2016年全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1．设实数a满足$a<9a^3-11a<|a|$，则a的取值范围是_____.

【答案】$a\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{10}}{3})$

【解析】由$a<|a|$可得$a<0$，原不等式可变形为$1>\frac{9a^3-11a}{a}>\frac{|a|}{a}=-1$

即$-1<9a^2-11<1$，所以$a^2\in(\frac{10}{9},\frac{4}{3})$.又$a<0$，故$a\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{10}}{3})$.

2．设复数z,w满足$|z|=3$，$(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4i$，其中$i$是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$分别表示$z,w$的共轭复数，则$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$的模为_____.

【答案】$\sqrt{65}$

【解析】由运算性质，$7+4i=(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=|z|^2-|w|^2-(zw-\overline{zw})$，因为$|z|^2$与$|w|^2$为实数，$\mathrm{Re}(zw-\overline{zw})=0$，故$|z|^2-|w|^2=7$，$zw-\overline{zw}=-4i$，又$|z|=3$，所以$|w|^2=2$，从而

$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)=|z|^2-4|w|^2-2(zw-\overline{zw})=9-8+8i=1+8i$

因此，$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$的模为$\sqrt{65}$.

3．正实数u,v,w均不等于1，若$\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则$\log_w u$的值为_____.

【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】令$\log_u v=a$，$\log_v w=b$，则

$\log_v u=\frac{1}{a}$，$\log_w v=\frac{1}{b}$，$\log_u vw=\log_u v+\log_u v\bullet\log_v w=a+ab$

条件化为$a+ab+b=5$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$，由此可得$ab=\frac{5}{4}$，因此$\log_w u=\log_w v\bullet\log_v u==\frac{4}{5}$.

4．袋子A中装有2张10元纸币和3张1元纸币，袋子B中装有4张5元纸币和3张1元纸币.现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则A中剩下的纸币面值之和大于B中剩下的纸币面值之和的概率

为_____.

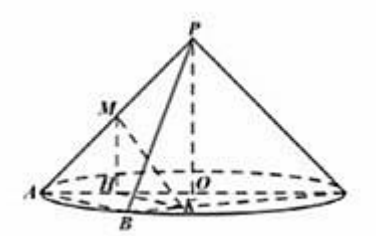
【答案】$\frac{9}{35}$

【解析】一种取法符合要求，等价于从 A 中取走的两张纸币的总面值 a 小于从 B 中取走的两张纸币的总面值 b，从而 $a<b\le 5+5=10$.故只能从 A 中国取走两张 1 元纸币，相应的取法数为 $C_3^2=3$.又此时 $b>a=2$，即从 B 中取走的两张纸币不能都是 1 元纸币，相应有 $C_7^2-C_3^2=18$ 种取法.因此，所求的概率为 $\frac{3\times 18}{C_5^2\times C_7^2}=\frac{54}{10\times 21}=\frac{9}{35}$.

5．设 P 为一圆锥的顶点，A，B，C 是其底面圆周上的三点，满足 $\angle ABC=90°$，M 为 AP 的中点.若 $AB=1$，$AC=2$，$AP=\sqrt{2}$，则二面角 $M—BC—A$ 的大小为_____.

【答案】$\arctan\frac{2}{3}$

【解析】



由 $\angle ABC=90°$ 知，AC 为底面圆的直径.设底面中心为 O，则 $PO\perp$ 平面 ABC，易知 $AO=\frac{1}{2}AC=1$，进而 $PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=1$.

设 H 为 M 在底面上的射影，则 H 为 AO 的中点.在底面中作 $HK\perp BC$ 于点 K，则由三垂线定理知 $MK\perp BC$，从而 $\angle MKH$ 为二面角 $M—BC—A$ 的平面角.

因 $MH=AH=\frac{1}{2}$，结合 HK 与 AB 平行知，$\frac{HK}{AB}=\frac{HC}{AC}=\frac{3}{4}$，即 $HK=\frac{3}{4}$，这样 $\tan\angle MKH=\frac{MH}{HK}=\frac{2}{3}$.

故二面角 $M—BC—A$ 的大小为 $\arctan\frac{2}{3}$.

6．设函数 $f(x)=\sin^4\frac{kx}{10}+\cos^4\frac{kx}{10}$，其中 k 是一个正整数.若对任意实数 a，均有 $\{f(x)\mid a<x<a+1\}=\{f(x)\mid x\in R\}$，则 k 的最小值为_____.

【答案】16

【解析】由条件知，$f(x)=(\sin^2\frac{kx}{10}+\cos^2\frac{kx}{10})^2-2\sin^2\frac{kx}{10}\cos^2\frac{kx}{10}$

$=1-\sin^2\frac{kx}{5}=\frac{1}{4}\cos\frac{2kx}{5}+\frac{3}{4}$

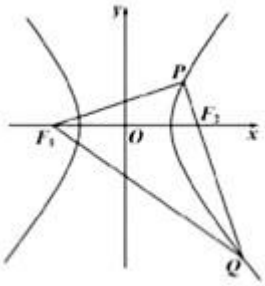
其中当且仅当$x=\frac{5m\pi}{k}(m\in Z)$时，$f(x)$取到最大值.根据条件知，任意一个长为 1 的开区间$(a,a+1)$至少包含一个最大值点，从而$\frac{5\pi}{k}<1$，即$k>5\pi$.

反之，当$k>5\pi$时，任意一个开区间均包含$f(x)$的一个完整周期，此时$\{f(x)\mid a<x<a+1\}=\{f(x)\mid x\in R\}$成立.综上可知，正整数的最小值为$[5\pi]+1=16$.

7．双曲线 C 的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为F_1、F_2，过点F_2作直线与双曲线 C 的右半支交于点 P，Q，使得$\angle F_1PQ=90°$，则ΔF_1PQ的内切圆半径是_____.

【答案】$\sqrt{7}-1$

【解析】



由双曲线的性质知，

$F_1F_2=2\times\sqrt{1+3}=4$，$PF_1-PF_2=QF_1-QF_2=2$.

因$\angle F_1PQ=90°$，故$PF_1^2+PF_2^2=F_1F_2^2$，因此

$PF_1+PF_2=\sqrt{2(PF_1^2+PF_2^2)-(PF_1-PF_2)^2}=\sqrt{2\times4^2-2^2}=2\sqrt{7}$从而直角$\Delta F_1PQ$的内切圆半径是

$r=\frac{1}{2}(F_1P+PQ-F_1Q)=\frac{1}{2}(PF_1+PF_2)-\frac{1}{2}(QF_1-QF_2)=\sqrt{7}-1$

8．设a_1,a_2,a_3,a_4是 1，2，…，100 中的 4 个互不相同的数，满足$(a_1^1+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2$则这样的有序数组$(a_1,a_2,a_3,a_4)$的个数为_____.

【答案】40

【解析】由柯西不等式知，$(a_1^1+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)\geq(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2$，等号成立的充分必要

条件是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}$，即 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列.于是问题等价于计算满足 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\subseteq\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的等比数列 a_1,a_2,a_3,a_4 的个数.设等比数列的公比 $q\neq1$，且 q 为有理数.记 $q=\frac{n}{m}$，其中 m,n 为互素的正整数，且 $m\neq n$.

先考虑 $n>m$ 的情况.

此时 $a_4=a_1(\frac{n}{m})^3=\frac{a_1n^3}{m^3}$，注意到 m^3,n^3 互素，故 $l=\frac{a_1}{m^3}$ 为正整数. 相应地， a_1,a_2,a_3,a_4 分别等于 m^3l,m^2nl,mn^2l,n^3l，它们均为正整数.这表明，对任意给定的 $q=\frac{n}{m}>1$，满足条件并以 q 为公比的等比数列 a_1,a_2,a_3,a_4 的个数，即为满足不等式 $n^3l\leq100$ 的正整数 l 的个数，即 $[\frac{100}{n^3}]$.

由于 $5^3>100$，故仅需考虑 $q=2,3,\frac{3}{2},4,\frac{4}{3}$ 这些情况，相应的等比数列的个数为

$$[\frac{100}{8}]+[\frac{100}{27}]+[\frac{100}{27}]+[\frac{100}{64}]+[\frac{100}{64}]=12+3+3+1+1=20.$$

当 $n<m$ 时，由对称性可知，亦有 20 个满足条件的等比数列 a_1,a_2,a_3,a_4.

综上可知，共有 40 个满足条件的有序数组 (a_1,a_2,a_3,a_4).

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

9.（本题满分 16 分）在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$.求 $\sin C$ 的最大值.

【解析】由数量积的定义及余弦定理知，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

同理得，$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$，$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.故已知条件化为

$$b^2+c^2-a^2+2(a^2+c^2-b^2)=3(a^2+b^2-c^2)$$

即 $a^2+2b^2=3c^2$.

由余弦定理及基本不等式，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{3}(a^2+2b^2)}{2ab}$$

$$=\frac{a}{3b}+\frac{b}{6a}\geq2\sqrt{\frac{a}{3b}\bullet\frac{b}{6a}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\le\frac{\sqrt{7}}{3}$.

等号成立当且仅当 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$.因此 $\sin C$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

10.（本题满分 20 分）已知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数， $f(1)=1$，且对任意 $x<0$，均有 $f(\frac{x}{x-1})=xf(x)$.

求 $f(1)f(\frac{1}{100})+f(\frac{1}{2})f(\frac{1}{99})+f(\frac{1}{3})f(\frac{1}{98})+\cdots+f(\frac{1}{50})f(\frac{1}{51})$ 的值.

【解析】设 $a_n=f(\frac{1}{n})(n=1，2，3，\cdots)$，则 $a_1=f(1)=1$.

在 $f(\frac{x}{x-1})=xf(x)$ 中取 $x=-\frac{1}{k}(k\in N^*)$，注意到 $\frac{x}{x-1}=\frac{-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}-1}=\frac{1}{k+1}$，及 $f(x)$ 为奇函数.可知

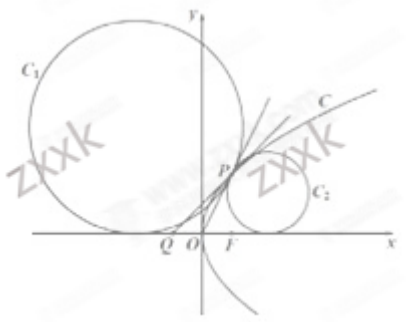
$$f(\frac{1}{k+1})=-\frac{1}{k}f(-\frac{1}{k})=\frac{1}{k}f(\frac{1}{k})$$

即 $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{k}$，从而 $a_n=a_1\bullet\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{(n-1)!}$.

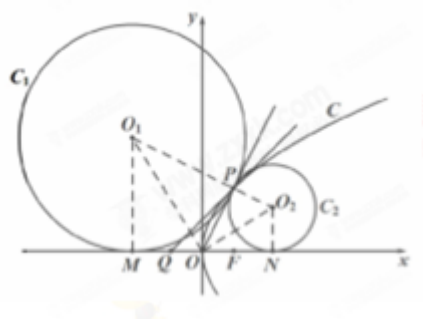
因此 $\sum_{i=1}^{50}a_ia_{101-i}=\sum_{i=1}^{50}\frac{1}{(i-1)!(100-i)!}=\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{i!\bullet(99-i)!}$

$$=\frac{1}{99!}\sum_{i=0}^{49}C_{99}^{i}=\frac{1}{99!}\sum_{i=0}^{49}(C_{99}^{i}+C_{99}^{99-i})=\frac{1}{99!}\times\frac{1}{2}\times2^{99}=\frac{2^{98}}{99!}$$

11.（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点.以 F 为焦点，O 为顶点作抛物线 C.设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$.圆 C_1,C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均与轴相切.求点 F 的坐标，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值.



【解析】



设抛物线 C 的方程是 $y^2=2px(p>0)$，点 Q 的坐标为 $(-a,0)(a>0)$，并设 C_1,C_2 的圆心分别为 $O_1(x_1,y_1),O_2(x_2,y_2)$.

设直线 PQ 的方程为 $x=my-a(m>0)$，将其与 C 的方程联立，消去 x 可知 $y^2-2pmy+2pa=0$.

因为 PQ 与 C 相切于点 P，所以上述方程的判别式为 $\Delta=4p^2m^2-4\bullet 2pa=0$，解得 $m=\sqrt{\dfrac{2a}{p}}$.进而可知，点 P 的坐标为 $(x_P,y_P)=(a,\sqrt{2pa})$.于是

$$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\,|y_P-0|=\sqrt{1+\frac{2a}{p}}\bullet\sqrt{2pa}=\sqrt{2a(p+2a)}.$$

由 $|PQ|=2$ 可得

$$4a^2+2pa=4 \qquad ①$$

注意到 OP 与圆 C_1,C_2 相切于点 P，所以 $OP\perp O_1O_2$.设圆 C_1,C_2 与 x 轴分别相切于点 M，N，则 OO_1,OO_2 分别是 $\angle POM,\angle PON$ 的平分线，故 $\angle O_1OO_2=90°$.从而由射影定理知

$$y_1y_2=O_1M\bullet O_2N=O_1P\bullet O_2P=OP^2=x_P^2+y_P^2=a^2+2pa$$

结合①，就有 $y_1y_2=a^2+2pa=4-3a^2$ ②

由 O_1,P,O_2 共线，可得

$$\frac{y_1-\sqrt{2pa}}{\sqrt{2pa}-y_2}=\frac{y_1-y_P}{y_P-y_2}=\frac{O_1P}{PO_2}=\frac{O_1M}{O_2N}=\frac{y_1}{y_2}.$$

化简得 $y_1+y_2=\dfrac{2}{\sqrt{2pa}}y_1y_2$ ③

令 $T=y_1^2+y_2^2$，则圆 C_1,C_2 的面积之和为 πT.根据题意，仅需考虑 T 取到最小值的情况.

根据②、③可知，

$$T=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{4}{2pa}y_1^2y_2^2-2y_1y_2$$

$$=\frac{4}{4-4a^2}(4-3a^2)^2-2(4-3a^2)=\frac{(4-3a^2)(2-a^2)}{1-a^2}.$$

作代换$t=1-a^2$，由于$4t=4-4a^2=2pa>0$，所以$t>0$.于是

$$T=\frac{(3t+1)(t+1)}{t}=3t+\frac{1}{t}+4\geq 2\sqrt{3t\bullet\frac{1}{t}}+4=2\sqrt{3}+4.$$

上式等号成立当且仅当$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时$a=\sqrt{1-t}=\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$，因此结合①得，

$$\frac{p}{2}=\frac{1-a^2}{a}=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$$

从而F的坐标为$(\frac{p}{2},0)=(\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},0)$.

2016 全国高中数学联赛二试试题参考答案

一、（本题满分 40 分）设实数$a_1,a_2,\cdots,a_{2016}$满足$9a_i>11{a_{i+1}}^2(i=1,2,\cdots,2015)$.

求$(a_1-{a_2}^2)(a_2-{a_5}^2)\cdots(a_{2015}-{a_{2016}}^2)(a_{2016}-{a_i}^2)$的最大值.

【解析】令$P=(a_1-{a_2}^2)(a_2-{a_5}^2)\cdots(a_{2015}-{a_{2016}}^2)(a_{2016}-{a_i}^2)$

由已知得：对$i=1,2,\cdots,2015$，均有$a_i-{a_{i+1}}^2>\frac{11}{9}{a_{i+1}}^2-{a_{i+1}}^2\geq 0$.

若$a_{2016}-{a_i}^2\leq 0$,则$S\leq 0$.

以下考虑$a_{2016}-{a_i}^2>0$的情况，约定$a_{2017}=a_1$,由平均不等式得

$$P^{\frac{1}{2016}}\leq\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}(a_i-{a_{i+1}}^2)=\frac{1}{2016}(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}{a_{i+1}}^2)$$

$$=\frac{1}{2016}(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}a_i^2)=\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}a_i(1-a_i)$$

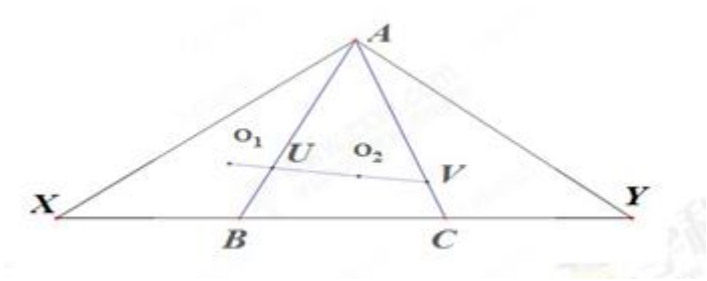
$$\leq\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}(\frac{a_i+(1-a_i)}{2})^2=\frac{1}{2016}\cdot 2016\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

所以 $P \le \frac{1}{4^{2016}}$.

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2016} = \frac{1}{2}$ 时，上述不等式等号成立，且有 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i = 1, 2, \cdots, 2015)$，此时 $P = \frac{1}{4^{2016}}$.

综上所述，所求最大值为 $\frac{1}{4^{2016}}$.

二、（本题满分 40 分）如图所示，在△ABC 中，X,Y 是直线 BC 上两点（X,B,C,Y 顺次排列），使得 BX·AC=CY·AB. 设△ACX，△ABY 的外心分别为 O_1, O_2，直线 O_1O_2 与 AB, AC 分别交于点 U、V. 证明：△AUV 是等腰三角形.



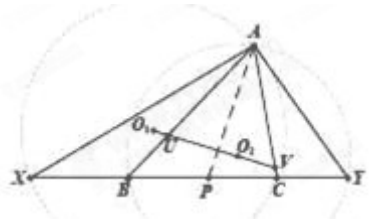
【证明】作∠BAC 的内角平分线交 BC 于点 P,设△ACX 和△ABY 的外接圆分别为 w_1 和 w_2，由内角平分线的性质知，$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}$,由条件可得 $\frac{BX}{CY} = \frac{AB}{AC}$,从而

$$\frac{PX}{PY} = \frac{BX + BP}{CY + CP} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}.$$

即 CP·PX=BP·PY.

故 P 对圆 w_1 和 w_2 的幂相等，所以 P 在 w_1 和 w_2 的根轴上.

于是 AP⊥O_1O_2，这表明点 U、V 关于直线 AP 对称，从而△AUV 是等腰三角形.



三、（本题满分 50 分）给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上，将某些点之间的线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值.

【解析】以这 10 个点为顶点，所连线段为边，得到一个 10 界简单图 G，我们证明 G 的边数不超过 15.

【证明】设 G 的顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_{10}$，共有 k 条边，用 $\deg(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度.若 $\deg(v_i)\le 3$

对 $i=1,2,3,\cdots,10$ 都成立，则 $k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\deg(v_i)\le\frac{1}{2}\times10\times3=15$.

假设存在 v_i 满足 $\deg(v_i)\ge4$，不妨设 $\deg(v_i)=n\ge4$，且 v_1 与 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 均相邻，于是 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 之间没有边，否则就形成三角形，所以，$v_1,v_2,\cdots,v_{n+1}$ 之间恰有 n 条边.

对每个 j $(n+2\le j\le10)$，v_j 至多与 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 中的一个顶点相邻（否则设 v_j 与 $v_s,v_t(2\le s<t\le n+1)$）相邻，则 v_1,v_s,v_j,v_t 就对应了一个空间四边形的四个顶点，这与题设条件矛盾，从而 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 与 $v_{n+2},\cdots,v_{10}$ 之间的边数至多 $10-(n+1)=9-n$ 条.

在 $v_{n+2},\cdots,v_{10}$ 这 $9-n$ 个顶点之间，由于没有三角形，由托兰定理，至多 $[\frac{(9-n)^2}{4}]$ 条边，因此 G 的边数

$$k\le n+(9-n)+[\frac{(9-n)^2}{4}]=9+[\frac{(9-n)^2}{4}]\le9+[\frac{25}{4}]=15$$



如图给出的图共有 15 条边，且满足要求，综上所述，所求边数的最大值为 15.

四、（本题满分 50 分）设 p 与 p+2 均是素数，p>3，数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+[\frac{pa_{n-1}}{a_n}],n=2,3,\cdots.$

这里 $[x]$ 表示不小于实数 x 的最小整数. 证明：对 $n=3,4,\cdots,p-1$ 均 $n\mid pa_{n-1}+1$ 有成立

【证明】首先注意，是$\{a_n\}$整数数列.

对n用数学归纳法，当$n=3$时，由条件知$a_2=2+p$，故$pa_2+1=(p+1)^2$.因 p 与 p+2 均是素数，且 p>3，

故必须$3\mid p+1$，因此，$3\mid pa_2+1$即$n=3$时结论成立.

对$3<n\le p-1$，设对$k=3,\cdots,n-1$成立$k\mid pa_{k-1}+1$，此时$[\frac{pa_{k-1}}{k}]=\frac{pa_{k-1}+1}{k}$.

故$pa_{k-1}+1=p(a_{k-2}+[\frac{pa_{k-2}}{k-1}])+1=p(a_{k-2}+\frac{pa_{k-2}+1}{k-1})+1$

$=\frac{(pa_{k-2}+1)(p+k-1)}{k-1}$. 故对$3<n\le p-1$，有

$$pa_{n-1}+1=\frac{p+n-1}{n-1}(pa_{n-2}+1)=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}(pa_{n-3}+1)$$

$$=\cdots=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}\cdots\frac{p+3}{3}(pa_2+1)$$

因此，$pa_{n-1}+1=\frac{2n(p+1)}{(p+n)(p+2)}C_{p+n}^{n}$

由此知（注意C_{p+n}^{n}是整数）$n\mid(p+n)(p+2)(pa_{n-1}+1)$ ①

因 n<p,p 是素数，故$(n,n+p)=(n,p)=1$，又 p+2 是大于 n 的素数，故$(n,p+2)=1$，从而 n 与（p+n）

(p+2)互素，故由①知$n\mid pa_{n-1}+1$.由数学归纳法知，本题得证.