2017 年全国高中数学联赛一试**答案** (B 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$，则 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$ 的值为_____.

解析 $\dfrac{8}{9}$.

根据题意，有

$$\frac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}=\frac{a_1}{a_7}=\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^6=\frac{8}{9}.$$

2. 设复数 z 满足 $z+9=10\overline{z}+22\mathrm{i}$，则 $|z|$ 的值为_____.

解析 $\sqrt{5}$.

根据题意，有

$$z-10\overline{z}=-9+22\mathrm{i},$$

于是

$$\overline{z}-10z=-9-22\mathrm{i},$$

两式相加可得

$$-9\left(z+\overline{z}\right)=-18\mathrm{Re}(z)=-18,$$

两式相减可得

$$11\left(z-\overline{z}\right)=22\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}=44\mathrm{i},$$

因此

$$|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数，$f(x)+2^x$ 是偶函数，则 $f(1)$ 的值是_____.

解析 $-\dfrac{7}{4}$.

根据题意，有

$$\begin{cases}f(1)+1=-\left[f(-1)+1\right],\\ f(1)+2=f(-1)+2^{-1},\end{cases}$$

解得

$$f(1)=-\frac{7}{4},f(-1)=-\frac{1}{4}.$$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=2\sin C$，且三条边 a,b,c 成等比数列，则 $\cos A$ 的值是_____.

解析　$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理，可得

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=2,$$

又 a,b,c 成等比数列，于是

$$(a,b,c)=\left(2c,\sqrt{2}c,c\right).$$

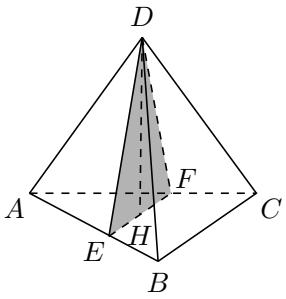
因此根据余弦定理，有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\sqrt{2}c\right)^2+c^2-(2c)^2}{2\cdot\sqrt{2}c\cdot c}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5. 在正四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别在棱 AB,AC 上，满足 $BE=3$，$EF=4$，且 EF 与面 BCD 平行，则 $\triangle DEF$ 的面积为_____.

解析　$2\sqrt{33}$.

过 D 作 EF 的垂线，垂足为 H，如图.



由线面平行的性质定理，$EF\parallel BC$，因此

$$AE=EF=FA=4,$$

于是

$$\begin{aligned}DE^2&=AD^2+AE^2-2\cdot AD\cdot AE\cdot\cos 60^\circ\\&=7^2+4^2-2\cdot 7\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\\&=37.\end{aligned}$$

于是 $\triangle DEF$ 的面积

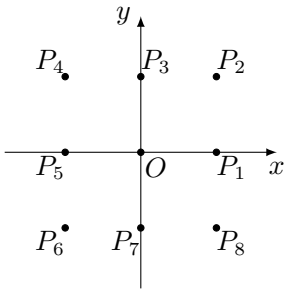
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot DH\\&=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot\sqrt{DE^2-\left(\frac{1}{2}EF\right)^2}\\&=2\sqrt{33},\end{aligned}$$

因此所求的面积为 $2\sqrt{33}$.

6. 在平面直角坐标系 xOy，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y\in -1,0,1\}$．在 K 中随机取出三个点，则这三个点两两之间的距离均不超过 2 的概率是_____.

解析　$\dfrac{5}{14}$.

如图，点集 $K=\{O,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\}$.



三个点两两之间的距离可能为 $1,\sqrt{2},2,\sqrt{5},2\sqrt{2}$．因此有如下情形.

情形 1: 两两之间的距离为 $1,1,\sqrt{2}$，共有 16 个.

情形 2: 两两之间的距离为 $1,1,2$，共有 6 个.

情形 3: 两两之间的距离为 $\sqrt{2},\sqrt{2},2$，共有 8 个.

综上所述．所求的概率为

$$\frac{16+6+8}{\mathrm{C}_9^3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}.$$

7. 设 a 为非零实数，在平面直角坐标系中 xOy 中，二次曲线 $x^2+ay^2+a^2=0$ 的焦距为 4，则 a 的值为_____.

解析　$\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

题中方程即

$$\frac{y^2}{-a}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

因此 $-a>0$ 且该方程表示焦点在 y 轴上的双曲线，且焦距

$$2\sqrt{-a+a^2}=4,$$

解得

$$a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}.$$

8. 若正整数 a,b,c 满足 $2017\geqslant 10a\geqslant 100b\geqslant 1000c$，则数组 (a,b,c) 的个数为_____.

解析　574.

根据题意，有 $c=1,2$.

情形 1: 当 $c=1$ 时，有 $10 \leqslant b \leqslant 20$，且 $10b \leqslant a \leqslant 201$，于是对应的数组 (a,b,c) 的个数为

$$\sum_{b=10}^{20}(202-10b)=\frac{(102+2)\times 11}{2}=572.$$

情形 2: 当 $c=2$ 时，有 $b=20$，于是

$$200 \leqslant a \leqslant \left[\frac{2017}{10}\right]=201,$$

因此对应的数组 (a,b,c) 的个数为 2.

综上所述，满足题意的数组 (a,b,c) 的个数为 574.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 设不等式 $|2^x-a|<|5-2^x|$ 对所有 $x\in[1,2]$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解析 $(3,5)$.

根据题意，有

$$\forall x\in[1,2],|2^x-a|<5-2^x,$$

即

$$\forall x\in[1,2],2^x-5<2^x-a<5-2^x,$$

也即

$$\forall x\in[1,2],2\cdot 2^x-5<a<5,$$

也即

$$3<a<5.$$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2$，$n=1,2,\cdots$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列；

（2）设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公差均是 $d\neq 0$，并且存在正整数 s,t，使得 a_s+b_t 是整数，求 $|a_1|$ 的最小值.

解析 （1）见解析

（2）$\dfrac{1}{18}$.

(1) 不妨设 $a_n=a+nd$，$n\in\mathbb{N}^*$，则

$$\begin{aligned}b_n&=[a+(n+1)d]\cdot[a+(n+2)d]-(a+nd)^2\\&=[dn+(a+d)]\cdot[dn+(a+2d)]-(dn+a)^2\\&=\left[d^2n^2+\left(2ad+3d^2\right)n+\left(a^2+3ad+2d^2\right)\right]-\left(d^2n^2+2adn+a^2\right)\\&=3d^2n+\left(3ad+2d^2\right),\end{aligned}$$

因此数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

(2) 根据题意，有 $3d^2=d$，因此 $d=\dfrac{1}{3}$，于是

$$b_n=\frac{1}{3}n+a+\frac{2}{9}=a_n+\frac{2}{9},$$

进而

$$\begin{aligned}a_s+b_t&=a_s+a_t+\frac{2}{9}\\&=2a_1+\frac{s+t-2}{3}+\frac{2}{9},\end{aligned}$$

于是

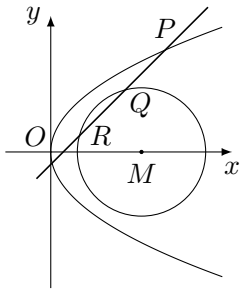
$$18a_1=3\left[3\left(a_s+b_t\right)-s-t+1\right]+1,$$

因此

$$\left|18a_1\right|\geqslant 1,$$

又当 $(a_1,s,t)=\left(\dfrac{1}{18},1,3\right)$ 时，$a_s+b_t=1$ 符合题意，因此所求 $|a_1|$ 的最小值为 $\dfrac{1}{18}$.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:y^2=4x$，曲线 $C_2:(x-4)^2+y^2=8$．经过 C_1 上一点 P 作一条倾斜角为 45° 的直线 l，与 C_2 交于两个不同的点 Q,R，求 $|PQ|\cdot|PR|$ 的取值范围.



解析　$[4,8)\cup(8,200)$.

设 $P\left(4t^2,4t\right)$，则直线

$$l:x-y-4t^2+4t=0.$$

该直线与圆相交，因此

$$\frac{\left|4-4t^2+4t\right|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2},$$

即

$$-1<t^2-t-1<1,$$

解得 t 的取值范围是 $(-1,0)\cup(1,2)$.

联立曲线 C_1, C_2 的方程可得

$$x^2-4x+8=0,$$

于是 C_1 与 C_2 没有公共点. 因此有

$$|PQ|\cdot|PR|=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR},$$

根据圆幂定理，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}&=PM^2-8\\&=\left(4t^2-4\right)^2+(4t)^2-8\\&=16t^4-16t^2+8\\&=16\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+4,\end{aligned}$$

因此所求的取值范围是 $[4,8)\cup(8,200)$.

2017 年全国高中数学联赛二试**答案** (B 卷)

一、 设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$．证明：

$$|(1+a)(1+b)(1+c)|\geqslant 1-d^2.$$

解析

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $a\leqslant 0$ 且 $c\geqslant 0$．若 $d\geqslant 1$，则不等式显然成立．下面考虑 $0\leqslant d<1$ 的情形，此时 $a,b,c\in(-1,1)$，于是

$$m=|(1+a)(1+b)(1+c)|=(1+a)(1+b)(1+c).$$

当 $b\geqslant 0$ 时，有

$$m\geqslant(1+a)(1+b+c)=1-a^2\geqslant 1-d^2,$$

类似的，当 $b<0$ 时，有

$$m\geqslant(1+a+b)(1+c)=1-c^2\geqslant 1-d^2,$$

因此原不等式得证．

二、 给定正整数 m，证明：存在正整数 k，使得可将正整数集 $\mathbb{N}^*$ 分拆为 k 个互不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，每个子集 A_i 中均不存在 4 个数 a,b,c,d（可以相同），满足 $ab-cd=m$．

解析

取 $k=m+1$，令

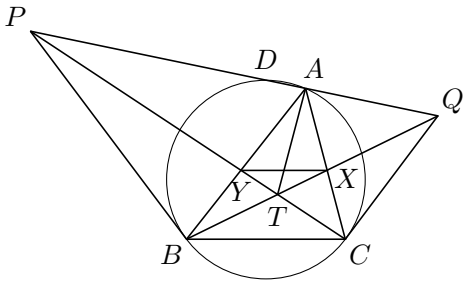
$$A_i=\{x\mid x\equiv i\pmod{m+1},x\in\mathbb{N}^*\},$$

其中 $i=1,2,\cdots,m+1$．设 $a,b,c,d\in A_i$，则

$$ab-cd\equiv i\cdot i-i\cdot i=0\equiv 0\pmod{m+1},$$

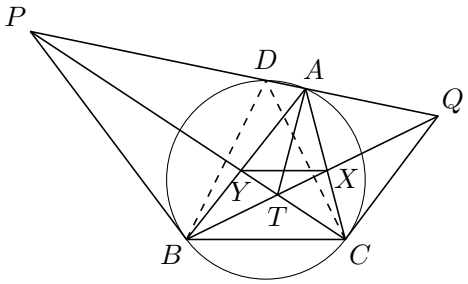
故 $m+1\mid ab-cd$，而 $m+1\nmid m$，所以 A_i 中不存在 4 个数 a,b,c,d 满足 $ab-cd=m$．

三、 如图，点 D 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 上弧 BC 的中点，直线 DA 与圆 ω 过点 B,C 的切线分别相交于点 P,Q，BQ 与 AC 的交点为 X，CP 与 AB 的交点为 Y，BQ 与 CP 的交点为 T．求证：AT 平分线段 XY．



解析

首先证明 $YX \parallel BC$，即证 $\dfrac{AX}{XC}=\dfrac{AY}{YB}$. 连接 BD, CD，如图.



为了方便我们直接用三角形代表该三角形的面积，因为

$$\frac{\triangle ACQ}{\triangle ABC}\cdot\frac{\triangle ABC}{\triangle ABP}=\frac{\triangle ACQ}{\triangle ABP},$$

于是

$$\frac{AC\cdot CQ\cdot\sin\angle ACQ}{AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}\cdot\frac{AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB}{AB\cdot BP\cdot\sin\angle ABP}=\frac{AC\cdot AQ\cdot\angle CAQ}{AB\cdot AP\cdot\sin\angle BAP}.$$

根据弦切角定理，有

$$\angle ACQ=\angle ABC, \angle ACB=\angle ABP,$$

又 D 是弧 BC 的中点，于是

$$\angle CAQ=\angle DBC=\angle DCB=\angle BAP,$$

于是可得

$$\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP}=\frac{CQ}{BP}.$$

因为 $\angle CAQ=\angle BAP$，所以 $\angle BAQ=\angle CAP$，于是

$$\frac{\triangle ABQ}{\triangle ACP}=\frac{AB\cdot AQ\cdot\sin\angle BAQ}{AC\cdot AP\cdot\sin\angle CAP}=\frac{AB\cdot AQ}{AC\cdot AP},$$

而

$$\frac{\triangle BCQ}{\triangle BCP}=\frac{BC\cdot CQ\cdot\sin\angle BCQ}{BC\cdot BP\cdot\sin\angle CBP}=\frac{CQ}{BP},$$

因此可得

$$\frac{\triangle ABQ}{\triangle ACP}=\frac{\triangle CBQ}{\triangle BCP},$$

即

$$\frac{\triangle ABQ}{\triangle CBQ}=\frac{\triangle ACP}{\triangle BCP},$$

又

$$\frac{\triangle ABQ}{\triangle CBQ}=\frac{AX}{XC},\frac{\triangle ACP}{\triangle BCP}=\frac{AY}{YB},$$

故 $\dfrac{AX}{XC}=\dfrac{AY}{YB}$.

设 BC 边的中点为 M，因为

$$\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BY}{YA}=1,$$

所以由塞瓦定理的逆定理可知 AM,BX,CY 三线共点于 T，故由 $YX\parallel BC$ 可知 AT 平分线段 XY.

四、 设 m,n 均是大于 1 的整数，$m\geqslant n$. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素. 证明：对任意实数 x，均存在一个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 $||a_ix||\geqslant\dfrac{2}{m(m+1)}||x||$，这里 $||y||$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离.

解析

首先证明以下两个结论.

结论一: 存在整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1,$$

并且 $|c_i|\leqslant m$，$1\leqslant i\leqslant n$.

证明: 由于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，由裴蜀定理，存在正整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1.$$

下面证明，通过调整，存在一组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足上式，且绝对值均不超过 m. 记

$$S_1=S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_i>m}c_i\geqslant 0,$$

$$S_2=S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_i<-m}|c_i|\geqslant 0,$$

如果 $S_1>0$，那么存在 $c_i>m>1$，于是 $c_ia_i>1$，又因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数，故由上式可知存在 $c_j<0$．令

$$\left(c_i',c_j',c_k'\right)=\left(c_i-a_j,c_j+a_i,c_k\right),$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n$，$k\neq i,j$，则

$$c_1'a_1+c_2'a_2+\cdots+c_n'a_n=1,$$

并且

$$0\leqslant m-a_j<c_i'<c_i,c_j<c_j'<a_i\leqslant m,$$

因为 $c_i'<c_i$，且 $c_j'<m$，所以

$$S_1\left(c_1',c_2',\cdots,c_n'\right)<S_1\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right).$$

又 $c_j'>c_j$ 及 $c_i'>0$，故

$$S_2\left(c_1',c_2',\cdots,c_n'\right)\leqslant S_2\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right).$$

如果 $S_2>0$，那么存在 $c_j<-m$，因此有一个 $c_i>0$．令

$$\left(c_i',c_j',c_k'\right)=\left(c_i-a_j,c_j+a_i,c_k\right),$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n$，$k\neq i,j$，那么

$$c_1'a_1+c_2'a_2+\cdots+c_n'a_n=1$$

成立，并且

$$-m<c_i'<c_i,c_j<c_j'<0.$$

与上面类似地可知

$$S_1\left(c_1',c_2',\cdots,c_n'\right)\leqslant S_1\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right),$$

且

$$S_2\left(c_1',c_2',\cdots,c_n'\right)<S_2\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right).$$

因为 S_1,S_2 均为非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1,$$

并且 $|c_i|\leqslant m$，$1\leqslant i\leqslant n$．且 $S_1=S_2=0$，结论一获证．
结论二: 对任意实数 a,b，均有

$$||a+b||\leqslant||a||+||b||.$$

对任意整数 u 和实数 y，均有

$$||uy|| \leqslant |u| \cdot ||y||.$$

证明: 由于对任意整数 u 和实数 x，有

$$||x+u|| = ||x||,$$

故不妨设 $a, b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，此时

$$||a|| = |a|, ||b|| = |b|.$$

因为 $||x|| \leqslant |x|$，所以

$$||a+b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b| = ||a|| + ||b||,$$

多次使用该结论有 $||uy|| \leqslant |u| \cdot ||y||$，于是结论二获证.
回到原题: 由结论一，存在整数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = 1,$$

并且 $|c_i| \leqslant m$，$1 \leqslant i \leqslant n$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i x = x.$$

利用结论二得

$$\begin{aligned} ||x|| &= \Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} c_i a_i x \Big|\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} ||c_i| \cdot ||a_i x||) \\ &\leqslant m \sum_{i=1}^{n} ||a_i x|| \\ &\leqslant mn \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x||, \end{aligned}$$

因此

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x|| \geqslant \frac{1}{mn} ||x||.$$

若 $n \leqslant \frac{1}{2}(m+1)$，则

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x|| \geqslant \frac{||x||}{mn} \geqslant \frac{2||x||}{m(m+1)}.$$

若 $n>\dfrac{1}{2}(m+1)$，则在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中存在两个相邻正整数，不妨设 a_1,a_2 相邻，则

$$||x||=||a_2x-a_1x||\leqslant||a_2x||+||a_1x||,$$

故

$$\max\{||a_1x||,||a_2x||\}\geqslant\frac{||x||}{2}\geqslant\frac{2||x||}{m(m+1)}.$$

综上所述，总存在一个 i（$1\leqslant i\leqslant n$），满足

$$||a_ix||\geqslant\frac{2}{m(m+1)}||x||,$$

命题得证.

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}\in\{1,2,\cdots,5\}$，$b_1,b_2,\cdots,b_{20}\in\{1,2,\cdots,10\}$，集合 $X=\{(i,j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant 20,(a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

解析　160.

考虑一组满足条件的正整数

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_{20},b_1,b_2,\cdots,b_{20}\}.$$

对 $k=1,2,\cdots,5$，设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$ 中取值为 k 的数有 t_k 个. 根据 X 的定义，当 $a_i=a_j$ 时，$(i,j)\notin X$，因此至少有 $\sum\limits_{k=1}^{5}\mathrm{C}_{t_k}^2$ 个 (i,j) 不在 X 中. 注意到

$$\sum_{k=1}^{5}t_k=20,$$

由柯西不等式，有

$$\sum_{k=1}^{5}\mathrm{C}_{t_k}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{5}t_k^2-\sum_{k=1}^{5}t_k\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{5}t_k\right)^2-\sum_{k=1}^{5}t_k\right)=30,$$

从而 X 的元素个数不超过

$$\mathrm{C}_{20}^2-30=160.$$

另一方面，取

$$a_{4k-3}=a_{4k-2}=a_{4k-1}=a_{4k}=k,$$

其中 $k=1,2,\cdots,5$，且

$$b_i=6-a_i,$$

其中 $i=1,2,\cdots,20$，则对任意 i,j（$1\leqslant i<j\leqslant 20$），有

$$(a_i-a_j)(b_i-b_j)=(a_i-a_j)\left[(6-a_i)-(6-a_j)\right]=-(a_i-a_j)^2\leqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $a_i=a_j$，这恰好发生 $5\mathrm{C}_4^2=30$ 次. 此时 X 的元素个数取得 160.

综上所述，X 的元素个数的最大值为 160.