2013 年全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1、 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,2-x^2\notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为_____.

【答案】-5

【解析】易知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$，当 $x=-2,-3$ 时，$2-x^2=-2,-7$，有 $2-x^2\notin A$；而当 $x=0,-1$ 时，$2-x^2=2,1$，有 $2-x^2\in A$. 因此，根据 B 的定义可知 $B=\{-2,-3\}$. 所以，集合 B 中所有元素的和为-5.

2、 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$， F 是抛物线的焦点. $S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=$_____.

【答案】2.

【解析】点 F 坐标为 $(1,0)$. 设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$， $x_2=\frac{y_2^2}{4}$，故

$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2$，即 $\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故 $y_1y_2=-8$.

$S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|\right)\cdot\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|\right)=\frac{1}{4}\cdot|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2$.

3、 在 ΔABC 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C$， $\cos A=10\cos B\cos C$，则 $\tan A$ 的值为_____.

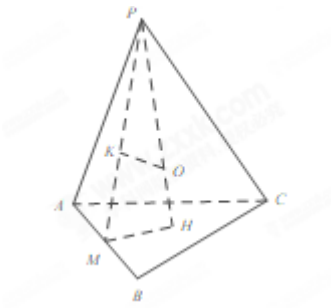
【答案】11.

【解析】由于 $\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$，所以 $\sin A=11\cos A$，故 $\tan A=11$.

4、 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{6}$

【解析】



如图，设球心 O 在面 ABC 与面 ABP 内的射影分别为 H 和 K，AB 中点为 M，内切球半径为 r，则 P、K、M

共线，P、O、H 共线，$\angle PHM=\angle PKO=\dfrac{\pi}{2}$，且

$OH=OK=r$，$PO=PH-OH=\sqrt{2}-r$，

$MH=\dfrac{\sqrt{3}}{6}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{\dfrac{1}{12}+2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$，

于是有 $\dfrac{r}{\sqrt{2}-r}=\dfrac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\dfrac{MH}{PM}=\dfrac{1}{5}$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

5、 设 a,b 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$. 则 ab 的最大值为_____.

【答案】$\dfrac{1}{4}$.

【解析】易知 $a=f(1)-f(0)$，$b=f(0)$，则

$$ab=f(0)\cdot(f(1)-f(0))=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}.$$

当 $2f(0)=f(1)=\pm1$，即 $a=b=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，$ab=\dfrac{1}{4}$. 故 ab 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.

6、 从 1,2，…，20 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为_____.

【答案】$\dfrac{232}{323}$

【解析】设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 取自 1,2，…，20，若 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 互不相邻，则

$$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le 16,$$

由此知从 1,2，…，20 中取 5 个互不相邻的数的选法与从 1,2，…，16 中取 5 个不同的数的选法相同，即 C_{16}^5 种.所以，从 1,2，…，20 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为 $\dfrac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\dfrac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\dfrac{232}{323}$.

7、 若实数 x,y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是_____.

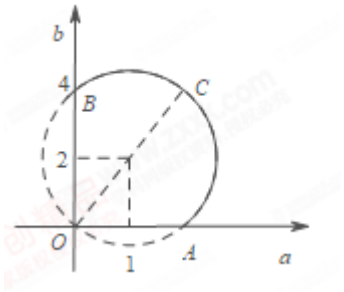
【答案】$\{0\}\cup[4,20]$.

【解析】令 $\sqrt{y}=a$，$\sqrt{x-y}=b(a,b\ge0)$，此时 $x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为

$a^2+b^2-4a=2b$，从而 a,b 满足方程

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5(a,b\ge0).$$

如图所示，



在 aOb 平面内，点 (a,b) 的轨迹是以 $(1,2)$ 为圆心，

$\sqrt{5}$ 为半径的圆在 $a,b\geq 0$ 的部分，即点 O 与弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的并集. 因此

$\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup\left[2,2\sqrt{5}\right]$，从而 $x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4,20]$.

8、 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$，均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$ 则这样的数列的个数为_____.

【答案】491

【解析】令 $b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}(1\leq i\leq 8)$，则对每个符合条件的数列 $\{a_n\}$ 有

$$\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_9}{a_1}=1，且\ b_i\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}(1\leq i\leq 8).\qquad ①$$

反之，由符合条件①的 8 项数列 $\{b_n\}$ 可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列 $\{a_n\}$.

记符合条件①的数列 $\{b_n\}$ 的个数为 N. 显然 $b_i(1\leq i\leq 8)$ 中有偶数个 $-\frac{1}{2}$，即 $2k$ 个 $-\frac{1}{2}$；继而有 $2k$ 个 2，$8-4k$ 个 1. 当给定 k 时，$\{b_n\}$ 的取法有 $C_8^{2k}C_{8-2k}^{2k}$ 种，易见 k 的可能值只有 0, 1, 2，所以

$$N=1+C_8^2C_6^2+C_8^4C_4^4=1+28\times 15+70\times 1=491.$$

因此，根据对应原理，符合条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 491.

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9.（本题满分 16 分）给定正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\geq 2S_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，这里

$S_n=x_1+\cdots+x_n$. 证明：存在常数 $C>0$，使得 $x_n\geq C\cdot 2^n$，$n=1,2,\cdots$.

【证明】当 $n\geq 2$ 时，$S_n\geq 2S_{n-1}$ 等价于 $x_n\geq x_1+\cdots+x_{n-1}$.　　①

对常数 $C=\frac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：$x_n\geq C\cdot 2^n$，$n=1,2,\cdots$. ②

$n=1$ 时结论显然成立. 又 $x_2\geq x_1=C\cdot 2^2$.

对 $n\geq 3$，假设 $x_k\geq C\cdot 2^k$， $k=1,2,\cdots,n-1$，则由①式知

$x_n\geq x_1+\left(x_2+\cdots+x_{n-1}\right)\geq x_1+\left(C\cdot 2^2+\cdots+C\cdot 2^{n-1}\right)=C\left(2^2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)=C\cdot 2^n$，

所以，由数学归纳法知，②式成立.

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$， A_1、A_2 分别为椭圆的左、右顶点， F_1、F_2 分别为椭圆的左、右焦点， P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点. 若平面中两个点 Q、R 满足 $QA_1\perp PA_1$， $QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系，并给出证明.

【解析】令 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 $A_1(-a,0)$， $A_2(a,0)$， $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$.

设 $P(x_0,y_0)$， $Q(x_1,y_1)$， $R(x_2,y_2)$，其中 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$， $y_0\neq 0$.

由 $QA_1\perp PA_1$， $QA_2\perp PA_2$ 可知 $\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0$， ①

$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0$ ②

将①、②相减，得 $2a(x_1+x_0)=0$，即 $x_1=-x_0$，将其代入①，得 $-x_0^2+a^2+y_1y_0=0$，

故 $y_1=\frac{x_0^2-a^2}{y_0}$， 于是 $Q\left(-x_0,\frac{x_0^2-a^2}{y_0}\right)$.

根据 $RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$， 同理可得 $R\left(-x_0,\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right)$. 因此 $|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|}$，

由于 $|y_0|\in(0,b]$，故 $|QR|\geq b$（其中等号成立的充分必要条件是 $|y_0|=b$，即点 P 为 $(0,\pm b)$）.

11.（本题满分 20 分）求所有的正实数对 (a,b)，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 x,y，有 $f(xy)+f(x+y)\geq f(x)f(y)$.

【解析】已知条件可转化为：对任意实数 x,y，有

$\left(ax^2y^2+b\right)+\left(a(x+y)^2+b\right)\geq\left(ax^2+b\right)\left(ay^2+b\right)$. ①

先寻找 a,b 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$，得 $b+\left(ax^2+b\right)\geq\left(ax^2+b\right)\cdot b$，即对任意实数 x，有 $(1-b)ax^2+b(2-b)\geq 0$.

由于 $a>0$，故 ax^2 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\geq 0$，即 $0<b\leq 1$.

在①式中再令 $y=-x$，得 $\left(ax^4+b\right)+b\geq\left(ax^2+b\right)^2$，即对任意实数 x，有

$\left(a-a^2\right)x^4-2abx^2+\left(2b-b^2\right)\geq 0$. ②

将②的左边记为 $g(x)$，显然 $a-a^2=0$（否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+\left(2b-b^2\right)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$ 可取到负值，矛盾），于是

$$g(x)=\left(a-a^2\right)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+\left(2b-b^2\right)$$

$$=\left(a-a^2\right)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

对一切实数 x 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$.

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据 $g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，可得 $2a+b\leq 2$.

至此，求得 a,b 满足的必要条件如下：

$0<b\leq 1$，$0<a<1$，$2a+b\leq 2$. ③

下面证明，对满足③的任意实数对 (a,b) 以及任意实数 x,y，总有①成立，即

$$h(x,y)=\left(a-a^2\right)x^2y^2+a(1-b)\left(x^2+y^2\right)+2axy+\left(2b-b^2\right)$$

对任意 x,y 取非负值.

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geq 0$，$a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，再结合 $x^2+y^2\geq -2xy$，可得

$$h(x,y)\geq\left(a-a^2\right)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+\left(2b-b^2\right)$$

$$=\left(a-a^2\right)x^2y^2+2abxy+\left(2b-b^2\right)=\left(a-a^2\right)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

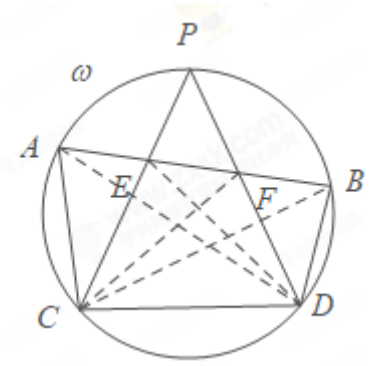
综上所述，所求的正实数对 (a,b) 全体为 $\left\{(a,b)\mid 0<b\leq 1,0<a<1,2a+b\leq 2\right\}$.

2013 年全国高中数学联赛二试试题参考答案

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$.连接 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C、D.求证：$EF\cdot CD=AC\cdot BD$



【证明】



连接 AD，BC，CF，DE.由于 $AE=EF=FB$，从而

$$\frac{BC\cdot\sin\angle BCE}{AC\cdot\sin\angle ACE}=\frac{\text{点}B\text{到直线}CP\text{的距离}}{\text{点}A\text{到直线}CP\text{的距离}}=\frac{BE}{AE}=2. \qquad ①$$

同样

$$\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle BDF}=\frac{\text{点}A\text{到直线}PD\text{的距离}}{\text{点}B\text{到直线}PD\text{的距离}}=\frac{AF}{BF}=2. \qquad ②$$

另一方面，由于

$\angle BCE=\angle BCP=\angle BDP=\angle BDF$，

$\angle ACE=\angle ACP=\angle ADP=\angle ADF$，

故将①，②两式相乘可得 $\dfrac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=4$，即

$$BC\cdot AD=4AC\cdot BD \qquad ③$$

由托勒密定理

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD+AB\cdot CD \qquad ④$$

故由③，④得 $AB\cdot CD=3AC\cdot BD$，

即 $EF\cdot CD=AC\cdot BD$.

二、（本题满分 40 分）给定正整数 u,v. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=u+v$，对整数 $m\geq 1$，

$$\begin{cases} a_{2m}=a_m+u, \\ a_{2m+1}=a_m+v. \end{cases}$$

记 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\left(m=1,2,\cdots\right)$.证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

【证明】对正整数 n，有

$$S_{2^{n+1}-1}=a_1+\left(a_2+a_3\right)+\left(a_4+a_5\right)+\cdots+\left(a_{2^{n+1}-2}+a_{2^{n+1}-1}\right)$$

$$=u+v+\left(a_1+u+a_1+v\right)+\left(a_2+u+a_2+v\right)+\cdots+\left(a_{2^n-1}+u+a_{2^n-1}+v\right)=2^n\left(u+v\right)+2S_{2^n-1},$$

所以 $S_{2^n-1}=2^{n-1}\left(u+v\right)+2S_{2^{n-1}-1}=2^{n-1}\left(u+v\right)+2\left(2^{n-2}\left(u+v\right)+2S_{2^{n-2}-1}\right)$

$$=2\cdot 2^{n-1}\left(u+v\right)+2^2S_{2^{n-2}-1}=\cdots=\left(n-1\right)\cdot 2^{n-1}\left(u+v\right)+2^{n-1}\left(u+v\right)=\left(u+v\right)n\cdot 2^{n-1}.$$

设 $u+v=2^k\cdot q$，其中 k 是非负整数，q 是奇数. 取 $n=q\cdot l^2$，其中 l 为满足 $l\equiv k-1\left(\mathrm{mod}\,2\right)$ 的任意正整数，此时 $S_{2^n-1}=q^2l^2\cdot 2^{k-1+q\cdot l^2}$，注意到 q 是奇数，故

$$k-1+q\cdot l^2\equiv k-1+l^2\equiv k-1+\left(k-1\right)^2=k\left(k-1\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,2\right),$$

所以，S_{2^n-1} 是完全平方数.由于 l 有无穷多个，故数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

三、（本题满分 50 分）一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m,n\geq 2$ 为给定的整数.每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分.每个学生得总分为其 m 道题的得分总和.将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$，求 p_1+p_n 得最大可能值.

【解析】对任意的 $k=1,2,\cdots,m.$，设第 k 题没有答对者有 x_k 人，则第 k 题答对者有 $n-x_k$ 人，由得分规则知，这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分.设 n 个学生得得分之和为 S，则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=s=\sum_{k=1}^{m}x_k\left(n-x_k\right)=n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2.$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分，故 $p_1\le\sum_{k=1}^{m}x_k$.

由于 $p_2\ge\cdots\ge p_1$，故有 $p_n\le\dfrac{p_2+p_3+\cdots+p_n}{n-1}=\dfrac{S-p_1}{n-1}$. 所以 $p_1+p_n\le p_1\dfrac{S-p_1}{n-1}=\dfrac{n-2}{n-1}p_1+\dfrac{S}{n-1}$

$$\le\frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k+\frac{1}{n-1}\cdot\left(n\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{k=1}^{m}x_k^2\right)=2\sum_{k=1}^{m}x_k-\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m}x_k^2.$$

由柯西不等式得 $\sum_{k=1}^{m}x_k^2\ge\dfrac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^2$，

于是 $p_1+p_n\le2\sum_{k=1}^{m}x_k-\dfrac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^2=-\dfrac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}x_k-m(n-1)\right)^2+m(n-1)\le m(n-1).$

另一方面，若有一个学生全部答对，其他 $n-1$ 个学生全部答错，则 $p_1+p_n=p_1=\sum_{k=1}^{m}(n-1)=m(n-1).$

综上所述，p_1+p_n 的最大值为 $m(n-1)$.

四、（本题满分 50 分）设 n,k 为大于 1 的整数，$n<2^k$.证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组若干个数的和被 n 整除.

【证明】先考虑 n 为 2 的幂的情形.

设 $n=2^r,r\ge1$，则 $r<k$.取 3 个 2^{r-1} 及 $2k-3$ 个 1，显然这些数均不被 n 整除.将这 $2k$ 个数任意分成两组，则总有一组中含 2 个 2^{r-1}，它们的和为 2^r，被 n 整除.

现在设 n 不是 2 的幂，取 $2k$ 个数为 $-1,-1,-2,-2^2,\cdots,-2^{k-2},1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$，

因为 n 不是 2 的幂，故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除.

若可将这些数分成两组，使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除.不妨设 1 在第一组，由于（-1）+1=0，被 n 整除，故两个-1 必须在第二组；因（-1）+（-1）+2=0，被 n 整除，故 2 在第一组，进而推出-2 在第二组.

现归纳假设 $1,2,\cdots,2^l$ 均在第一组，而 $-1,-1,-2,\cdots,-2^l$ 均在第二组，这里 $1\le l<k-2$，由于 $(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^l\right)+2^{l+1}=0$，被 n 整除，故 2^{l+1} 在第一组，从而 -2^{l+1} 在第二组.故由数学归纳法可

知，$1,2,2^2,\cdots,2^{k-2}$ 在第一组，$-1,-1,-2,-2^2,\cdots,-2^{k-2}$ 在第二组.最后，由于

$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^{k-2}\right)+2^{k-1}=0$，

被 n 整除，故 2^{k-1} 在第一组.因此 $1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$ 均在第一组，由正整数的二进制表示可知，每一个不超过 2^k-1 的正整数均可表示为 $1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}$ 中若干个数的和，特别地，因为 $n\le 2^k-1$，故第一组中有若干个数的和为 n，当然被 n 整除，矛盾.

因此，将前述 $2k$ 个整数任意分成两组，则总有一组中有若干个数之和被 n 整除.