2014 全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 若正数 a,b $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log(a+b)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值为_____.

【答案】108

【解析】设 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_4(a+b)=k$，则 $a=2^{k-2}, b=3^{k-1}$，

$a+b=6^k$，从而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-3}}=2^2\times 3^3=108$

2. 设集合 $\{\frac{3}{a}+b \mid 1\le a\le b\le 2\}$ 中的最大值与最小值分别为 M,m，则 $M-m=$_____.

【答案】$5-2\sqrt{3}$

【解析】由 $1\le a\le b\le$ 知，$\frac{3}{a}+b\le\frac{3}{1}+2=5$，当 $a=1,b=2$ 时，得最大元素 $M=5$.

又 $\frac{3}{a}+b\ge\frac{3}{a}+a\ge 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3}$，当 $a=b=\sqrt{3}$ 时，得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

3. 若函数 $f(x)=x^2+a|x-1|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为_____.

【答案】$[-2,0]$.

【解析】在 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=x^2+ax-a$ 单调递增，等价于 $-\frac{a}{2}\le 1$，即 $a\ge -2$. 在

$[0,1]$ 上，$f(x)=x^2+ax-a$ 单调递增，等价于 $-\frac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$. 因此实数 a 的取值范围是 $[-2,0]$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n (n\in N^*)$，则 $\frac{a_{2014}}{a_1+a_2+\ldots+a_{2013}}=$_____.

【答案】$\frac{2015}{2013}$.

【解析】$a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}a_{n-2}=\cdots=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdots\frac{2\cdot 3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1)$.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=2+2\times 3+2^2\times 4+\cdots+2^{n-1}(n+1)$

所以 $2S_n=2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n(n+1)$

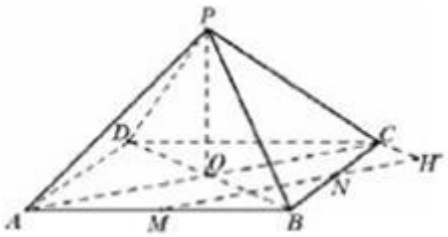
将上面两式相减，得 $S_n=2^n(n+1)-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2)=2^n(n+1)-2^n=2^n n$.

故$\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=\dfrac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013}=\dfrac{2015}{2013}$.

5. 已知正四棱锥$P-ABCD$中，侧面是边长为1的正三角形，M,N分别是边AB,BC的中点，则异面直线MN与PC之间的距离是_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】设底面对角线AC,BD交于点O，过点C作直线MN的垂线，交MN于点H.由于PO是底面的垂线，故PO⊥CH，又AC⊥CH，所以CH与平面POC垂直，故CH⊥PC.因此CH是直线MN与PC的公垂线段，又CH=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}CN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故异面直线$MN$与$PC$之间的距离是$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



6. 设椭圆Γ的两个焦点是F_1,F_2，过点F_1的直线与Γ交于点P,Q，若$|PF_2|=|F_1F_2|$，且$3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆Γ的短轴与长轴的比值为_____.

【答案】$\dfrac{2}{7}\sqrt{6}$

【解析】$|PF_1|=4,|QF_1|=3$,记椭圆T的长轴，短轴的长度分别为2a,2b,焦距为2c,则$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$,且由椭圆的定义知，$2a=|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2c+4$.

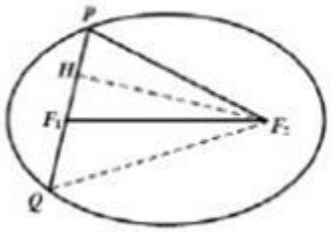
于是$|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|-|QF_1|=2c+1$.

设H为线段PF的中点，则$|F_1H|=2$ $|QH|=5$ 且有$F_2H\perp PF_1$由勾股定理知，

$|QF_2|^2-|QH|^2=|F_2H|^2=|F_1F_2|^2-|F_1H|^2$

即$(2c+1)^2-5^2=(2c)^2-2^2$,解得$c=5,a=7$

$b=2\sqrt{6}$,因此椭圆T的短轴与长轴的比值为$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.



7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I。若点 P 满足 $PI=1$，则 ΔABC 与 ΔAPC 的面积之比的最大值为_____.

【答案】 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

【解析】由 $PI=1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 k 上.

设 $\angle BAP=\alpha$，在圆 K 上取一点 P_0，使得 α 取到最大值 α_0，此时 P_0 应落在 $\angle IAC$ 内，且是 AP_0 与圆 K 的切点，由于 $0<\alpha\le\alpha_0<\frac{\pi}{3}$，故

$$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AB\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}\le\frac{\sin\alpha_0}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha_0)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)},(1)$$

其中，$\theta=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\angle IAP_0$. z 学科 xx 网 k

由 $\angle AP_0I=\frac{\pi}{2}$ 知，$\sin\theta=\frac{IP_0}{AI}=\frac{1}{2r}=\frac{1}{4}$，于是 $\cot\theta=\sqrt{15}$，所以

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{\cot\theta+\sqrt{3}}{\cot\theta-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

根据（1）、（2）可知，当 $P=P_0$ 时，$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}$ 的最大值为 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

8. 设 A,B,C,D 是空间四个不共面的点，以 $\frac{1}{2}$ 的概率在每对点之间连一条边，任意两点之间是否连边是相互独立的，则 A,B 可用（一条边或者若干条边组成的）空间折线连接的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】每对点之间是否连边有 2 种可能，共有 $2^4=64$ 种情况,考虑　　其中 A,B 可用折线连接的情况数.

(1) 有 AB 边，共2^5=32种情况.

(2) 无 AB 边，但是有 CD 边，此时 A,B 可用折线连接当且仅当 A 与 C,D 中至少一点相连，且 B 与 C,D 中至少一点相连，这样的情况数为$(2^2-1)\times(2^2-1)=9$.

(3) 无 AB 边，也无 CD 边，此时 AC,CB 相连有2^2种情况，AD,DB 相连也有 2 种情况,但是其中 AC,CB,AD,DB 均相连的情况被重复了一次，故 A,B 可用折线连接的情况数为2^2+2^2-1=7.

以上三类情况数的总和为32+9+7=48，故 A,B 可用折线连接的概率为$\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$.

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

9.（本题满分 16 分）平面直角坐标系 xOy 中，P 是不在 x 轴上一个动点，满足条件：过 P 可作抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线，两切点连线 l_P 与 PO 垂直。设直线 l_P 与 PO， x 轴的交点分别为 Q,R，

（1）证明： R 是一个顶点.

（2）求 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值.

【解析】（1）设 P 点的坐标为$(a,b)(b\neq 0)$, 易知 $a\neq 0$, 记两切点 A,B 的坐标为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则 PA,PB 的方程分别为 $yy_1=2(x+x_1)$ （1） $yy_2=2(x+x_2)$ （2）

而点 P 的坐标（a,b）同时满足（1），（2），故 A,B 的坐标均满足方程 by=2(x+a) （3），

故（3）就是直线 AB 的方程.

直线 PO 与 AB 的斜率分别为 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{2}{b}$, 由 $PO\perp AB$ 知， $\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{b}$=-1,故a=-2.

从而（3）即为 y=$\frac{2}{b}(x-2)$, 故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点（2,0）.

(2)因为 a=-2，故直线 PO 的斜率 $k_1=-\frac{b}{2}$, 直线 PR 的斜率 $k_2=-\frac{b}{4}$. 设 $\angle OPR=\alpha$, 则 α 为锐角，且

$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{1}{\tan\alpha}=\left|\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}\right|=\left|\frac{1+(-\frac{b}{2})(-\frac{b}{4})}{-\frac{b}{2}+\frac{b}{4}}\right|=\frac{8+b^2}{2|b|}\geq\frac{2\sqrt{8\cdot b^2}}{2|b|}=2\sqrt{2}$$

当 $b=\pm 2\sqrt{2}$ 时 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

10.（本题满分 20 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{\pi}{6}, a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)(n\in N*)$ 求正整数 m，使得 $\sin a_1 \sin a_2 \ldots\ldots \sin a_m=\frac{1}{100}$

【解析】由已知条件可知，对任意正整数 n，

$a_{n+1}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且 $\tan a_{n+1}=\sec a_n$. (1)

由于 $\sec a_n>0$，故 $a_{n+1}\in(0,\frac{\pi}{2})$ 由（1）得，$\tan^2 a_{n+1}=\sec^2 a_n=1+\tan^2 a_n$，故

$\tan^2 a_n=n-1+\tan^2 a_1=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3}$，即 $\tan a_n=\sqrt{\frac{3n-2}{3}}$.

因此 $\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_m=\frac{\tan a_1}{\sec a_1}\cdot\frac{\tan a_2}{\sec a_2}\cdots\frac{\tan a_m}{\sec a_m}=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdots\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}$（利用（1））

$=\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{3n+1}}$，由 $\sqrt{\frac{1}{3m+1}}=\frac{1}{100}$，得 $m=3333$.

11.（本题满分 20 分）确定所有的复数 α，使得对任意的复数 z_1, z_2（$|z_1|,|z_2|<1, z_1\neq z_2$），均有

$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}$

【解析】记 $f_\alpha(z)=(z+\alpha)^2+\alpha\overline{z}$. 则

$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}-(z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}$

$=(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)+\alpha(\overline{z_1}-\overline{z_2})$ (1)

假如存在复数 z_1，z_2（$|z_1|,|z_2|<1, z_1\neq z_2$），使得 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$，则由（1）知，

$|\alpha(\overline{z_1}-\overline{z_2})|=|-(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)|$，

利用 $|\overline{z_1}-\overline{z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|\neq 0$ 知，$|\alpha|=|z_1+z_2+2\alpha|\geq 2|\alpha|-|z_1|-|z_2|>2|\alpha|-2$，即 $|\alpha|<2$.

另外一方面，对任意满足 $|\alpha|<2$ 的复数 α，令 $z_1=-\frac{\alpha}{2}+\beta i, z_2=-\frac{\alpha}{2}-\beta i$，，其中 $0<\beta<1-\frac{|\alpha|}{2}$，

则 $z_1\neq z_2$，，而 $|-\frac{\alpha}{2}\pm\beta i|\leq|-\frac{\alpha}{2}|+|\beta|<1$，，故 $|z_1|,|z_2|<1$，，此时将

$z_1+z_2=-\alpha$，$z_1-z_2=2\beta i, \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{2\beta i}=-2\beta i$

代入（1）可得，$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=\alpha\cdot 2\beta i+\alpha\cdot(-2\beta i)=0$，即 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$

综上所述，符合要求的α值为$\{\alpha\,|\,\alpha\in C,|\alpha|\geq 2\}$.

2014 全国高中数学联赛二试试题参考答案

一、（本题满分 40 分）设$a,b,c\in R$，满足$a+b+c=1$，$abc>0$，

求证：$bc+ca+ab<\dfrac{\sqrt{abc}}{2}+\dfrac{1}{4}$

【证明】若$ab+bc+ac\leq\dfrac{1}{4}$,则命题已成立.

若$ab+bc+ac>\dfrac{1}{4}$,不妨设$a=\max\{a,b,c\}$,则$a+b+c=1$知$a\geq\dfrac{1}{3}$.

我们有$ab+bc+ac-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}\leq\dfrac{a}{4}$,(1)

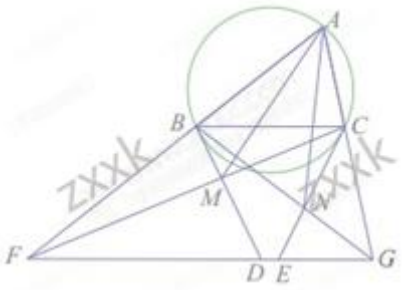
以及$ab+bc+ac-\dfrac{1}{4}=a(b+c)-\dfrac{1}{4}+bc=a(1-a)-\dfrac{1}{4}+bc\leq\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}+bc=bc$,(2)

其中（1）式等号在$a=\dfrac{1}{3}$时成立，（2）式等号在$a=\dfrac{1}{2}$时成立，因此（）1，（）2中等号不能同时成立.

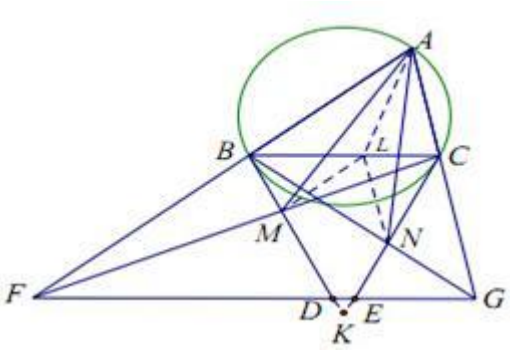
由于$ab+bc+ac-\dfrac{1}{4}>0$,将（1），（2）式相乘得

$(ab+bc+ac-\dfrac{1}{4})^2<\dfrac{abc}{4}$，即$ab+bc+ac-\dfrac{1}{4}<\dfrac{\sqrt{abc}}{2}$.从而$ab+bc+ac<\dfrac{\sqrt{abc}}{2}+\dfrac{1}{4}$.

二、（本题满分 40 分）如图，在锐角三角形 ABC 中，∠BAC≠60°，过点 B,C 分别作三角形 ABC 的外接圆的切线 BD,CE,且满足 BD=CE=BC,直线 DE 与 AB，AC 的延长线分别交于点 F,G，设 CF 与 BD 交于点 M,CE 与 BG 交于点 N，证明：AM=AN.



【证明】



如图，设两条切线BD,CE交于点K，则$BK=CK$,结合$BD=CE$可

知$DE\|BC$，作$\angle BAC$的平分线AL交BC于点L，连接LM,LN.

由$DE\|BC$知，$\angle ABC=\angle DFB,\angle FDB=\angle DBC=\angle BAC$,故$\triangle ABC$与

$\triangle DFB$相似.$\frac{MC}{MF}=\frac{BC}{FD}=\frac{BD}{FD}=\frac{AC}{AB}=\frac{LC}{LB}$,因此$LM\|BF$.

同理，$LN\|CG$,由此推出$\angle ALM=\angle ALB+\angle BLM=\angle ALB+\angle ABL=180^0-\angle BAL$

$=180^0-\angle CAL=\angle ALC+\angle ACL=\angle ALC+\angle CLN=\angle ALN$.

再结合$BC\|FG$以及内角平分线定理得到

$\frac{LM}{LN}=\frac{LM}{BF}\cdot\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{LN}=\frac{CL}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BL}=\frac{CL}{BL}\cdot\frac{AB}{AC}=1$ 及LM=LN.

故由AL=AL，$\angle ALM=\angle ALN$,LM=LN得到$\triangle ALM$与$\triangle ALN$ 全等，因而AM=AN,证毕.

三、（本题满分 50 分）设 S={1，2,3，…，100}.求最大的整数 k，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

【解析】对有限非空实数集 A,用 minA 与 maxA 分别表示 A 的最小元素与最大元素.考虑 S 的所有包含 1 且至少有两个元素的子集，一共2^{99}-1个，它们显然满足要求，因为$\min(A_i\cap A_j)=1<\max A_i$.故$k_{\max}\geq 2^{99}-1$.

下面证明$k\geq 2^{99}$时不存在满足要求的 k 个子集，我们用数学归纳法证明：对整数 n≥3，

在集合{1,2,3,…,n}的任意$m(\geq 2^{n-1})$个不同非空子集A_1，$A_2,\cdots,A_m$中，存在两个子集$A_i,A_j,i\neq j$，满足

$A_i\cap A_j\neq\phi$,且$\min(A_i\cap A_j)=\max A_i$. (1)显然只需对$m=2^{n-1}$的情形证明上述结论.

当 n=3 时，将{1，2,3}的全部 7 个非空子集分成 3 组，第一组：{3}，{1,3}，{2,3}；第二组：{2}，{1,2}；第三组：{1}，{1,2,3}.由抽屉原理，任意 4 个非空子集必有两个在同一组中，取同组中的两个子集分别记

为 A_i, A_j，排在前面的记为 A_i，则满足（1）.

假设结论在 n(n≥3)时成立，考虑 n+1 的情形. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$ 中至少有 2^{n-1} 个子集不含 n+1，对其中的 2^{n-1} 个子集用归纳假设，可知存在两个子集满足（1）.

若至多有 $2^{n-1}-1$ 个子集不含 n+1，则至少有 $2^{n-1}+1$ 个子集含 n+1，将其中 $2^{n-1}+1$ 子集都去掉 n+1，得到 {1，2，…，n}的 $2^{n-1}+1$ 个子集.

由于{1，2，…，n}的全体子集可分成 2^{n-1} 组，每组两个子集互补，故由抽屉原理，

在上述 $2^{n-1}+1$ 个子集中一定有两个属于同一组，即互为补集. 因此，相应地有两个子集

A_i, A_j，满足 $A_i \cap A_j$={n+1}，这两个集合显然满足（1），故 n+1 时结论成立. 综上所述，所求 $k_{\max}=2^{99}-1$.

四、（本题满分 50 分）设整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2014}$ 模2014互不同余，整数 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 模 2014 也互不同余. 证明：可将 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 重新排列为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2014}$，使得 $x_1+z_1, x_2+z_2, \cdots, x_{2014}+z_{2014}$ 模 4028 互不同余.

【证明】记k=1007，不妨设 $x_i \equiv y_i \equiv i \pmod{2k}, 1 \le i \le 2k$.对每个整数 i，

$1 \le i \le k$，若 x_i+y_i 不 $\equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}$，则令 $z_i=y_i, z_{i+k}=y_{i+k}$；否则，

令 $z_i=y_{i+k}, z_{i+k}=y_i$.

如果是前一种情形，则 $x_i+z_i=x_i+y_i$ 不 $\equiv x_{i+k}+y_{i+k}=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}$

如果是后一种情形，则也有 $x_i+z_i=x_i+y_{i+k}$ 不 $\equiv x_{i+k}+y_i=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}$

若不然，我们有 $x_i+y_i \equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}, x_i+y_{i+k} \equiv x_{i+k}+y_i \pmod{4k}$，

两式相加可得 $2x_i \equiv 2x_{i+k} \pmod{4k}$，于是 $x_i \equiv x_{i+k} \pmod{2k}$，但

$x_1, x_2, \cdots, x_{2014}$ 模2014(=2k)互不同余，特别地，x_i 不 $\equiv x_{i+k} \pmod{2k}$，矛盾.

由上述构造方法知 $z_1, z_2, \cdots, z_{2k}$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_{2k}$ 的排列. 记

$w_1=x_i+z_i, i=1,2,\cdots,2k$.下面 $w_1, w_2, \cdots, w_{2k}$ 模4k互不同余.

这只需证明，对任意整数 i，j，$1 \le i < j \le k$，

$w_i, w_j, w_{i+k}, w_{j+k}$模$4k$两两不同余.（*）

注意，前面的构造方式已保证 w_i不$\equiv w_{i+k}(\mathrm{mod}\,4k), w_j$不$\equiv w_{j+k}(\mathrm{mod}\,4k).(**)$

情形一：$z_i = y_i$,且$z_j = y_j$则由前面的构造方式可知

$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i(\mathrm{mod}\,2k), w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j(\mathrm{mod}\,2k).$

由于$2i$不$\equiv 2j(\mathrm{mod}\,2k)$,故易知$w_i$与$w_j$及$w_{j+k}$模$2k$

不同余，w_{i+k}与w_j及w_{j+k}模$2k$不同余，从而模$4k$更

不同余，再结合（**）可见（*）得证.

情形二：$z_i = y_{i+k}$,且$z_i = y_{j+k}$.则由前面的构造方式可知

$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i + k(\mathrm{mod}\,2k), w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j + k(\mathrm{mod}\,2k).$

同样有w_i与w_j及w_{j+k}模$2k$不同余，w_{i+k}与w_j及w_{j+k}模$2k$不同余.

与情形一相同地可知（*）得证.

情形三：$z_i = y_i$,且$z_j = y_{j+k}(z_i = y_{i+k}$,且$z_j = y_i$的情形与此相同）.

则由前面的构造方式可知 $w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i(\mathrm{mod}\,2k), w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j + k(\mathrm{mod}\,2k).$

由于k是奇数，故$2i$不$\equiv 2j + k(\mathrm{mod}\,2)$,更有$2i$不$\equiv 2j + k(\mathrm{mod}\,2k)$,

因此仍然有w_i与w_j及w_{j+k}模$2k$不同余，w_{i+k}与w_j及w_{j+k}模$2k$不同余.

从而（*）得证. 因此本题得证.