2012年全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1. 设 P 是函数 $y=x+\frac{2}{x}$（$x>0$）的图像上任意一点，过点 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线，垂足分别为 A,B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值是_____.

【答案】-1

【解析】方法1：设 $p(x_0,x_0+\frac{2}{x_0})$，则直线 PA 的方程为 $y-(x_0+\frac{2}{x_0})=-(x-x_0)$，即 $y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0}$.

由 $\begin{cases}y=x\\ y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0}\end{cases}\Rightarrow A(x_0+\frac{1}{x_0},x_0+\frac{1}{x_0})$.

又 $B(0,x_0+\frac{2}{x_0})$，所以 $\overrightarrow{PA}=(\frac{1}{x_0},-\frac{1}{x_0}),\overrightarrow{PB}=(-x_0,0)$. 故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{x_0}\cdot(-x_0)=-1$.

2. 设 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，则 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值是_____.

【答案】4

【解析】由题设及余弦定理得 $a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a}{2bc}=\frac{3}{5}c$，即 $a^2-b^2=\frac{3}{5}c^2$ 故

$$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\frac{8}{5}c^2}{\frac{2}{5}c^2}=4.$$

3. 设 $x,y,z\in[0,1]$，则 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$ 的最大值是_____.

【答案】$\sqrt{2}+1$

【解析】不妨设 $0\le x\le y\le z\le 1$，则 $M=\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}+\sqrt{z-x}$.

因为 $\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}\le\sqrt{2[(y-x)+(z-y)]}=\sqrt{2(z-x)}$.

所以 $M\le\sqrt{2(z-x)}+\sqrt{z-x}=(\sqrt{2}+1)\sqrt{z-x}\le\sqrt{2}-1$.

当且仅当 $y-x=z-y,x=0,z=1,y=\frac{1}{2}$ 时上式等号同时成立. 故 $M_{\max}=\sqrt{2}+1$.

4. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，A,B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$．设线段 A B 的中点 M 在 l 上的投影为 N，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是_____.

【答案】1

【解析】由抛物线的定义及梯形的中位线定理得 $|MN|=\frac{|AF|+|BF|}{2}$.

在 ΔAFB 中，由余弦定理得 $|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\frac{\pi}{3}$

$=(|AF|+|BF|)^2-3|AF|\cdot|BF|\geq(|AF|+|BF|)^2-3(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2=(\frac{|AF|+|BF|}{2})^2=|MN|^2$.

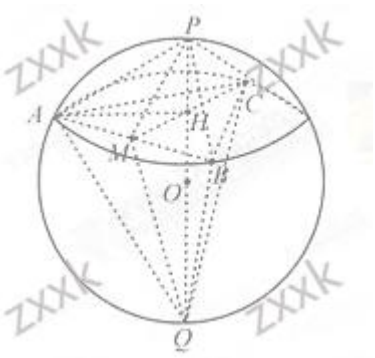
当且仅当 $|AF|=|BF|$ 时等号成立．故 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为1.

5．设同底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球．若正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的角为 45°，则正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成角的正切值是_____.

【答案】4

【解析】如图. 连结 PQ，则 $PQ\perp$ 平面 ABC，垂足 H 为正 ΔABC 的中心，且 PQ 过球心 O，连结 CH 并延长交 AB 于点 M，则 M 为 AB 的中点，且 $CM\perp AB$，易知 $\angle PMH,\angle QMH$ 分别为正三棱锥 $P-ABC,Q-ABC$ 的侧面与底面所成二角的平面角，则 $\angle PMH=45^\circ$，从而 $PH=MH=\frac{1}{2}AH$，因为 $\angle PAQ=90^\circ, AH\perp PQ,$

所以 $AP^2=PH\cdot QH$，即 $AH^2=\frac{1}{2}AH\cdot QH$.



所以 $QH=2AH=4MH.$，故 $\tan\angle QMH=\frac{QH}{MH}=4$

6. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=x^2$ ．若对任意的 $x\in[a,a+2]$，不等式 $f(x+a)\geq 2f(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$[\sqrt{2},+\infty)$.

【解析】由题设知 $f(x)=\begin{cases}x^2(x\geq 0)\\-x^2(x<0)\end{cases}$，则 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$. 因此，原不等式等价于 $f(x+a)\geq f(\sqrt{2}x)$.

因为 $f(x)$ 在 R 上是增函数，所以 $x+a\geq\sqrt{2}x$，即 $a\geq(\sqrt{2}-1)x$. 又 $x\in[a,a+2]$，所以当 $x=a+2$ 时，

$(\sqrt{2}-1)x$ 取得最大值 $(\sqrt{2}-1)(a+2)$. 因此，$a\geq(\sqrt{2}-1)(a+2)$，解得 $a\geq\sqrt{2}$. 故 a 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$.

7．满足 $\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是_____.

【答案】33

【解析】由正弦函数的凸性，有当 $x\in(0,\frac{\pi}{6})$ 时，$\frac{3}{\pi}x<\sin x<x$，由此得

$\sin\frac{\pi}{13}<\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4},\sin\frac{\pi}{12}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}$，

$\sin\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3},\sin\frac{\pi}{9}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{9}=\frac{1}{3}$. 所以 $\sin\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{11}<\sin\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{9}$.

故满足 $\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$ 的正整数 n 的所有值分别为 $10,11,12$，它们的和为 33.

8．某情报站有 A,B,C,D 四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种．设第 1 周使用 A 种密码，那么第 7 周也使用 A 种密码的概率是___．（用最简分数表示）

【答案】$\frac{61}{243}$

【解析】用 P_k 表示第 k 周用 A 种密码的概率，则第 k 周末用 A 种密码的概率为

$1-P_k$. 于是，有 $P_{k+1}=\frac{1}{3}(1-P_k),k\in N^*$，即 $P_{k+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(P_k-\frac{1}{4})$ 由 $P_1=1$ 知，$\left\{P_k-\frac{1}{4}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{4}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列. 所以 $P_k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}$，即 $P_k=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}+\frac{1}{4}$，故 $P_7=\frac{61}{243}$

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9.（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2},a\in R,a\neq 0$

（1）若对任意 $x\in R$，都有 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围；

（2）若$a\geq 2$，且存在$x\in R$，使得$f(x)\leq 0$，求a的取值范围.

【解析】(1) $f(x)=\sin^2 x+a\sin x+a-\frac{3}{a}$.令$t=\sin x(-1\leq t\leq 1)$,则$g(t)=t^2+at+a-\frac{3}{a}$

对任意$x\in R$，$f(x)\leq 0$恒成立的充要条件是$\begin{cases} g(-1)=1-\frac{3}{a}\leq 0 \\ g(1)=1+2a-\frac{3}{a}\leq 0 \end{cases}\Rightarrow a\in(0,1]$

(2)因为$a\geq 2$,所以$-\frac{a}{2}\leq -1$.所以$g(t)_{\min}=g(-1)=1-\frac{3}{a}$

因此$f(x)_{\min}=1-\frac{3}{a}$.于是,存在$x\in R$,使得$f(x)\leq 0$的充要条件是$1-\frac{3}{a}\leq 0\Rightarrow 0<a\leq 3.$

故a的取值范围是$[2,3]$.

10.（本小题满分 2 0 分）已知数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，且对于任意的正整数n，都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$$

（1）当$n=3$时，求所有满足条件的三项组成的数列a_1,a_2,a_3；

（2）是否存在满足条件的无穷数列$\{a_n\}$，使得$a_{2013}=-2012$？若存在，

求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由.

【解析】(1)当$n=1$时，$a_1^2=a_1^3$,由$a_1\neq 0$得$a_1=1$.当$n=2$时,$(1+a_2)^2=1+a_2^3$,由$a_2\neq 0$得$a_2=2$或$a_2=-1$

当$n=3$时,$(1+a_2+a_3)^2=1+a_2^3+a_3^3$.若$a_2=2$得$a_3=3$或$a_3=-2$;若$a_2=-1$得$a_3=1$;

综上,满足条件的三项数列有三个:1,2,3或1,2,-2或1,-,1

(2)令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则$S_n^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3(n\in N^*)$从而$(S_n+a_{n+1})^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3+a_{n+1}^3.$

两式相减,结合$a_{n+1}\neq 0$得$2S_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$当$n=1$时,由(1)知$a_1=1$;

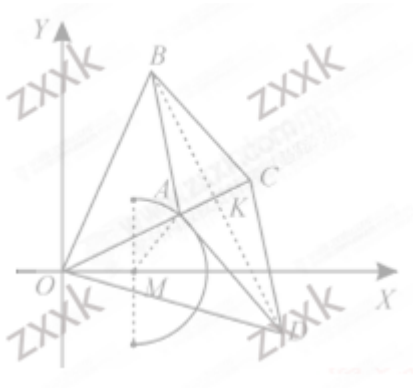
当$n\geq 2$时,$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_{n+1}^2-a_{n+1})-(a_n^2-a_n)$,即$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0,$

所以$a_{n+1}=-a_n$或$a_{n+1}=a_n+1$又$a_1=1,a_{2013}=-2012$,所以$a_n=\begin{cases} n(1\leq n\leq 2012) \\ 2012\cdot(-1)^n(n\geq 2013) \end{cases}$

11.（本小题满分20分）如图，在平面直角坐标系XOY中，菱形$ABCD$的边长为4，且$|OB|=|OD|=6$.

（1）求证：$|OA|\cdot|OC|$为定值；

（2）当点A在半圆$(x-2)^2+y^2=4$（$2\le x\le 4$）上运动时，求点C的轨迹.



【解析】因为$|OB|=|OD|,|AB|=|AD|=|BC|=|CD|$,所以$O,A,C$三点共线

如图,连结BD,则BD垂直平分线段AC,设垂足为K,于是有$|OA|\cdot|OC|=(|OK|-|AK|)(|OK|+|AK|)$

$=|OK|^2-|AK|^2=(|OB|^2-|BK|^2)-(|AB|^2-|BK|^2)=|OB|^2-|AB|^2=6^2-4^2=20$（定值）

(2)设$C(x,y),A(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$,其中$\alpha=\angle XMA(-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$,则$\angle XOC=\frac{\alpha}{2}$.

因为$|OA|^2=(2+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2=8(1+\cos\alpha)=16\cos^2\frac{\alpha}{2}$,所以$|OA|=4\cos\frac{\alpha}{2}$

由(1)的结论得$|OC|\cos\frac{\alpha}{2}=5$,所以$x=|OC|\cos\frac{\alpha}{2}=5$.从而$y=|OC|\sin\frac{\alpha}{2}=5\tan\frac{\alpha}{2}\in[-5,5]$.

故点C的轨迹是一条线段,其两个端点的坐标分别为$A(5,5),B(5,-5)$

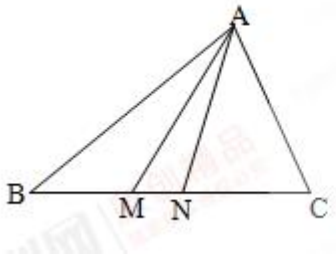
2012年全国高中数学联赛二试试题参考答案

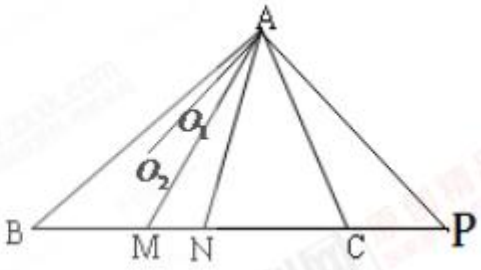
一、（本题满分40分）如图，在锐角ΔABC中，$AB>AC,M,N$是BC边上不同的两点，使得$\angle BAM=\angle CAN$.设ΔABC和ΔAMN的外心分别为O_1,O_2，求证：O_1,O_2,A三点共线.

【解析】证明：如图.连接AO_1,AO_2,过A点作AO_1的垂线AP交BC的延长线于点P,则AP是$\odot O_1$的切线.因此$\angle B=\angle PAC$

因为$\angle BAM=\angle CAN$,所以$\angle AMP=\angle B+\angle BAM=\angle PAC+\angle CAN=\angle PAN$

因而AP是$\triangle AMN$的外接圆O_2的切线,故$AP\perp AO_2$.所以O_1,O_2,A三点共线.





二、（本题满分 40 分）试证明：集合 $A=\{2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$ 满足

（1）对每个 $a\in A$，及 $b\in N^*$，若 $b<2a-1$，则 $b(b+1)$ 一定不是 $2a$ 的倍数；

（2）对每个 $a\in A$（其中 $\overline{A}$ 表示 A 在N 中的补集），且 $a\neq 1$，必存在 $b\in N^*$，$b<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

【解析】证明:对任意的 $a\in A$，设 $a=2^k,k\in N^*$，则 $2a=2^{k+1}$，如果 b 是任意一个小于 $2a-1$ 的正整数，则 $b+1\le 2a-1$

由于 b 与 $b+1$ 中，一个为奇数，它不含素因子 2，另一个是偶数，它含素因子 2 的幂的次数最多为 k，因此 $b(b+1)$ 一定不是 $2a$ 的倍数；

若 $a\in A$，且 $a\neq 1$，设 $a=2^k\cdot m$，其中 k 为非负整数，m 为大于 1 的奇数，则 $2a=2^{k+1}\cdot m$

下面给出(2)的三种证明方法：

证法一：令 $b=mx,b+1=2^{k+1}y$，消去 b 得 $2^{k+1}y-mx=1.$

由于 $(2^{k+1},m)=1$，这方程必有整数解；$\begin{cases}x=x_0+2^{k+1}t\\y=y_0+mt\end{cases}$ 其中 $t\in z,(x_0,y_0)$ 为方程的特解.

把最小的正整数解记为 (x^*,y^*)，则 $x^*<2^{k+1}$，故 $b=mx^*<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

证法二：由于 $(2^{k+1},m)=1$，由中国剩余定理知，同余方程组

$\begin{cases}x=0(\mathrm{mod}\,2^{k+1})\\x=m-1(\mathrm{mod}\,m)\end{cases}$ 在区间 $(0,2^{k+1}m)$ 上有解 $x=b$，即存在 $b<2a-1$，使 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

证法三：由于 $(2,m)=1$，总存在 $r(r\in N^*,r\le m-1)$，使 $2^r=1(\mathrm{mod}\,m)$ 取 $t\in N^*$，使 $tr>k+1$，则 $2^{tr}=1(\mathrm{mod}\,m)$

存在 $b=(2^{tr}-1)-q\cdot(2^{k+1}m)>0,q\in N$，使 $0<b<2a-1$，

此时 $m\left|b,2^{k+1}\right|m+1$, 因而 $b(b+1)$ 是 $2a$ 的倍数.

三、（本题满分 50 分）设 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是平面上 $n+1$ 个点，它们两两间的距离的最小值为 $d(d>0)$ 求证：

$$\left|P_0P_1\right|\cdot\left|P_0P_2\right|\cdots\left|P_0P_n\right|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$$

【解析】证法一：不妨设 $\left|P_0P_1\right|\le\left|P_0P_2\right|\le\cdots\le\left|P_0P_n\right|$. 先证明：对任意正整数 k，都有 $\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$

显然， $\left|P_0P_k\right|\ge d\ge\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 对 $k=1,2,\cdots,8$ 均成立，只有 $k=8$ 时右边取等号

所以，只要证明当 $k\ge9$ 时，有 $\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 即可.

以 $P_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为圆心，$\frac{d}{2}$ 为半径画 $k+1$ 个圆，它们两两相离或外切；以 P_0 圆心，$\left|P_0P_k\right|+\frac{d}{2}$ 为半径画圆，这个圆覆盖上述 $k+1$ 个圆

所以 $\pi(\left|P_0P_k\right|+\frac{d}{2})^2>(k+1)\pi(\frac{d}{2})^2\Rightarrow\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{2}(\sqrt{k+1}-1)$

由 $k\ge9$ 易知 $\frac{\sqrt{k+1}-1}{2}>\frac{\sqrt{k+1}}{3}$，所以 $\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$ 对 $k\ge9$ 时也成立.

综上，对任意正整数 k 都有 $\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$. 因而 $\left|P_0P_1\right|\cdot\left|P_0P_2\right|\cdots\left|P_0P_n\right|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$

证法二：不妨设 $\left|P_0P_1\right|\le\left|P_0P_2\right|\le\cdots\le\left|P_0P_n\right|$.

以 $P_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为圆心，$\frac{d}{2}$ 为半径画 $k+1$ 个圆，它们两两相离或外切；

设 Q 是是圆 P_i 上任意一点，由于

$$\left|P_0Q\right|\le\left|P_0P_i\right|+\left|P_iQ\right|=\left|P_0P_i\right|+\frac{d}{2}\le\left|P_0P_k\right|+\frac{1}{2}\left|P_0P_k\right|=\frac{3}{2}\left|P_0P_k\right|$$

因而，以 P_0 为圆心，$\frac{3}{2}\left|P_0P_k\right|$ 为半径的圆覆盖上述个圆

故 $\pi(\frac{3}{2}\left|P_0P_k\right|)^2>(k+1)\pi(\frac{d}{2})^2\Rightarrow\left|P_0P_k\right|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$

所以 $\left|P_0P_1\right|\cdot\left|P_0P_2\right|\cdots\left|P_0P_n\right|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$

四、（本题满分 50 分）设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$， n 是正整数．证明：对满足 $0\le a<b\le1$ 的任意实数 a,b，数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b)．这里，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．

【解析】证法一：(1) 对任意 $n\in N^*$，有

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}n$$

令 $N_0=[\frac{1}{b-a}]+1, m=[S_{n_0}]+1$, 则 $\frac{1}{b-a}<N_0, \frac{1}{N_0}<b-a, S_{n_0}<m\le m+n$

又令 $N_1=2^{t(m+1)}$, 则 $S_{N_1}=S_{2^{t(m+1)}}>m+1\ge m+b$.

因此存在 $n\in N^*, N_0<n<N_1$, 使得 $m+a<S_n<m+b$, 所以 $S_n-[S_n]\in(a,b)$

不然一定存在 $N_0<k$, 使得 $S_{k-1}\le m+a, S_k\ge m+b$, 因此 $S_k-S_{k-1}\ge b-a$,

这与 $S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}<\frac{1}{N_0}<b-a$ 矛盾. 所以一定存在 $n\in N^*$, 使得 $S_n-[S_n]\in(a,b)$

(2) 假设只有有限个正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$, 使得 $S_{n_j}-[S_{n_j}]\in(a,b),(1\le j\le k)$ 令 $c=\min\limits_{1\le j\le k}\{S_{n_j}-[S_{n_j}]\}$, 则

$a<c<b$, 则不存在 $n\in N^*$, $n\in N^*$, 使得 $S_n-[S_n]\in(a,c)$, 这与（1）的结论矛盾.

所以数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b). 终上所述原命题成立

证法二: (1) $S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}n$$

因此, 当 n 充分大时, S_n 可以大于如何一个正数, 令 $N_0=[\frac{1}{b-a}]+1$, 则 $N_0>\frac{1}{b-a}$, 当 $k>N_0$ 时,

$$S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}<\frac{1}{N_0}<b-a$$

因此, 对于如何大于 S_{N_0} 的正整数 m, 总存在 $n>N_0$, 使 $S_n-m\in(a,b)$,

即 $m+a<S_n<m+b$, 否则, 一定存在 $k>N_0$, 使 $S_{k-1}\le m+a$, 且 $S_k\ge m+b$,

这样就有 $S_k-S_{k-1}\ge b-a$,

而 $S_k - S_{k-1} = \frac{1}{k} < \frac{1}{N_0} < b-a$，矛盾. 故一定存在 $n > N_0$，使得 $m+a < S_n < m+b$，

令 $m_i = [S_{N_0}] + i(i = 1, 2, 3, \cdots)$，则 $m_i > S_{N_0}$，故一定存在 $n_1 > N_0$，

使 $m_i + a < S_{n_i} < m_i + b$，因此 $a < S_{n_i} - m_i = S_{n_i} - [S_{n_i}] < b$

这样的 i 有无穷多个，所以数列 $\{S_n - [S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a, b)