# 2015 年全国高中数学联赛一试试题参考答案

## 一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1.设 $a,b$ 为不相等的实数,若二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(a)=f(b)$,则 $f(2)$ 的值是_____.

【答案】4

【解析】由已知条件及二次函数图象的轴对称性，可得 $\frac{a+b}{2}=-\frac{a}{2}$，即 $2a+b=0$，所以

$f(2)=4+2a+b=4$

2.若实数 $\theta$ 满足 $\cos\theta=\tan\theta$,则 $\frac{1}{\sin\theta}+\cos^4\theta$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】由条件知，$\cos^2\alpha=\sin\alpha$，反复利用此结论，并注意到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，得

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha=(1+\sin\alpha)+(1-\cos^2\alpha)=2+\sin\alpha-\cos^2\alpha=2$$

3.已知复数数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1=1, z_{n+1}=\overline{z}_n+1+ni(n=1,2,\cdots)$,其中 $i$ 为虚数单位，$\overline{z}_n$ 表示 $z_n$ 的共轭复数,则 $z_{2015}$ 的值是_____.

【答案】2015+1007i

【解析】由已知得，对一切正整数 n,有 $z_{n+2}=\overline{z_{n+1}}+1+(n+1)i=\overline{\overline{z_n}+1+ni}+(n+1)i=z_n+2+i$

于是 $z_{2015}=z_1+1007(2+i)=2015+1007i$

4.在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, AD=1$,边 $DC$ 上(包括点 $D,C$) 的动点 $P$ 与 $CB$ 延长线上(包括点 $B$) 的动点 $Q$ 满足 $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{BQ}|$,则向量 $\overrightarrow{PA}$ 与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值为_____.

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】不妨设 A（0,0），B(2，0),D(0，1).设 P 的坐标为（t,1）(其中 $0\le t\le 2$)，则由 $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{BQ}|$ 得 Q 的坐标为（2，-t）,故 $\overrightarrow{PA}=(-t,-1), \overrightarrow{PQ}=(2-t,-t-1)$，因此

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=-t\cdot(2-t)+(-1)\cdot(-t-1)=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$$

当 t=$\frac{1}{2}$ 时，$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ})_{\min}=\frac{3}{4}$

5.在正方体中随机取三条棱,它们两两异面的概率为_____.

【答案】$\frac{2}{55}$

【解析】设正方体为 ABCD-EFGH，它共有 12 条棱，从中任意选出 3 条棱的方法共有 $C_{12}^{3}$=220 种.

下面考虑使3 条棱两两异面的取法数，由于正方体的棱共确定 3 个互不平行的方向（即 AB、AD、AE 的方向），具有相同方向的 4 条棱两两共面，因此取出的 3 条棱必属于 3 个不同的方向.可先取定 AB 方向的棱，这有 4 种取法.不妨设取的棱就是 AB，则 AD 方向只能取棱 EH 或棱 FG，共 2 种可能，当 AD 方向取棱是 EH 或 FG 时，AE 方向取棱分别只能是 CG 或 DH.

由上可知，3 条棱两两异面的取法数为 4×2=8，故所求的概率为 $\frac{8}{220}=\frac{2}{55}$.

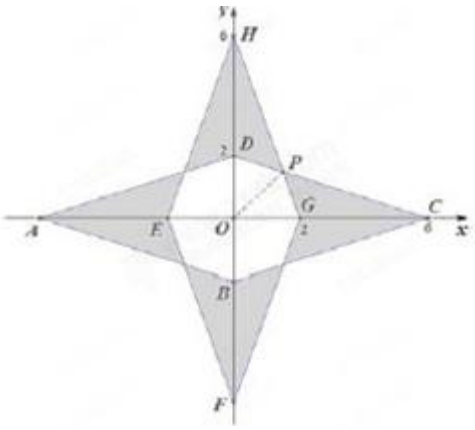
6.在平面直角坐标系 $xOy$ 中,点集 $K=\{(x,y)\,|\,(|x|+|3y|-6)(|3x|+|y|-6)\le 0\}$ 所对应的平面区域的面积为_____.

【答案】24

【解析】设 $K_1=\{(x,y)\,||x|+|3y|-6\le 0\}$，先考虑 $K_1$ 在第一象限中的部分，此时有 x+3y≤6，故这些点对应于图中的△OCD 及其内部.由对称性知，$K_1$ 对应的区域是图中以原点 O 为中心的菱形 ABCD 及其内部.

同理，设 $K_2=\{(x,y)\,||3x|+|y|-6\le 0\}$，则 $K_2$ 对应的区域是图中以 O 为中心的菱形 EFGH 及其内部.

由点集 K 的定义知，K 所对应的平面区域是被 $K_1,K_2$ 中恰好一个所覆盖的部分，因此本题所要求的即为图中阴影区域的面积 S.由于直线 CD 的方程为 x+3y=6,直线 GH 的方程为 3x+y=6,故它们的交点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，由对称性知，$S=8S_{\Delta CPG}=8\times\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}=24$.



7.设 $\omega$ 为正实数,若存在 $a,b(\pi \le a < b \le 2\pi)$ ,使得 $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$ ,则实数 $\omega$ 的取值范围是_____

【答案】 $w \in [\frac{9}{4},\frac{5}{2}] \cup [\frac{13}{4},+\infty)$

【解析】由 $\sin wa + \sin wb = 2$ 知 $\sin wa = \sin wb = 1$，而 $[wa,wb] \subseteq [w\pi,2w\pi]$, 故题目条件等价于：存在整数 $k$， $l(k<l)$，使得 $w\pi \le 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2l\pi + \frac{\pi}{2} \le 2w\pi.$ (1)

当 $w \ge 4$ 时,区间 $[w\pi,2w\pi]$ 的长度不小于 $4\pi$ ,故必存在 k, l 满足(1)式.

当 $0 < w < 4$ 时，注意到 $[w\pi,2w\pi] \subseteq (0,8\pi)$ ，故仅需考虑如下几种情况:

$(i) w\pi \le \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} \le 2w\pi$, 此时 $w \le \frac{1}{2}$ 且 $w \ge \frac{5}{4}$, 无解;

$(ii) w\pi \le \frac{5\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} \le 2w\pi$, 此时有 $\frac{9}{4} \le w \le \frac{5}{2}$;

$(iii) w\pi \le \frac{9\pi}{2} < \frac{13\pi}{2} \le 2w\pi$, 此时有 $\frac{13}{4} \le w \le \frac{9}{2}$, 得 $\frac{13}{4} \le w < 4$.

综合 $(i)、(ii)、(iii)$, 并注意到 $w \ge 4$ 亦满足条件，可知 $w \in [\frac{9}{4},\frac{5}{2}] \cup [\frac{13}{4},+\infty)$.

8.对四位数 $\overline{abcd}(1 \le a \le 9, 0 \le b,c,d \le 9)$ ,若 $a > b, b < c, c > d$ ,则称 $\overline{abcd}$ 为 $P$ 类数,若 $a < b, b > c, c < d$ ,则称 $\overline{abcd}$ 为 $Q$ 类数,用 $N(P)$ 与 $N(Q)$ 分别表示 $P$ 类数与 $Q$ 类数的个数,则 $N(P) - N(Q)$ 的值为____

【答案】285

【解析】分别记 P 类数、Q 类数的全体为 A,B，再将个位数为零的 P 类数全体记为 $A_0$,个位数不等于零的 P 类数全体记为 $A_1$.

对任一四位数 $\overline{abcd} \in A_1$，将其对应到四位数 $\overline{dcba}$，注意到 $a > b, b < c, c > d \ge 1$,

故 $\overline{dcba} \in B$. 反之，每个 $\overline{dcba} \in B$ 唯一对应于 $A_1$ 中的元素 $\overline{abcd}$. 这建立了 $A_1$ 与 $B$ 之间的一一对应，因此有

$N(P) - N(Q) = |A| - |B| = |A_0| + |A_1| - |B| = |A_0|$.

下面计算 $|A_0|$: 对任一四位数 $\overline{abc0} \in A_0, b$ 可取 $0,1,\cdots,9$, 对其中每个 b,

由 $b < a \le 9$ 及 $b < c \le 9$ 知，a 和 c 分别有 9-b 种取法，从而

$|A_0| = \sum_{b=0}^{9} (9-b)^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285.$ 因此 $N(P) - N(Q) = 285.$

**二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）**

9. （本题满分 16 分）若实数 $a,b,c$ 满足 $2^a+4^b=2^c, 4^a+2^b=4^c$,求 $c$ 的最小值.

【解析】将 $2^a,2^b,2^c$ 分别记为 $x,y,z$，则 $x,y,z>0$

由条件知，$x+y^2=z, x^2+y=z^2$,故 $z^2-y=x^2=(z-y^2)^2=z^2-2y^2z+y^4$

因此，结合均值不等式可得，

$$z=\frac{y^4+y}{2y^2}=\frac{1}{4}(2y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y})\geq\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{2y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$$

当 $2y^2=\frac{1}{y}$，即 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，z 的最小值为 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ .此时相应的 x 值为 $\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$, 符合要求.

由于 $c=\log_2 z$, 故 c 的最小值为 $\log_2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{2})=\log_2 3-\frac{5}{3}$.

10.(本题满分 20 分)设 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 是四个有理数,使得 $\{a_ia_j\,|1\leq i<j\leq 4\},=\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\}$

求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

【解析】由条件可知，$a_ia_j(1\leq i<j\leq 4)$ 是 6 个互不相等的数，且其中没有两个为相反数，由此知，

$a_1,a_2,a_3,a_4$ 的绝对值互不相等，不妨设 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$，则 $|a_i||a_j|(1\leq i<j\leq 4)$ 中最小的与次小的

两个数分别是 $|a_1||a_2|$ 及 $|a_1||a_3|$，最大与次大的两个数分别是 $|a_3||a_4|$ 及 $|a_2||a_4|$，从而必须有

$$\begin{cases}a_1a_2=-\frac{1}{8}\\ a_1a_3=1\\ a_2a_4=3\\ a_3a_4=-24\end{cases}$$ ,于是 $a_2=-\frac{1}{8a_1}, a_3=\frac{1}{a_1}, a_4=\frac{3}{a_2}=-24a_1$. 故

$$\{a_2a_3,a_1a_4\}=\{-\frac{1}{8a_1^2},-24a_1^2\}=\{-2,-\frac{3}{2}\},$$

结合 $a_1\in Q$, 只可能 $a_1=\pm\frac{1}{4}$.

由此易知，$a_1=\frac{1}{4}$，$a_2=-\frac{1}{2}, a_3=4, a_4=-6$ 或者 $a_1=-\frac{1}{4}$，$a_2=\frac{1}{2}, a_3=-4, a_4=6$.

经检验知这两组解均满足问题的条件，故 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.

11.(本题满分20分)在平面直角坐标系 $xOy$ 中,$F_1, F_2$ 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左,右焦点,设不经过焦点 $F_1$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于两个不同的点 $A, B$,焦点 $F_2$ 到直线 $l$ 的距离为 $d$.如果直线 $AF_1, l, BF_1$ 的斜率成等差数列,求 $d$ 的取值范围.

【解析】由条件知，点 $F_1$、$F_2$ 的坐标分别为（-1,0）和（1，0）.设直线 l 的方程为 y=kx+m，点 A、B 的坐标分别为 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$，则 $x_1, x_2$ 满足方程 $\frac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，即

$$(2k^2+1)x^2+4kmx+(2m^2-2)=0 \qquad (1)$$

由于点 A、B 不重合，且直线的斜率存在，故 $x_1, x_2$ 是方程（1）的两个不同实根，因此有（1）的判别式

$$\Delta=(4km)^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=8(2k^2+1-m^2)>0, \quad \text{即 } 2k^2+1>m^2. \qquad (2)$$

由直线 $AF_1$、$l$、$BF_1$ 的斜率 $\frac{y_1}{x_1+1}$、$k$、$\frac{y_2}{x_2+1}$ 依次成等差数列知,

$$\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=2k, \text{又} y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m,$$

所以 $(kx_1+m)(x_2+1)+(kx_2+m)(x_1+1)=2k(x_1+1)(x_2+1).$

化简并整理得，$(m-k)(x_1+x_2+2)=0$

假如 m=k，则直线 L 的方程为 y=kx+k,即 l 经过点 $F_1(-1,0)$，不符合条件.

因此必有 $x_1+x_2+2=0$, 故由方程（1）及韦达定理知，

$$\frac{4km}{2k^2+1}=-(x_1+x_2)=2, \text{即} m=k+\frac{1}{2k}. \quad (3)$$

由（2）、（3）知,$2k^2+1>m^2=(k+\frac{1}{2k})^2$, 化简得 $k^2>\frac{1}{4k^2}$, 这等价于 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

反之当 m,k 满足（3）及 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，l 必不经过点 $F_1$（否则将导致 $m=k$, 与（3）矛盾），

而此时，m,k 满足（2），故 l 与椭圆有两个不同的交点 A,B，同时也保证了 $AF_1$、$BF_1$ 的斜率存在（否则 $x_1, x_2$ 中的某一个为-1，结合 $x_1+x_2+2=0$ 知 $x_1=x_2=-1$，与方程（1）有两个不同的实根矛盾）

点 $F_2(1,0)$ 到直线 $l: y=kx+m$ 的距离为 $d=\frac{|k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot|2k+\frac{1}{2k}|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}\cdot(2+\frac{1}{2k^2})$

注意到 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$，令 $t=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$，则 $t\in(1,\sqrt{3})$，上式可以改写为

$$d=\frac{1}{t}\cdot(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\cdot(t+\frac{3}{t}). \qquad (4)$$

考虑到函数 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot(t+\frac{3}{t})$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上单调递减，故由（4）得，$f(\sqrt{3})<d<f(1)$，即 $d\in(\sqrt{3},2)$.

# 2015 年全国高中数学联赛二试试题参考答案

一.（本题满分 40 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 是实数,证明:可以连取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$ 使得

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i)^2\leq(n+1)(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

【证明】我们证明：

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i-\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j)^2\leq(n+1)(\sum_{i=1}^{n}a_i^2) \qquad (1)$$

即对 $i=1,\cdots,[\frac{n}{2}]$，取 $\varepsilon_i=1$；对 $i=[\frac{n}{2}]+1,\cdots,n$，取 $\varepsilon_i=-1$ 符合要求，

（这里，$[x]$ 表示实数 $x$ 的整数部分.）

事实上，（1）的左边为 $(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i+\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j)^2+(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i-\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j)^2$

$=2(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i)^2+2(\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j)^2\leq 2[\frac{n}{2}](\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i^2)+2(n-[\frac{n}{2}])(\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j^2)$（柯西不等式）

$=2[\frac{n}{2}](\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i^2)+2([\frac{n+1}{2}])(\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j^2)$(利用$n-[\frac{n}{2}]=[\frac{n+1}{2}]$) z 学科 xx 网k

$\le n(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i^2)+(n+1)(\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n}a_j^2)$(利用$[x]\le x$)$\le(n+1)(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}a_i^2)$，所以（1）得证，从而本题得证.

二、(本题满分 40 分)设$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,其中$A_1,A_2,\cdots,A_n$是$n$个互不相同的有限集合$(n\ge 2)$,满足对任意$A_i,A_j\in S$,均有$A_i\cup A_j\in S$,若$k=\min_{1\le i\le n}|A_i|\ge 2$,证明:存在$x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$,使得$x$属于$A_1,A_2,\cdots,A_n$中的至少$\frac{n}{k}$个集合(这里$|X|$表示有限集合$X$的元素个数)

【证明】不妨设$|A_1|=k$,设在$A_1$，$A_2,\cdots,A_n$中与$A_1$不相交的集合$s$个，重新记为$B_1$，$B_2,\cdots,B_s$,设包含$A_1$的集合有$t$个，重新记为$C_1$，$C_2,\cdots,C_t$.

由已知条件，$(B_i\cup A_1)\in S$即$(B_i\cup A_1)\in\{C_1$，$C_2,\cdots,C_t\}$，这样我们得到一个映射

$f:\{B_1$，$B_2,\cdots,B_s\}\to\{C_1$，$C_2,\cdots,C_t\}$,$f(B_i)=B_i\cup A_1$.

显然$f$是单映射，于是$s\le t$.

设$A_1=\{A_1$，$A_2,\cdots,A_k\}$.在$A_1$，$A_2,\cdots,A_n$中除去$B_1$，$B_2,\cdots,B_s$，

$C_1$，$C_2,\cdots,C_t$后，在剩下的$n-s-t$个集合中，设包含

$a_i$的集合有$x$个（$1\le i\le k$),由于剩下的n-s-t个集合中

每个集合与$A_1$的交非空，即包含某个$a_i$，从而$x_1+x_2+\cdots+x_k\ge n-s-t$.

不妨设$x_1=\max_{1\le i\le k}x_i$,则由上式知$x_1\ge\frac{n-s-t}{k}$,即在剩下的$n-s-t$个集合中，

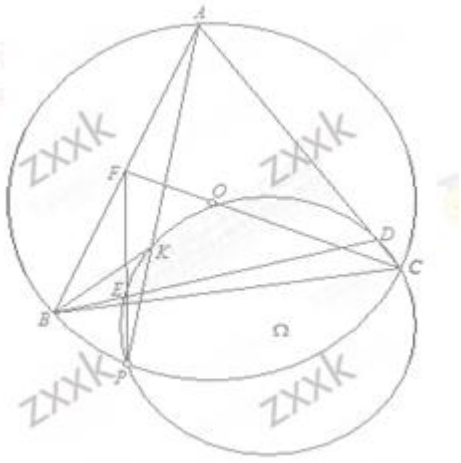
包含$a_1$的集合至少有$\frac{n-s-t}{k}$个，又由于$A_1\subseteq C_i(i=1,\cdots,t)$,故$C_1$，$C_2,\cdots,C_t$都

包含$a_1$,因此包含$a_1$的集合个数至少为

$\frac{n-s-t}{k}+t=\frac{n-s+(k-1)t}{k}\ge\frac{n-s+t}{k}$(利用$k\ge 2$)$\ge\frac{n}{k}$(利用$t\ge s$)

三、(本题满分 50 分)如图,$\Delta ABC$内接于圆$O$,$P$为$BC$上一点,点$K$在线段$AP$上,使得$BK$平分$\angle ABC$,过$K,P,C$三点的圆$\Omega$与边$AC$交于点$D$,连结$BD$交圆$\Omega$于点$E$,连结$PE$并延长与边$AB$交于点$F$,证

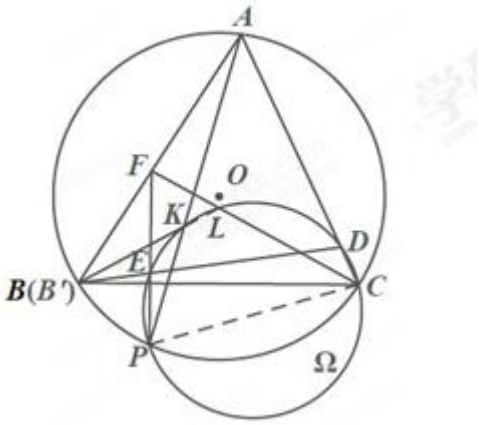
明: $\angle ABC = 2\angle FCB$



【证明】设 CF 与圆Ω交于点 L(异于 C).对圆内接广义六边形 DCLKPE 应用帕斯卡定理可知，DC 与 KP 的交点 A、CL 与 PE 的交点 F、LK 与 ED 的交点 $B'$ 共线，因此 $B'$ 是 AF 与 ED 的交点，即 $B' = B$，所以 B、K、L 共线。

根据 A、B、P、C 四点共圆及 L、K、P、C 四点共圆，得∠ABC=∠APC=∠FLK=∠FCB+∠LBC

又由 BK 平分∠ABC 知∠LBC= $\frac{1}{2}\angle ABC$，从而 $\angle ABC = 2\angle FCB$.




四、(本题满分 50 分)求具有下述性质的所有正整数 $k$ :对任意正整数 $n, 2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$.

【解析】对正整数 m,设 $v_2(m)$ 表示正整数 m 的标准分解中素因子 2 的方幂，则熟知

$v_2(m!) = m - s(m), \quad (1)$

这里 $s(m)$ 表示正整数 $m$ 在二进制表示下的数码之和.

由于 $2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$ 等价于 $v_2(\frac{(kn)!}{n!}) \le (k-1)n$, 即

$kn-v_2((kn)!)\geq n-v_2(n!)$,进而由（1）知，本题等价于

求所有正整数k，使得s（kn）≥s（n）对任意正整数n成立.

我们证明，所有符号条件的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$.

一方面，由于$S(2^a n)=S(n)$对任意正整数$n$成立，故 $k=2^a$ 符合条件.

另一方面，若$k$不是2的方幂，设$k=2^a\cdot q, a\geq 0, q$是大于1的奇数.

下面构造一个正整数$n$，使得$S(kn)<S(n)$.因为$S(kn)=S(2^a qn)=S(qn)$,

因此问题等价于我们选取$q$的一个倍数$m$,使得$S(m)<S(\frac{m}{q})$.

由（2，$q$）=1,熟知存在正整数$u$,使得 $2^u\equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$.(事实上，

由欧拉定理知，$u$可以取$\varphi(q)$.)

设奇数$q$的二进制表示为 $2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_t}, 0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_t, t\geq 2$.

取$m=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_{t-1}}+2^{\alpha_t+u}$,则$S(m)=t$,且

$m=q+2^{\alpha_1}(2^{tu}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$.

我们有 $\frac{m}{q}=1+2^{\alpha_1}\cdot\frac{2^{tu}-1}{q}=1+2^{\alpha_1}\cdot\frac{2^u-1}{q}(1+2^u+\cdots+2^{(t-1)u})=1+\sum_{i=0}^{t-1}\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{iu+\alpha_1}$.

由于$0<\frac{2^u-1}{q}<2^u$,故正整数$\frac{2^u-1}{q}$的二进制表示中的最高次幂小于$u$，由此

易知，对任意整数$i$，$j(0\leq i<j\leq t-1)$,数$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_1}$与$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{ju+\alpha_1}$

的二进制表示中没有相同的项.

又因为$\alpha_1>0$,故$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_1}(l=0,1,\cdots,t-1)$的二进制表示中均不包含1，故

由（2）可知$S(\frac{m}{q})=1+S(\frac{2^u-1}{q})\cdot t>t=S(m)$,

因此上述选取的$m$满足要求.

综合上述的两个方面可知，所求的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$.