则 $\triangle KMN$ 的面积为_____.

解析 $\dfrac{1}{2}$.

设直线 l 与 MN 的斜率为 k，则 $l:x=\dfrac{1}{k}y-1, MN:x=\dfrac{1}{k}y-\dfrac{1}{2}$.

将 l 与 C 联立，得方程 $y^2-\dfrac{2}{k}y+2=0$，由条件知其判别式为零，故 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 将 MN 与 C 联立，得方程 $y^2-\dfrac{2}{k}y+1=0$，于是 $|y_M-y_N|=\sqrt{(y_M+y_N)^2-4y_My_N}=\sqrt{\dfrac{4}{k^2}-4}=2$，结合 l 与 MN 平行，可知 $S_{\triangle KMN}=S_{\triangle BMN}=|S_{\triangle BAM}-S_{\triangle BAN}|=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_M-y_N|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2=\dfrac{1}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[1,2]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1, f(2\pi)=0$，则不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant f(x)\leqslant 1\end{cases}$ 的解集为_____.

解析 $[2\pi-6,4-\pi]$.

由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[1,2]$ 上严格递减知，$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上严格递增，再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知，$[0,1]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间. 注意到 $f(4-\pi)=f(\pi-4)=f(\pi)=1, f(2\pi-6)=f(2\pi)=0$，所以 $0\leqslant f(x)\leqslant 1\Leftrightarrow f(2\pi-6)\leqslant f(x)\leqslant f(4-\pi)$，而 $0<2\pi-6<4-\pi<1$，故原不等式组成立当且仅当 $x\in[2\pi-6,4-\pi]$.

8. 已知复数 z_1,z_2,z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1, |z_1+z_2+z_3|=r$，其中 r 是给定实数，则 $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$ 的实数是_____（用含有 r 的式子表示）.

解析 $\dfrac{r^2-3}{2}$.

记 $w=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$. 由复数模的性质可知 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}, \overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}, \overline{z_3}=\dfrac{1}{z_3}$，因此 $w=z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}$. 于是 $r^2=(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+w+\overline{w}=3+2\operatorname{Re}w$，解得 $\operatorname{Re}w=\dfrac{r^2-3}{2}$.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 已知数列 $\{a_n\}:a_1=7, \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2, n=1,2,3,\cdots$. 求满足 $a_n>4^{2018}$ 的最小正整数 n.

解析 12.

由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2$ 可知 $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$. 因此 $a_n+1=(a_1+1)^{2^{n-1}}=8^{2^{n-1}}=2^{3\times2^{n-1}}$，

故 $a_n=2^{3\times 2^{n-1}}-1$．显然 $\{a_n\}$ 单调递增．由于 $a_{11}=2^{3072}-1<2^{4036}=4^{2018}, a_{12}=2^{6144}-1>2^{4036}=4^{2018}$，故满足题目条件的 n 的最小值是 12．

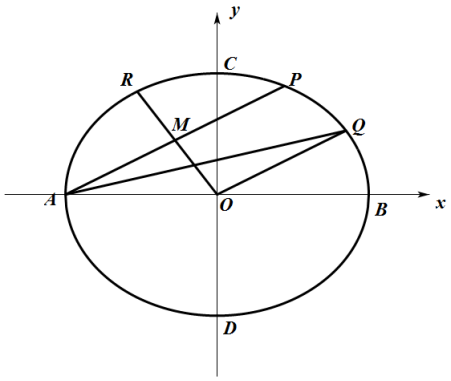
10. 已知定义在 R^* 上的函数 $f(x)$ 为 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|, 0<x\leqslant 9\\ 4-\sqrt{x}, x>9\end{cases}$ 设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 abc 的取值范围．

解析　$(81,144)$．

不妨假设 $a<b<c$，由于 $f(x)$ 在 $(0,3]$ 上严格递减，在 $[3,9]$ 上严格递增，在 $[9,+\infty)$ 上严格递减，且 $f(3)=0, f(9)=1$，故结合图像可知 $a\in(0,3), b\in(3,9), c\in(9,+\infty)$，并且 $f(a)=f(b)=f(c)\in(0,1)$．由 $f(a)=f(b)$ 得 $1-\log_3 a=\log_3 b-1$，取 $\log_3 a+\log_3 b=2$，因此 $ab=3^2=9$．于是 $abc=9c$．又 $0<f(c)=4-\sqrt{c}<1$，故 $c\in(9,16)$．进而 $abc=9c\in(81,144)$．

11. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，A,B 与 C,D 分别是椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点与上下顶点．设 P,Q 是 Γ 上且位于第一象限的两点，满足 $OQ\parallel AP$，M 是线段 AP 的中点，射线 OM 与椭圆交于点 R．

证明：线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形．



解析

设点 P 坐标为 (x_0,y_0)．由于 $\overrightarrow{OQ}\parallel\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OR}\parallel\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})$，故存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OQ}=\lambda(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}), \overrightarrow{OR}=\mu(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})$．此时点 Q,R 的坐标可分别表示是 $(\lambda(x_0+a),\lambda y_0), (\mu(x_0-a),\mu y_0)$．由于点 Q,R 都在椭圆上，所以

$$\lambda^2\left(\frac{(x_0+a)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\mu^2\left(\frac{(x_0-a)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=1.$$

结合 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ 知，上式可化为 $\lambda^2(2+\dfrac{2x_0}{a})=\mu^2(2-\dfrac{2x_0}{a})=1$，解得 $\lambda^2=\dfrac{a}{2(a+x_0)}, \mu^2=\dfrac{a}{2(a-x_0)}$．

因此 $|OQ|^2+|OR|^2=\lambda^2\left((x_0+a)^2+y_0^2\right)+\mu^2\left((x_0-a)^2+y_0^2\right)$

$=\dfrac{a}{2\left(a+x_0\right)}\left((x_0+a)^2+y_0^2\right)+\dfrac{a}{2\left(a-x_0\right)}\left((x_0-a)^2+y_0^2\right)$

$=\dfrac{a\left(a+x_0\right)}{2}+\dfrac{ay_0^2}{2\left(a+x_0\right)}+\dfrac{a\left(a-x_0\right)}{2}+\dfrac{ay_0^2}{2\left(a-x_0\right)}$

$=a^2+\dfrac{ay_0^2}{2}\left(\dfrac{1}{a+x_0}+\dfrac{1}{a-x_0}\right)$

$=a^2+\dfrac{ay_0^2}{2}\cdot\dfrac{2a}{a^2-x_0^2}=a^2+\dfrac{a^2\cdot b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{a^2-x_0^2}=a^2+b^2=|BC|^2.$

从而线段 OQ,OR,BC 能构成一个直角三角形.

2018 年全国高中数学联赛二试答案 (B 卷)

一、 设 a,b 是实数，函数 $f(x)=ax+b+\dfrac{9}{x}$. 证明：存在 $x_0\in[1,9]$，使得 $|f(x_0)|\geqslant 2$.

解析

证法一

只需证明存在 $u,v\in[1,9]$，满足 $|f(u)-f(v)|\geqslant 4$，进而由绝对值不等式得 $|f(u)|+|f(v)|\geqslant|f(u)-f(v)|\geqslant 4$，故 $|f(u)|\geqslant 2$ 与 $|f(v)|\geqslant 2$ 中至少有一个成立. 当 $a\in(-\infty,\dfrac{1}{2}]\bigcup[\dfrac{3}{2},+\infty)$ 时，有 $|f(1)-f(9)|=|(a+b+9)-(9a+b+1)|=8|1-a|\geqslant 4$. 当 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ 时，有 $\dfrac{3}{\sqrt{a}}\in[1,9]$. 再分两种情况：若 $\dfrac{1}{2}<a\leqslant 1$，则 $|f(1)-f(\dfrac{3}{\sqrt{a}})|=|(a+b+9)-(6\sqrt{a}+b)|=(3-\sqrt{a})^2\geqslant 4$. 若 $1<a<\dfrac{3}{2}$，则 $|f(9)-f(\dfrac{3}{\sqrt{a}})|=|(9a+b+1)-(6\sqrt{a}+b)|=(3\sqrt{a}-1)^2\geqslant 4$.

综上可知，存在 $u,v\in[1,9]$，满足 $|f(u)-f(v)|\geqslant 4$，从而命题得证.

证法二

用反证法. 假设对任意 $x\in[1,9]$，均有 $|f(x)|<2$，则 $|f(1)|<2,|f(3)|<2,|f(9)|<2$.

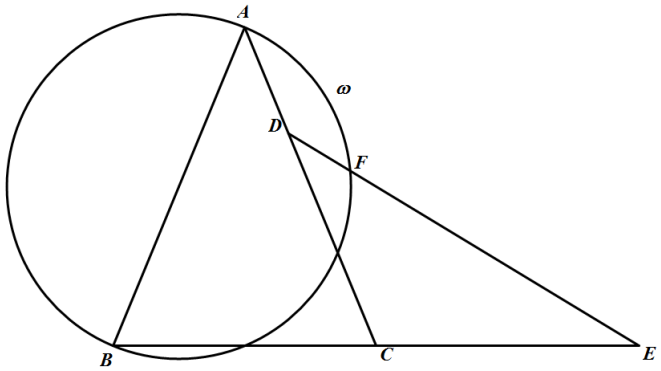
易知 $f(1)=a+b+9$，①

$f(3)=3a+b+3$，②

$f(9)=9a+b+1$. ③

由 ①，② 得，$2a-6=f(2)-f(1)$；又由 ②，③ 得，$6a-2=f(3)-f(2)$. 由上述两式消去 a，可知 $f(3)-4f(2)+3f(1)=(6a-2)-3\cdot(2a-6)=16$. 但 $f(3)-4f(2)+3f(1)<2+4\cdot 2+3\cdot 2=16$，矛盾! 从而命题得证.

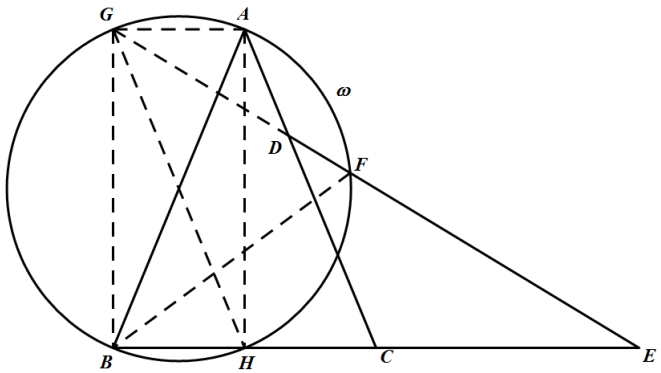
二、 如图所示，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，边 AC 上一点 D 及 BC 延长线上一点 E 满足 $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BC}{2CE}$，以 AB 为直径的圆 w 与线段 DE 交于一点 F. 证明：B,C,F,D 四点共圆.（答题时请将图画在答卷纸上）



解析

如图，取 BC 中点 H，则由 $AB=AC$ 知 $AH\perp BC$，故 H 在圆 w 上.

延长 FD 至 G，使得 $AG\parallel BC$，结合已知条件得，$\dfrac{AG}{CE}=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BC}{2CE}$，故 $AG=\dfrac{1}{2}BC=BH=HC$，从而 $AGBH$ 为矩形，$AGHC$ 为平行四边形. 由 $AGBH$ 为矩形知，G 亦在圆 w 上. 故 $\angle HGF=\angle HBF$. 又 $AGHC$ 为平行四边形，由 $AC\parallel GH$，得 $\angle CDF=\angle HGF$. 所以 $\angle CDF=\angle HBF=\angle CBF$，故 B,C,F,D 四点共圆.



三、 设集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，X,Y 均为 A 的非空子集（允许 $X=Y$）. X 中的最大元与 Y 中的最小元分别记为 $\max X,\min Y$. 求满足 $\max X>\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目.

解析

先计算满足 $\max X\leqslant\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目. 对给定的 $m=\max X$，集合 X 是集合 $\{1,2,\cdots,m-1\}$ 的任意一个子集与 $\{m\}$ 的并，故并有 2^{m-1} 种取法. 又 $\min Y\geqslant M$，故 Y 是 $\{m,m+1,\cdots,n\}$ 的任意一个非空子集，共有 $2^{n+1-m}-1$ 种取法. 因此，满足 $\max X\leqslant\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目是

$\displaystyle\sum_{m=1}^{n}2^{m-1}(2^{n+1-m}-1)=\sum_{m=1}^{n}2^{n}-\sum_{m=1}^{n}2^{m-1}=n\cdot 2^{n}-2^{n}+1$. 由于有序集合对 (X,Y)

有 $(2^n-1)\cdot(2^n-1)=(2^n-1)^2$ 个，于是满足 $\max X>\min Y$ 的有序集合对 (X,Y) 的数目是 $(2^n-1)^2-n\cdot 2^n+2^n-1=2^{2n}-2^n(n+1)$.

四、 给定整数 $a\geqslant 2$. 证明：对任意正整数 n，存在正整数 k，使得连续 n 个数 $a^k+1,a^k+2,\cdots,a^k+n$ 均是合数.

解析

设 $i_1<i_2<\cdots<i_r$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中与 a 互素的全体整数，则对 $1\leqslant i\leqslant n, i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，无论正整数 k 如何取值，a^k+i 均与 a 不互素且大于 a，故 a^k+i 为合数.

对任意 $j=1,2,\cdots,r$，因 $a+i_j>1$，故 $a+i_j$ 有素因子 p_j.

我们有 $(p_j,a)=1$（否则，因 p_j 是素数，故 $p_j|a$，但 $p_j|a+i_j$，从而 $p_j|i_j$，故 a,i_j 不互素，与 i_j 的取法矛盾）. 因此，由费马小定理知，$a^{p_j-1}\equiv 1\pmod{p_j}$. 现取 $k=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)+1$. 对任意 $j=1,2,\cdots,r$，注意到 $k\equiv 1\pmod{p_j}-1$，故有 $a^k+i_j\equiv a+i_j\equiv 0\pmod{p_j}$. 又 $a^k+i_j>a+i_j\geqslant p_j$，故 a^k+i_j 为合数.

综上所述，当 $k=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)+1$ 时，$a^k+1,a^k+2,\cdots,a^k+n$ 均是合数.