2017 年全国高中数学联赛一试**答案** (A 卷)

一、 填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$，又当 $0\leqslant x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为_____.

解析 $-\dfrac{1}{2}$.

根据题意，有

$$f(x+7)=-\frac{1}{f(x)},$$

进而可得

$$f(x+14)=f(x),$$

于是

$$f(-100)=f(-2)=-\frac{1}{f(5)}=-\frac{1}{\log_2(9-5)}=-\frac{1}{2}.$$

2. 若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是_____.

解析 $\left[-1,\sqrt{3}+1\right]$.

根据题意，有

$$\cos y=\frac{1-x^2}{2},$$

于是

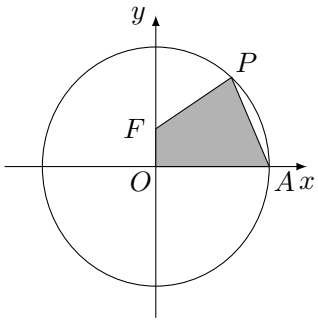
$$x-\cos y=x-\frac{1-x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2},$$

其中

$$-1\leqslant\frac{1-x^2}{2}\leqslant 1,$$

即 x 的取值范围是 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. 因此所求的代数式取值范围是 $\left[-1,\sqrt{3}+1\right]$.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为_____.



解析　$\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

(1) 设 $P\left(3\cos\theta,\sqrt{10}\sin\theta\right)$，$\theta\in(0,\pi)$，则四边形 $OAPF$ 的面积

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OFP}\\&=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cos\theta\\&=\frac{3}{2}\left(\sqrt{10}\sin\theta+\cos\theta\right)\\&\leqslant\frac{3\sqrt{11}}{2},\end{aligned}$$

等号当 $\theta=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 时取得．因此所求面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

(2) 作仿射变换 $(x',y')=\left(x,\dfrac{3}{\sqrt{10}}y\right)$，则 $A'(3,0)$，$F'\left(0,\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$，$OP'=3$，且四边形 $OAPF$ 的面积

$$\begin{aligned}OAPF&=\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot OA'P'F'\\&\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot OP'\cdot A'F'\\&=\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}\\&=\frac{3\sqrt{11}}{2},\end{aligned}$$

等号当 $OP'\perp A'F'$ 时取得，因此所求面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过 1，则称其为“平稳数”．平稳数的个数是 _____.

解析　75.

设平稳数为 $\overline{abc}$.

情形 1: $b=0$，此时 $a=1$，$c\in\{0,1\}$，有 $1\cdot 2=2$ 个平稳数.

情形 2: $b=1$，此时 $a\in\{1,2\}$，$c\in\{0,1,2\}$，有 $2\cdot 3=6$ 个平稳数.

情形 3: $b=k$，其中 $k=2,3,\cdots,8$，此时 $a,c\in\{k-1,k,k+1\}$，有 $7\cdot 3\cdot 3=63$ 个平稳数.

情形 4: $b=9$，此时 $a,c\in\{8,9\}$，有 $2\cdot 2=4$ 个平稳数.

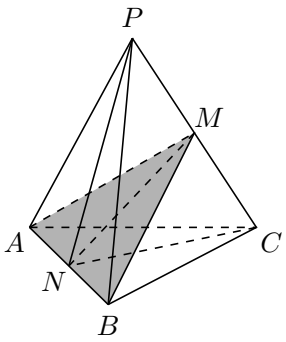
综上所述，平稳数的个数为

$$2+6+63+4=75.$$

5. 正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=1,AP=2$，过 AB 的平面 α 将其体积平分，则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为 _____.

解析 $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

根据题意，平面 α 与棱 PC 交于 PC 的中点 M，设 N 为 AB 的中点，如图.



由平行四边形的性质可得

$$AM^2=\frac{1}{2}\left(AP^2+AC^2\right)-\frac{1}{4}PC^2=\frac{3}{2},$$

进而

$$MN=\sqrt{AM^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

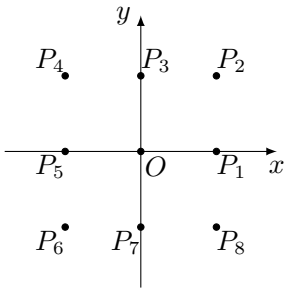
由于 CN 过底面中心，因此平面 PNC 包含过 P 的底面垂线，因此 PC 在平面 α 内的投影为 MN，于是

$$\cos\langle PC,MN\rangle=\left|\frac{MN^2+MC^2-CN^2}{2\cdot MN\cdot MC}\right|=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$. 在 K 中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为 $\sqrt{5}$ 的概率为_____.

解析 $\dfrac{4}{7}$.

如图，点集 $K=\{O,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\}$.



记 $P_k=P_{k-8}$，$k\geqslant 9$，则

$$P_iP_{i+3}=\sqrt{5},i=1,2,\cdots,8.$$

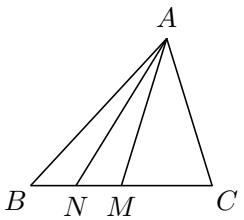
选其中的一对点，然后再从剩下的 7 个点中选一个，共有 56 种选法．其中形如

$$\{P_i,P_{i+3},P_{i+6}\},i=1,2,\cdots,8$$

的三点组被计算了 2 次，因此满足条件的三点组共有 $56-8=48$ 个，所求的概率为

$$\frac{48}{\mathrm{C}_9^3}=\frac{48}{84}=\frac{4}{7}.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是边 BC 的中点，N 是线段 BM 的中点．若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为_____.



解析　$\sqrt{3}+1$.

记 $AB=c$，$AC=a$，则根据题意

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sin A\cdot bc=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3},$$

于是 $bc=4$. 因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{8}\left(3AB^2+AC^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{8}\left(3c^2+b^2+2bc\right)\\&\geqslant\frac{1}{8}\left(2\sqrt{3}+2\right)bc\\&=\sqrt{3}+1,\end{aligned}$$

等号当 $b=\sqrt{3}c$ 时取得，因此所求的最小值为 $\sqrt{3}+1$.

8. 设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则 a_1+b_1 的所有可能值为_____.

解析　$13,20$.

考虑到 $2^{10}=1024$，而

$$b_{10}=2^9\cdot b_1,$$

于是 $b_1=1,2,3$，对应的 $b_{10}=512,1024,1536$. 而

$$a_{10}=a_9+a_8=2a_8+a_7=\cdots=34a_2+21a_1,$$

因此

$$21a_1\equiv 2b_1\pmod{34},$$

注意到

a_1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
$21a_1\pmod{34}$	8	16	24	32	6	14	22	30	4	12	20	28	2	10	18	26	0

于是 $(a_1,b_1,a_2)=(10,3,39),(18,2,19)$. 因此所有可能的 a_1+b_1 的值为 13 和 20.

二、 **解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分，第 10、11 题满分 20 分.**

9. 设 k,m 为实数，不等式 $|x^2-kx-m|\leqslant 1$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立. 证明：$b-a\leqslant 2\sqrt{2}$.

解析

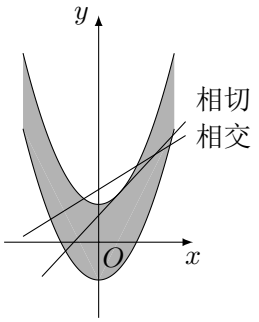
解法一:

根据题意，有

$$\forall x\in[a,b],x^2-1\leqslant kx+m\leqslant x^2+1.$$

如图，考虑直线 $y=kx+m$ 截图中阴影部分得到的线段在 x 轴上的投影长度. 不妨设 $k\geqslant 0$. 分别记

$$\Delta_1=k^2+4m-4,\Delta_2=k^2+4m+4.$$



情形 1: 直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y=x^2+1$ 相交，即 $\Delta_1>0$．且有

$$\begin{aligned} b-a &\leqslant \left|\frac{k+\sqrt{\Delta_2}}{2}-\frac{k+\sqrt{\Delta_1}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{k^2+4m+4}-\sqrt{k^2+4m-4}\right| \\ &= \frac{4}{\sqrt{k^2+4m+4}+\sqrt{k^2+4m-4}} \\ &< \frac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{0}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

情形 2: 直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y=x^2+1$ 相离且与抛物线 $y=x^2-1$ 相交，此时将直线 $y=kx+m$ 向上平移，直至与抛物线 $y=x^2+1$ 相切可以使得线段投影长度增大，因此此时无法取得最大值．

情形 3: 直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，即 $\Delta_1=0$．此时

$$b-a \leqslant \frac{2\sqrt{\Delta_2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

综上所述，原命题得证．解法二:

根据题意，有

$$\begin{cases} |b^2-kb-m| \leqslant 1, \\ |a^2-ka-m| \leqslant 1, \\ \left|\left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2-k\cdot\dfrac{b+a}{2}-m\right| \leqslant 1, \end{cases}$$

于是

$$(b-a)^2 \leqslant 2\left|b^2-kb-m\right|+2\left|a^2-ka-m\right|+4\left|\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-k\cdot\frac{b+a}{2}-m\right| \leqslant 8,$$

于是原命题得证．

10. 设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求 $(x_1+3x_2+5x_3)\left(x_1+\dfrac{x_2}{3}+\dfrac{x_3}{5}\right)$ 的最小值和最大值.

解析　最小值为 1，最大值为 $\dfrac{9}{5}$.

解法一:

设题中代数式为 M，则

$$\begin{aligned}M&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{10}{3}x_1x_2+\frac{34}{15}x_2x_3+\frac{26}{5}x_3x_1\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{4}{15}(5x_1x_2+x_2x_3+12x_3x_1)\\&=1+\frac{4}{15}(5x_1x_2+x_2x_3+12x_3x_1).\end{aligned}$$

一方面，有

$$5x_1x_2+x_2x_3+12x_3x_1\geqslant 0,$$

等号当 $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$ 时取得，因此 M 的最小值为 1.

另一方面，有

$$\begin{aligned}5x_1x_2+x_2x_3+12x_3x_1&\leqslant 6x_1x_2+6x_2x_3+6x_3x_1+3x_3^2+3x_1^2\\&\leqslant 3\left(x_1+x_2+x_3\right)^2\\&=3,\end{aligned}$$

等号当 $(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时取得，因此 M 的最大值为 $\dfrac{9}{5}$.

解法二:

设题中代数式为 M，则

$$M=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{10}{3}x_1x_2+\frac{34}{15}x_2x_3+\frac{26}{5}x_3x_1\geqslant(x_1+x_2+x_3)^2=1,$$

等号当 $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$ 时取得，因此 M 的最小值为 1.

另一方面，有

$$5M=(x_1+3x_2+5x_3)\left(5x_1+\frac{5}{3}x_2+x_3\right)\leqslant\left(3x_1+\frac{7}{3}x_2+3x_3\right)^2\leqslant(3x_1+3x_2+3x_3)^2,$$

等号当 $(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时取得，因此 M 的最大值为 $\dfrac{9}{5}$.

11. 设复数 z_1,z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$，其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部.

（1）求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

（2）求 $|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值.

解析　（1）2；

（2）$4\sqrt{2}$.

(1) 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，$k=1,2$．根据题意，有 $x_1,x_2>0$，且

$$x_1^2-y_1^2=x_2^2-y_2^2=2.$$

于是 $P_1(x_1,y_2)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 都是双曲线 $H:x^2-y^2=2$ 右支上的点．而

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{y_1^2+2}\cdot\sqrt{y_2^2+2}-y_1y_2\\&=\sqrt{y_1^2y_2^2+2y_1^2+2y_2^2+4}-y_1y_2\\&\geqslant\sqrt{y_1^2y_2^2+4y_1y_2+4}-y_1y_2\\&=|y_1y_2+2|-y_1y_2\\&\geqslant 2,\end{aligned}$$

等号当 $y_1=y_2$ 时取得．因此所求的最小值为 2．

(2) 由共轭复数的性质，有

$$m=|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|=|z_1-(-2)|+|\overline{z_2}-(-2)|-|z_1-\overline{z_2}|,$$

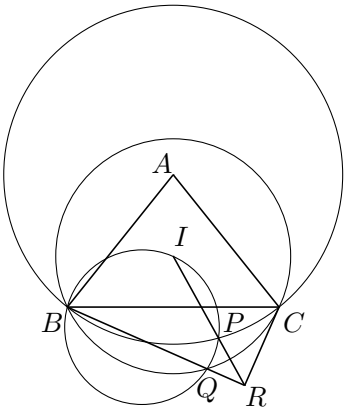
记 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 为双曲线 H 的左、右焦点，P_2' 为 P_2 关于 x 轴的对称点（该点仍然在双曲线 H 上），于是

$$m=|P_1F_1|+|P_2'F_1|-|P_1P_2'|=2\sqrt{2}+|P_1F_2|+2\sqrt{2}+|P_2'F_2|-|P_1P_2'|\geqslant 4\sqrt{2},$$

等号当 F_2 在线段 P_1P_2' 时取得．因此所求的最小值为 $4\sqrt{2}$.

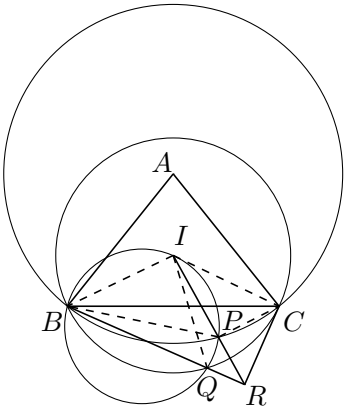
2017 年全国高中数学联赛二试**答案** (A 卷)

一、 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，I 为 $\triangle ABC$ 的内心．以 A 为圆心，AB 为半径作圆 Γ_1，以 I 为圆心，IB 为半径作圆 Γ_2，过点 B,I 的圆 Γ_3 与 Γ_1,Γ_2 分别交于点 P,Q（不同于点 B）．设 IP 与 BQ 交于点 R．证明：$BR\perp CR$.



解析

如图，连接 IB,IC,IQ,PB,PC.



由于点 Q 在圆 Γ_2 上，故 $IB=IQ$，所以

$$\angle IBQ=\angle IQB.$$

又 B,I,P,Q 四点共圆，所以 $\angle IQB=\angle IPB$，于是 $\angle IBQ=\angle IPB$，故 $\triangle IBP$ 与

$\triangle IRB$ 相似，从而有 $\angle IRB=\angle IBP$，且

$$\frac{IB}{IR}=\frac{IP}{IB},$$

注意到 $AB=AC$，且 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，故 $IB=IC$，所以

$$\frac{IC}{IR}=\frac{IP}{IC},$$

于是 $\triangle ICP$ 与 $\triangle IRC$ 相似，故

$$\angle IRC=\angle ICP.$$

又点 P 在圆 Γ_1 的弧 BC 上，故

$$\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A,$$

因此

$$\begin{aligned}\angle BRC&=\angle IRB+\angle IRC\\&=\angle IBP+\angle ICP\\&=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

故 $BR\perp CR$.

二、 设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, & a_n\leqslant n,\\ a_n-n, & a_n>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

求满足 $a_r<r\leqslant 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

解析 $\dfrac{3^{2017}-2019}{2}$.

先计算数列的前几项：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	2	4	1	5	10	4	11	3	12	2	13	1	14	28	13
	$=$	$=$	$>$	$<$	$=$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$=$	$>$	$<$

归纳出

引理: 若 $a_r=r$，则对 $k=1,2,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2k-1}=2r+k-1>r+2k-1,$$

$$a_{r+2k}=r-k<r+2k.$$

对 k 进行归纳证明.

归纳基础: 当 $k=1$ 时，由于 $a_r=r\leqslant r$，根据定义，有

$$a_{r+1}=a_r+r=2r>r+1,$$
$$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=r-1<r+2,$$

命题成立.

推理证明: 假设对某个 k（$1\leqslant k<r-1$）成立，则由定义

$$a_{r+2k+1}=a_{r+2k}+(r+2k)=2r+k>r+2k+1,$$
$$a_{r+2k+2}=a_{r+2k+1}-(r+2k+1)=r-k-1<r+2k+2,$$

于是命题对 $k+1$ 也成立.

综上所述，引理得证.

根据引理，将所有满足 $a_r=r$ 的正整数 r 从小到大排列为

$$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots,$$

则有

$$r_{n+1}=3r_n-1,n=1,2,\cdots.$$

利用不动点法容易求得

$$r_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2},n\in\mathbb{N}^*.$$

由于

$$r_{2018}=\frac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\frac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019},$$

于是不超过 3^{2017} 的正整数被如下分段

$$r_1,r_2,\cdots,r_3,\cdots,r_4,\cdots,\cdots,\cdots,r_{2017},\cdots,r_{2018},\cdots,3^{2017},$$

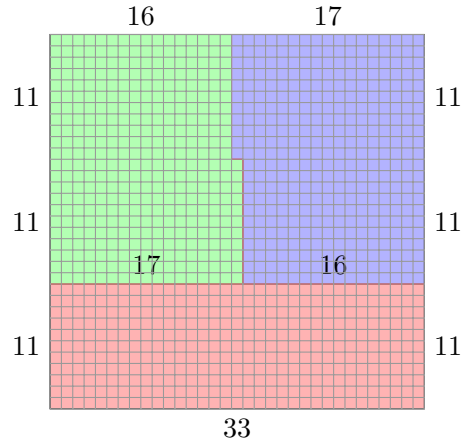
其中在 r_k 和 r_{k+1} 之间的数恰有一半满足 $a_r<r$，在 r_{2018}（这是一个偶数）到 3^{2017} 中所有的偶数 r 均满足 $a_r<r$，所有奇数 r 均满足 $a_r>r$. 因此满足条件的正整数 r 的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}.$$

三、 将 33×33 方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”. 试求分隔边条数的最小值.

解析　56.

如图，分隔边的条数 $L=56$.



下面证明 $L \geqslant 56$．将方格纸的行从上至下依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{33}$，列从左至右依次记为 $B_1, B_2, \cdots, B_{33}$．行 A_i 中方格出现的颜色数记为 $n(A_i)$，列 B_i 中方格出现的颜色数记为 $n(B_i)$，三种颜色分别记为 c_1, c_2, c_3，对于一种颜色 c_j，设 $n(c_j)$ 是含有 c_j 色方格的行数与列数之和．若 A_i 行中含有 c_j 色的方格，则记 $\delta(A_i, c_j)$ 为 1，否则记 $\delta(A_i, c_j)$ 为 0．类似的定义 $\delta(B_i, c_j)$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i)) &= \sum_{i=1}^{33}\sum_{j=1}^{3}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{33}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_j,c_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{3} n(c_j),\end{aligned}$$

由于染 c_j 色的方格数为

$$\frac{1}{3}\cdot 33^2 = 363,$$

设含有 c_j 色方格的行有 a 个，列有 b 个，则 c_j 色方格一定在这 a 行和 b 列的交叉方格中，因此

$$ab \geqslant 363,$$

从而

$$n(c_j) = a + b \geqslant 2\sqrt{ab} > 2\sqrt{363} > 38,$$

故

$$n(c_j) \geqslant 39, j = 1, 2, 3.$$

由于在行 A_i 中有 $n(A_i)$ 种颜色的方格，因此至少有 $n(A_i)-1$ 条分割边，同理在列 B_i 中，至少有 $n(B_i)-1$ 条分割边，于是

$$\begin{aligned} L &\geqslant \sum_{i=1}^{33}(n(A_i)-1)+\sum_{i=1}^{33}(n(B_i)-1) \\ &=\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66 \\ &=\sum_{j=1}^{3}n(c_j)-66. \end{aligned}$$

下面分两种情形讨论.

情形 1: 有一行或一列全部方格同色. 不妨设有一行全部为 c_1 色，从而方格纸的 33 列中均含有 c_1 色的方格，由于 c_1 色方格有 363 个，故至少有 11 行中含有 c_1 色方格，于是

$$n(c_1)\geqslant 11+33=44,$$

于是

$$L\geqslant n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)-66\geqslant 44+39+39-66=56.$$

情形 2: 没有一行也没有一列的全部方格同色，则对任意 $1\leqslant i\leqslant 33$，具有 $n(A_i)\geqslant 2$，$n(B_i)\geqslant 2$，从而可得

$$L\geqslant \sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66\geqslant 33\cdot 4-66=66.$$

综上所述，分隔边条数的最小值为 56.

四、 设 m,n 均是大于 1 的整数，$m\geqslant n$. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素. 证明：对任意实数 x，均存在一个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 $||a_ix||\geqslant \dfrac{2}{m(m+1)}||x||$，这里 $||y||$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离.

解析

首先证明以下两个结论.

结论一: 存在整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1,$$

并且 $|c_i|\leqslant m$，$1\leqslant i\leqslant n$.

证明: 由于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，由裴蜀定理，存在正整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1.$$

下面证明，通过调整，存在一组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足上式，且绝对值均不超过 m．记

$$S_1 = S_1(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{c_i > m} c_i \geqslant 0,$$

$$S_2 = S_2(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{c_i < -m} |c_i| \geqslant 0,$$

如果 $S_1 > 0$，那么存在 $c_i > m > 1$，于是 $c_i a_i > 1$，又因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数，故由上式可知存在 $c_j < 0$．令

$$\left(c_i', c_j', c_k'\right) = \left(c_i - a_j, c_j + a_i, c_k\right),$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n$，$k \neq i, j$，则

$$c_1' a_1 + c_2' a_2 + \cdots + c_n' a_n = 1,$$

并且

$$0 \leqslant m - a_j < c_i' < c_i, c_j < c_j' < a_i \leqslant m,$$

因为 $c_i' < c_i$，且 $c_j' < m$，所以

$$S_1\left(c_1', c_2', \cdots, c_n'\right) < S_1\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right).$$

又 $c_j' > c_j$ 及 $c_i' > 0$，故

$$S_2\left(c_1', c_2', \cdots, c_n'\right) \leqslant S_2\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right).$$

如果 $S_2 > 0$，那么存在 $c_j < -m$，因此有一个 $c_i > 0$．令

$$\left(c_i', c_j', c_k'\right) = \left(c_i - a_j, c_j + a_i, c_k\right),$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n$，$k \neq i, j$，那么

$$c_1' a_1 + c_2' a_2 + \cdots + c_n' a_n = 1$$

成立，并且

$$-m < c_i' < c_i, c_j < c_j' < 0.$$

与上面类似地可知

$$S_1\left(c_1', c_2', \cdots, c_n'\right) \leqslant S_1\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right),$$

且

$$S_2\left(c_1', c_2', \cdots, c_n'\right) < S_2\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right).$$

因为 S_1, S_2 均为非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = 1,$$

并且 $|c_i| \leqslant m$，$1 \leqslant i \leqslant n$．且 $S_1 = S_2 = 0$，结论一获证．
结论二: 对任意实数 a, b，均有

$$||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||.$$

对任意整数 u 和实数 y，均有

$$||uy|| \leqslant |u| \cdot ||y||.$$

证明: 由于对任意整数 u 和实数 x，有

$$||x + u|| = ||x||,$$

故不妨设 $a, b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，此时

$$||a|| = |a|, ||b|| = |b|.$$

因为 $||x|| \leqslant |x|$，所以

$$||a + b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b| = ||a|| + ||b||,$$

多次使用该结论有 $||uy|| \leqslant |u| \cdot ||y||$，于是结论二获证．
回到原题: 由结论一，存在整数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = 1,$$

并且 $|c_i| \leqslant m$，$1 \leqslant i \leqslant n$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i x = x.$$

利用结论二得

$$\begin{aligned} ||x|| &= \Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} c_i a_i x \Big|\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} ||c_i| \cdot ||a_i x||) \\ &\leqslant m \sum_{i=1}^{n} ||a_i x|| \\ &\leqslant mn \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x||, \end{aligned}$$

因此

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x|| \geqslant \frac{1}{mn} ||x||.$$

若 $n \leqslant \dfrac{1}{2}(m+1)$，则

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||a_i x|| \geqslant \frac{||x||}{mn} \geqslant \frac{2||x||}{m(m+1)}.$$

若 $n > \dfrac{1}{2}(m+1)$，则在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中存在两个相邻正整数，不妨设 a_1, a_2 相邻，则

$$||x|| = ||a_2 x - a_1 x|| \leqslant ||a_2 x|| + ||a_1 x||,$$

故

$$\max\{||a_1 x||, ||a_2 x||\} \geqslant \frac{||x||}{2} \geqslant \frac{2||x||}{m(m+1)}.$$

综上所述，总存在一个 i（$1 \leqslant i \leqslant n$），满足

$$||a_i x|| \geqslant \frac{2}{m(m+1)}||x||,$$

命题得证.