2018 年全国高中数学联赛一试**答案** (A 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,99\}, B=\{2x|x\in A\}, C=\{x|2x\in A\}$，则 $B\bigcap C$ 的元素个数为_____.

   解析　24.

   由条件知，$B\bigcap C=\{2,4,6,\cdots,198\}\bigcap\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots,\frac{99}{2}\right\}=\{2,4,6,\cdots,48\}$，故 $B\bigcap C$ 的元素的个数为 24.

2. 设点 P 到平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$，点 Q 在平面 α 上，使得直线 PQ 与 α 所成角不小于 30° 且不大于 60°，则这样的点 Q 所构成的区域的面积为_____.

   解析　8π.

   设点 P 在平面 α 上的射影为 O. 由条件知，$\frac{OP}{OQ}=\tan\angle OQP\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$，即 $OQ\in[1,3]$，故所求的区域面积为 $\pi\cdot3^2-\pi\cdot1^2=8\pi$.

3. 将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行，记为 a,b,c,d,e,f，则 $abc+def$ 是偶数的概率为_____.

   解析　$\frac{9}{10}$.

   先考虑 $abc+def$ 为奇数的情况，此时 abc,def 一奇一偶，若 abc 为奇数，则 a,b,c 为 $1,3,5$ 的排列，进而 d,e,f 为 $2,4,6$ 的排列，这样有 $3!\times3!=36$ 种情况，由对称性可知，使 $abc+def$ 为奇数的情况数为 $36\times2=72$ 种. 从而 $abc+def$ 为偶数的概率为 $1-\frac{72}{6!}=1-\frac{72}{720}=\frac{9}{10}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别是 F_1,F_2，椭圆 C 的弦 ST 与 UV 分别平行于 x 轴与 y 轴，且相交于点 P. 已知线段 PU,PS,PV,PT 的长分别为 $1,2,3,6$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____.

   解析　$\sqrt{15}$.

   由对称性，不妨设 $P(x_p,y_p)$ 在第一象限，则由条件知 $x_p=\frac{1}{2}(|PT|-|PS|)=2, y_P=\frac{1}{2}(|PV|-|PU|)=1$，即 $P(2,1)$. 进而由 $x_P=|PU|=1,|PS|=2$ 得 $U(2,2),S(4,1)$，代入椭圆 C 的方程知 $4\cdot\frac{1}{a^2}+4\cdot\frac{1}{b^2}=16\cdots\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $a^2=20,b^2=5$. 从而 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_P|=\sqrt{a^2-b^2}\cdot y_P=\sqrt{15}$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[0,1]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1, f(2\pi)=2$，则不等式组 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ 1\leqslant f(x)\leqslant 2\end{cases}$ 的解集为_____.

解析　$[\pi-2,8-2\pi]$.

由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[0,1]$ 上严格递减知，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上严格递增，再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知，$[1,2]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间. 注意到 $f(\pi-2)=f(\pi)=1, f(8-2\pi)=f(-2\pi)=f(2\pi)=2$，所以 $1\leqslant f(x)\leqslant 2\Leftrightarrow f(\pi-2)\leqslant f(x)\leqslant f(8-2\pi)$，而 $1<\pi-2<8-2\pi<2$，故原不等式组成立当且仅当 $x\in[\pi-2,8-2\pi]$.

6. 设复数 z 满足 $|z|=1$，使得关于 x 的方程 $zx^2+2\bar{z}x+2=0$ 有实根，则这样的复数 z 的和为_____.

解析　$-\dfrac{3}{2}$.

设 $z=a+bi(a,b\in\mathrm{R}, a^2+b^2=1)$. 将原方程改为 $(a+bi)x^2+2(a-bi)x+2=0$，分离实部与虚部后等价于 $ax^2+2ax+2=0$，①

$bx^2-2bx=0$. ②

若 $b=0$，则 $a^2=1$，但当 $a=1$ 时，① 无实数解，从而 $a=-1$，此时存在实数 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 满足 ①，②，故 $z=-1$ 满足条件. 若 $b\neq 0$，则由 ② 知 $x\in\{0,2\}$，但显然 $x=0$ 不满足 ①，故只能是 $x=2$，代入 ① 解得 $a=-\dfrac{1}{4}$，进而 $b=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，相应有 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$.

综上，满足条件的所有复数 z 之和为 $-1+\dfrac{-1+\sqrt{15}i}{4}+\dfrac{-1-\sqrt{15}i}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

7. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，则 $\sin\angle BAC$ 的值为_____.

解析　$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

不失一般性，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=2$. 由条件知，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$. ①

故 $AC=\dfrac{1}{2}BO=1$.取 AC 的中点 M,则 $OM\perp AC$,结合 ① 知 $OM\perp BO$,且 B 与 A 位于直线 OM 的同侧. 于是 $\cos\angle BOC=\cos(90^\circ+\angle MOC)=-\sin\angle MOC=-\dfrac{MC}{OC}=-\dfrac{1}{4}$. 在 $\triangle BOC$ 中，由余弦定理得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC}=\sqrt{10}$，进而在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{2R}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

8. 设整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 满足 $a_{10}=3a_1, a_2+a_8=2a_5$，且 $a_{i+1}\in\{1+a_i,2+a_i\}, i=1,2,\cdots,9$，则这样的数列的个数为_____.

解析　80.

设 $b_i=a_{i+1}-a_i\in\{1,2\}(i=1,2,\cdots,9)$，则有 $2a_1=a_{10}-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_9$，①

$b_2+b_3+b_4=a_5-a_2=a_8-a_5=b_5+b_6+b_7$. ②

用 t 表示 b_2,b_3,b_4 中值为 2 的项数．由 ② 知，t 也是 b_5,b_6,b_7 中值为 2 的项数，其中 $t\in\{0,1,2,3\}$．因此 $b_2,b_3,\cdots,b_7$ 的取法数为 $(\mathrm{C}_3^0)^2+(\mathrm{C}_3^1)^2+(\mathrm{C}_3^2)^2+(\mathrm{C}_3^3)^2=20$．
取定 $b_2,b_3,\cdots,b_7$ 后，任意指定 b_8,b_9 的值，有 $2^2=4$ 种方式．
最后由 ① 知，应取 $b_1\in\{1,2\}$ 使得 $b_1+b_2+\cdots+b_9$ 为偶数，这样的 b_1 的取法是唯一的，并且确定了整数 a_1 的值，进而数列 $b_1,b_2,\cdots,b_9$ 唯一对应一个满足条件的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$．
综上可知，满足条件的数列的个数为 $20\times4=80$．

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 已知定义在 R^* 上的函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|,0<x\leqslant 9\\ 4-\sqrt{x},x>9\end{cases}$ 设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 abc 的取值范围．

解析　$(81,144)$．
不妨假设 $a<b<c$，由于 $f(x)$ 在 $(0,3]$ 上严格递减，在 $[3,9]$ 上严格递增，在 $[9,+\infty)$ 上严格递减，且 $f(3)=0,f(9)=1$，故结合图像可知 $a\in(0,3),b\in(3,9),c\in(9,+\infty)$，并且 $f(a)=f(b)=f(c)\in(0,1)$．由 $f(a)=f(b)$ 得 $1-\log_3 a=\log_3 b-1$，取 $\log_3 a+\log_3 b=2$，因此 $ab=3^2=9$．于是 $abc=9c$．又 $0<f(c)=4-\sqrt{c}<1$，故 $c\in(9,16)$．进而 $abc=9c\in(81,144)$．

10. 已知实数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足：对任意正整数 n，有 $a_n(2S_n-a_n)=1$，其中 S_n 表示数列的前 n 项和．证明：
（1）对任意正整数 n，有 $a_n<2\sqrt{n}$；
（2）对任意正整数 n，有 $a_na_{n+1}<1$．

解析
(1) 根据题意，有

$$a_1^2=1,$$

命题成立．当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=1,$$

于是

$$S_n^2=S_{n-1}^2+1,$$

从而

$$S_n^2=n,n=1,2,\cdots.$$

因此当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$a_n = S_n - S_{n-1} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n},$$

命题成立.

(2) 只需要考虑 a_n 与 a_{n+1} 同号的情形，不妨设 a_n, a_{n+1} 均为正数，则

$$S_{n+1} > S_n > S_{n-1} > -\sqrt{n},$$

于是

$$S_n = \sqrt{n}, S_{n+1} = \sqrt{n+1},$$

于是

$$a_n = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}, a_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

从而

$$\begin{aligned} a_n a_{n+1} &\leqslant \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &< \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

命题得证.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，设 AB 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的过点 $F(1,0)$ 的弦，$\triangle AOB$ 的外接圆交抛物线于点 P（不同于点 O, A, B）. 若 PF 平分 $\angle APB$，求 $|PF|$ 的所有可能值.

解析 $\sqrt{13} - 1$.

设 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1), B(\frac{y_2^2}{4}, y_2), P(\frac{y_3^2}{4}, y_3)$，由条件知 y_1, y_2, y_3 两两不等且非零. 设直线 AB 的方程为 $x = ty + 1$，与抛物线方程联立可得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$，故 $y_1 y_2 = -4$. ①

注意到 $\triangle AOB$ 的外接圆过点 O，可设该圆的方程为 $x^2 + y^2 + dx + ey = 0$，与 $x = \frac{y^2}{4}$ 联立得，$\frac{y^4}{16} + (1 + \frac{d}{4})y^2 + ey = 0$. 该四次方程有 $y = y_1 y_2, y_3, 0$ 这四个不同的实根，故由韦达定理得 $y_1 + y_2 + y_3 + 0 = 0$，从而 $y_3 = -(y_1 + y_2)$. ②

因 PF 平分 $\angle APB$，由角平分线定理知，$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|FA|}{|FB|} = \frac{|y_1|}{|y_2|}$，结合 ①，②，有

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{|PA|^2}{|PB|^2} = \frac{\left(\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}\right)^2 + (y_3 - y_1)^2}{\left(\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}\right)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \frac{\left((y_1 + y_2)^2 - y_1^2\right)^2 + 16(2y_1 + y_2)^2}{\left((y_1 + y_2)^2 - y_2^2\right)^2 + 16(2y_2 + y_1)^2} =$$

$$\frac{(y_2^2 - 8)^2 + 16(4y_1^2 + y_2^2 - 16)}{(y_1^2 - 8)^2 + 16(4y_2^2 + y_1^2 - 16)} = \frac{y_2^4 + 64y_1^2 - 192}{y_1^4 + 64y_2^2 - 192}$$

即 $y_1^6 + 64y_1^2 y_2^2 - 192y_1^2 = y_2^6 + 64y_2^2 y_1^2 - 192y_2^2$，故 $(y_1^2 - y_2^2)(y_1^4 + y_1^2 y_2^2 + y_2^4 - 192) = 0$.

当 $y_1^2=y_2^2$ 时，$y_2=-y_1$，故 $y_3=0$，此时 P 与 O 重合，与条件不符.

当 $y_1^4+y_1^2y_2^2+y_2^4-192=0$ 时，注意到 ①，有 $(y_1^2+y_2^2)^2=192+(y_1y_2)^2=208$. 因 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}>8=|2y_1y_2|$，故满足 ① 以及 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}$ 的实数 y_1,y_2 存在，对应可得满足条件的点 A,B. 此时，结合 ①，② 知 $|PF|=\dfrac{y_3^2}{4}+1=\dfrac{(y_1+y_2)^2+4}{4}=\dfrac{y_1^2+y_2^2-4}{4}=\dfrac{\sqrt{208}-4}{4}=\sqrt{13}-1$.

2018 年全国高中数学联赛二试**答案** (A 卷)

一、 设 n 是正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，$A,B$ 均为正实数，满足 $a_i\leqslant b_i,a_i\leqslant A,i=1,2,\cdots,n$，且 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{B}{A}$.

证明：$\dfrac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\leqslant\dfrac{B+1}{A+1}$.

解析

由条件知，$k_i=\dfrac{b_i}{a_i}\geqslant 1,i=1,2,\cdots,n$. 记 $\dfrac{B}{A}=K$，则 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{B}{A}$ 化为 $k_1k_2\cdots k_n\leqslant K$. 要证明

$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_ia_i+1}{a_i+1}\leqslant\dfrac{KA+1}{A+1}$. ①

对 $i=1,2,\cdots,n$，由于 $k_i\geqslant 1$ 及 $0<a_i\leqslant A$ 知，$\dfrac{k_ia_i+1}{a_i+1}=k_i-\dfrac{k_i-1}{a_i+1}\leqslant k_i-\dfrac{k_i-1}{A+1}=\dfrac{k_iA+1}{A+1}$.

结合 $K\geqslant k_1k_2\cdots k_n$ 知，为证明 ①，仅需证明当 $A>0,k_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_iA+1}{A+1}\leqslant\dfrac{k_1k_2\cdots k_nA+1}{A+1}$. ②

对 n 进行归纳，当 $n=1$ 时，结论显然成立.

当 $n=2$ 时，由 $A>0,k_1,k_2\geqslant 1$ 可知 $\dfrac{k_1A+1}{A+1}\cdot\dfrac{k_2A+1}{A+1}-\dfrac{k_1k_2A+1}{A+1}=-\dfrac{A(k_1-1)(k_2-1)}{(A+1)^2}\leqslant 0$ ③

因此 $n=2$ 时结论成立.

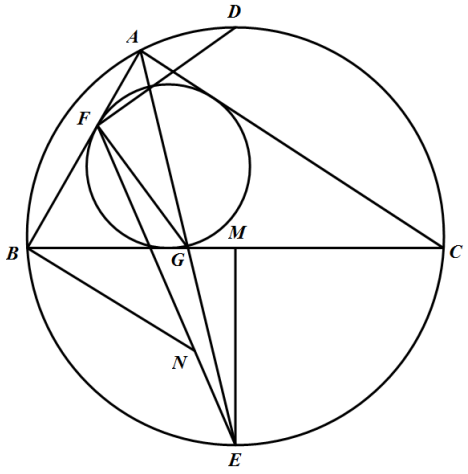
设 $n=m$ 时结论成立，则当 $n=m+1$ 时，利用归纳假设知，$\prod\limits_{i=1}^{m+1}\dfrac{k_iA+1}{A+1}=\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\dfrac{k_iA+1}{A+1}\right)\cdot\dfrac{k_{m+1}A+1}{A+1}\leqslant\dfrac{k_1k_2\cdots k_mA+1}{A+1}\cdot\dfrac{k_{m+1}A+1}{A+1}\leqslant\dfrac{k_1k_2\cdots k_{m+1}A+1}{A+1}$，

最后一步是在 ③ 中用 $k_1k_2\cdots k_m,k_{m+1}$（注意 $k_1k_2\cdots k_m\geqslant 1,k_{m+1}\geqslant 1$）分别代替 k_1,k_2. 从而 $n=m+1$ 时结论成立.

由数学归纳法可知，② 对所有正整数 n 成立，故命题得证.

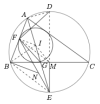
二、 如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$AB<AC$，M 为 BC 边的中点，点 D 和 E 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆弧 BAC 和弧 BC 的中点，F 为 $\triangle ABC$ 的内切圆在 AB 边上的切点，G 为 AE 与 BC 的交点，N 在线段 EF 上，满足 $NB\perp AB$.

证明：若 $BN=EM$，则 $DF\perp FG$.（答题时请将图画在答卷纸上）



解析

由条件知，DE 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，$DE\perp BC$ 于 M，$AE\perp AD$．记 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，则 I 在 AE 上，$IF\perp AB$．由 $NB\perp AB$ 可知 $\angle NBE=\angle ABE-\angle ABN=(180^\circ-\angle ADE)-90^\circ=90^\circ-\angle ADE=\angle MEI$．①



又根据内心的性质，有 $\angle EBI=\angle EBC+\angle CBI=\angle EAC+\angle ABI=\angle EAB+\angle ABI=\angle EIB$，从而 $BE=EI$．结合 $BN=EM$ 及 ① 知，$\triangle NBE\cong\triangle MEI$．于是 $\angle EMI=\angle BNE=90^\circ+\angle BFE=180^\circ-\angle EFI$，故 E,F,I,M 四点共圆．进而可知 $\angle AFM=90^\circ+\angle IFM=90^\circ+\angle IEM=\angle AGM$，从而 A,F,G,M 四点共圆．再由 $\angle DAG=\angle DMG=90^\circ$ 知，A,G,M,D 四点共圆，所以 A,F,G,M,D 五点共圆．从而 $\angle DFG=\angle DAG=90^\circ$，即 $DF\perp FG$．

三、 设 n,k,m 是正整数，满足 $k\geqslant 2$，且 $n\leqslant m<\dfrac{2k-1}{k}n$．设 A 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的 n 元子集．

证明：区间 $(0,\dfrac{n}{k-1})$ 中每个整数均可表示为 $a-a'$，其中 $a,a'\in A$．

解析

用反证法．假设存在整数 $x\in(0,\dfrac{n}{k-1})$ 不可表示为 $a-a',a,a'\in A$．作带余除法 $m=xq+r$，其中 $0\leqslant r<x$．将 $1,2,\cdots,m$ 按模 x 的同余类划分成 x 个公差为 x 的等差数列，其中 r 个等差数列有 $q+1$ 项，$x-r$ 个等差数列有 q 项．由于 A 中没有两数之差为 x，故 A 不能包含以 x 为公差的等差数列的相邻两项．从而 $n=|A|\leqslant$

$$r[\frac{q+1}{2}]+(x-r)[\frac{q}{2}]=\begin{cases}x\cdot\dfrac{q+1}{2}, 2\nmid q\\ x\cdot\dfrac{q}{2}+r, 2|q\end{cases}\quad ①$$

这里 $\lceil\alpha\rceil$ 表示不小于 α 的最小整数．由条件，我们有

$n>\dfrac{k}{2k-1}m=\dfrac{k}{2k-1}(xq+r)$．②

又 $x\in(0,\dfrac{n}{k-1})$，故 $n>(k-1)x$．③

情形一

q 是奇数，则由 ① 知，$n\leqslant x\cdot\dfrac{q+1}{2}$．④

结合 ②，④ 可知，$x\cdot\dfrac{q+1}{2}\geqslant n>\dfrac{k}{2k-1}(xq+r)\geqslant\dfrac{k}{2k-1}xq$，从而 $q<2k-1$．再由 q 是奇数可知，$q\leqslant 2k-3$，于是 $n\leqslant x\cdot\dfrac{q+1}{2}\leqslant(k-1)x$，与 ③ 矛盾．

情形二

q 是偶数，则由 ① 知，$n\leqslant x\cdot\dfrac{q}{2}+r$．⑤

结合 ②，⑤ 可知，$x\cdot\dfrac{q}{2}+r\geqslant n>\dfrac{k}{2k-1}(xq+r)$，从而 $\dfrac{xq}{2(2k-1)}<\dfrac{k-1}{2k-1}r<\dfrac{(k-1)x}{2k-1}$，故 $q<2(k-1)$．再由 q 是偶数可知，$q\leqslant 2k-4$，于是 $n\leqslant x\cdot\dfrac{q}{2}+r\leqslant(k-2)x+r<(k-1)x$，与 ③ 矛盾．

综上可知，反证法假设不成立，结论获证．

四、 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：a_1 是任意正整数，对整数 $n\geqslant 1$，a_{n+1} 是与 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 互素，且不等于 $a_1,\cdots,a_n$ 的最小整数．

证明：每个正整数均在数列 $\{a_n\}$ 中出现．

解析

显然 $a_1=1$ 或 $a_2=1$．下面考虑整数 $m>1$，设 m 有 k 个不同素因子，我们对 k 归纳证明 m 在 $\{a_n\}$ 中出现．记 $S_n=a_1+\cdots+a_n, n\geqslant 1$．

$k=1$ 时，m 时素数方幂，设 $m=p^a$，其中 $a>0$，p 是素数．假设 m 不在 $\{a_n\}$ 中出现．由于 $\{a_n\}$ 各项互不相同，因此存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，都有 $a_n>p^a$．若对某个 $n\geqslant N, p\nmid S_n$，那么 p^a 与 S_n 互素，又 $a_1,\cdots,a_n$ 中无一项是 p^a，故由数列定义知 $a_{n+1}\leqslant p^a$，但是 $a_{n+1}>p^a$，矛盾!

因此对每个 $n\geqslant N$，都有 $p|S_n$，但由 $p|S_{n+1}$ 及 $p|S_n$ 知 $p|a_{n+1}$，从而 a_{n+1} 与 S_n 不互素，这与 a_{n+1} 的定义矛盾．

假设 $k\geqslant 2$，且结论对 $k-1$ 成立．设 m 的标准分解为 $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，假设 m 不在 $\{a_n\}$ 中出现，于是存在正整数 N'，当 $n\geqslant N'$ 时，都有 $a_n>m$．取充分大的正整数 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$，使得 $M=p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}>\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N'}a_n$．

我们证明，对 $n\geqslant N'$，有 $a_{n+1}\neq M$．对任意 $n\geqslant N'$，若 S_n 与 $p_1p_2\cdots p_k$ 互素，则 m 与 S_n 互素，又 m 在 $a_1,\cdots,a_n$ 中均未出现，而 $a_{n+1}>m$，这与数列的定义矛盾．因

此我们推出：对任意 $n \geqslant N'$，S_n 与 $p_1p_2\cdots p_k$ 不互素．（*）

情形一

若存在 $i(1 \leqslant i \leqslant k-1)$，使得 $p_i|S_n$，因 $(a_{n+1}, S_n) = 1$，故 $p_i \nmid a_{n+1}$，从而 $a_{n+1} \neq M$（因 $p_i|M$）．

情形二

若对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant k-1)$，均有 $p_i \nmid S_n$，则由（*）知必有 $p_k|S_n$．于是 $p_k \nmid a_{n+1}$，进而 $p_k \nmid S_n + a_{n+1}$，即 $p_k \nmid S_{n+1}$．故由（*）知，存在 $i_0(1 \leqslant i_0 \leqslant k-1)$，使得 $p_{i_0}|S_{n+1}$，再由 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 及前面的假设 $p_i \nmid S_n(1 \leqslant i \leqslant k-1)$，可知 $p_{i_0} \nmid a_{n+1}$，故 $a_{n+1} \neq M$．因此对 $n \geqslant N' + 1$，均有 $a_n \neq M$，而 $M > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N'} a_n$，故 M 不在 $\{a_n\}$ 中出现，这与归纳假设矛盾．因此，若 m 有 k 个不同素因子，则 m 一定在 $\{a_n\}$ 中出现．由数学归纳法知，所有正整数均在 $\{a_n\}$ 中出现．