2011 全国高中数学联赛一试试题参考答案

1．设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$ _____.

【答案】$\{-3,0,2,6\}$.

【解析】提示：显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以

$$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15,$$

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合 A 的四个元素分别为 5－（－1）=6，5－3=2，5－5=0，5－8=－3，因此，集合 $A=\{-3,0,2,6\}$.

2．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为_____.

【答案】$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup(1,+\infty)$.

【解析】提示：设 $x=\tan\theta,-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta-1}=\dfrac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}$.

设 $u=\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$，则 $-\sqrt{2}\le u<1$，且 $u\neq0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{u}\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup(1,+\infty)$.

3．设 a,b 为正实数，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $\log_a b=$ _____.

【答案】-1.

【解析】提示：由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le2\sqrt{2}$，得 $a+b\le2\sqrt{2}ab$．又

$$(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\ge4\cdot2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2,$$

即 $a+b\ge2\sqrt{2}ab$．　　①

于是 $a+b=2\sqrt{2}ab$．　　②

再由不等式①中等号成立的条件，得 $ab=1$．与②联立解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$ 故 $\log_a b=-1$.

4．如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，那么 θ 的取值范围是_____.

【答案】$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

【解析】提示：不等式 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$

等价于 $\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta$.

又 $f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以 $\sin\theta>\cos\theta$，故 $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in Z)$.

因为 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

5．现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为_____.（用数字作答）

【答案】15000.

【解析】提示：由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：

（1）有一个项目有 3 人参加，共有 $C_7^3\cdot 5!-C_5^1\cdot 5!=3600$ 种方案；

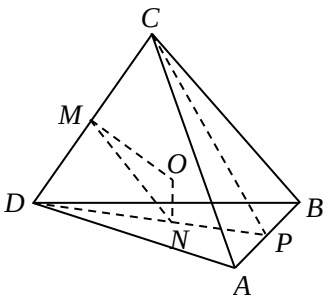
（2）有两个项目各有 2 人参加，共有 $\frac{1}{2}(C_7^2\cdot C_5^2)\cdot 5!-C_5^2\cdot 5!=11400$ 种方案；

所以满足题设要求的方案数为 $3600+11400=15000$.

6．在四面体 $ABCD$ 中，已知 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60°$，$AD=BD=3$，$CD=2$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为_____.

【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】



提示：设四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O，则 O 在过△ ABD 的外心 N 且垂直于平面 ABD 的垂线上．由题设知，△ ABD 是正三角形，则点 N 为△ ABD 的中心．设 P,M 分别为 AB,CD 的中点，则 N 在 DP 上，且 $ON\perp DP$，$OM\perp CD$.

因为 $\angle CDA=\angle CDB=\angle ADB=60^\circ$，设 CD 与平面 ABD 所成角为 θ，可求得 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．

在△ DMN 中，$DM=\frac{1}{2}CD=1,DN=\frac{2}{3}\cdot DP=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3=\sqrt{3}$．

由余弦定理得 $MN^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2$，

故 $MN=\sqrt{2}$．四边形 $DMON$ 的外接圆的直径

$OD=\frac{MN}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$．故球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$．

7．直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点，C 为抛物线上的一点，$\angle ACB=90^\circ$，则点 C 的坐标为_____.

【答案】$(1,-2)$ 或 $(9,-6)$．

【解析】提示：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(t^2,2t)$，由 $\begin{cases}x-2y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-8y-4=0$，则 $y_1+y_2=8$，$y_1\cdot y_2=-4$．

又 $x_1=2y_1+1,x_2=2y_2+1$，所以 $x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18$，

$x_1\cdot x_2=4y_1\cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1$．

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即有 $(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0$，

即 $t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1\cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1\cdot y_2=0$，

即 $t^4-14t^2-16t-3=0$，　即 $(t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0$．

显然 $t^2-4t-1\neq 0$，否则 $t^2-2\cdot 2t-1=0$，则点 C 在直线 $x-2y-1=0$ 上，从而点 C 与点 A 或点 B 重合．所以 $t^2+4t+3=0$，解得 $t_1=-1,t_2=-3$．　故所求点 C 的坐标为 $(1,-2)$ 或 $(9,-6)$．

8．已知 $a_n=C_{200}^n\cdot\left(\sqrt[3]{6}\right)^{200-n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(n=1,2,\cdots,95)$，则数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数为_____.

【答案】15.

【解析】提示：$a_n=C_{200}^n\cdot 3^{\frac{200-n}{3}}\cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}$．

要使 $a_n(1\le n\le 95)$ 为整数，必有 $\frac{200-n}{3},\frac{400-5n}{6}$ 均为整数，从而 $6\mid n+4$．

当 $n=2,8,14,20,26,32,38,44,50,56,62,68,74,80$ 时，$\frac{200-n}{3}$ 和 $\frac{400-5n}{6}$ 均为非负整数，所以 a_n 为整数，共有 14 个．

当 $n=86$ 时，$a_{86}=C_{200}^{86}\cdot 3^{38}\cdot 2^{-5}$，在 $C_{200}^{86}=\dfrac{200!}{86!\cdot 114!}$ 中，$200!$ 中因数 2 的个数为

$\left[\dfrac{200}{2}\right]+\left[\dfrac{200}{2^2}\right]+\left[\dfrac{200}{2^3}\right]+\left[\dfrac{200}{2^4}\right]+\left[\dfrac{200}{2^5}\right]+\left[\dfrac{200}{2^6}\right]+\left[\dfrac{200}{2^7}\right]=197$，

同理可计算得 $86!$ 中因数 2 的个数为 82，$114!$ 中因数 2 的个数为 110，所以 C_{200}^{86} 中因数 2 的个数为

$197-82-110=5$，故 a_{86} 是整数.

当 $n=92$ 时，$a_{92}=C_{200}^{92}\cdot 3^{36}\cdot 2^{-10}$，在 $C_{200}^{92}=\dfrac{200!}{92!\cdot 108!}$ 中，同样可求得 $92!$ 中因数 2 的个数为 88，$108!$ 中因数 2 的个数为 105，故 C_{200}^{86} 中因数 2 的个数为 $197-88-105=4$，故 a_{92} 不是整数.

因此，整数项的个数为 $14+1=15$.

9.（本题满分 16 分）设函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$，实数 $a,b(a<b)$ 满足 $f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，$f(10a+6b+21)=4\lg 2$，求 a,b 的值.

【解析】因为 $f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，所以 $|\lg(a+1)|=|\lg(-\dfrac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg(\dfrac{1}{b+2})|=|\lg(b+2)|$，

所以 $a+1=b+2$ 或 $(a+1)(b+2)=1$，又因为 $a<b$，所以 $a+1\neq b+2$，所以 $(a+1)(b+2)=1$.

又由 $f(a)=|\lg(a+1)|$ 有意义知 $0<a+1$，从而 $0<a+1<b+1<b+2$，于是 $0<a+1<1<b+2$.

所以 $(10a+6b+21)+1=10(a+1)+6(b+2)=6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}>1$.

从而 $f(10a+6b+21)=|\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]|=\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]$.

又 $f(10a+6b+21)=4\lg 2$，所以 $\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]=4\lg 2$，

故 $6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}=16$. 解得 $b=-\dfrac{1}{3}$ 或 $b=-1$（舍去）.

把 $b=-\dfrac{1}{3}$ 代入 $(a+1)(b+2)=1$ 解得 $a=-\dfrac{2}{5}$. 所以 $a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{1}{3}$.

10.（本题满分 20 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-3\ (t\in\mathbb{R}$ 且 $t\neq\pm 1)$，

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\quad(n\in\mathbb{N}^*).$$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $t>0$，试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

【解析】（1）由原式变形得 $a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}-1$，则 $\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\frac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+1}{t^n-1}+2}$．

记 $\frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n$，则 $b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}$，$b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2$．

又 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$，从而有 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，故 $\frac{a_n+1}{t^n-1}=\frac{2}{n}$，于是有 $a_n=\frac{2(t^n-1)}{n}-1$．

（2）$a_{n+1}-a_n=\frac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\frac{2(t^n-1)}{n}=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]$

$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+(t^n-t^{n-1})\right]$

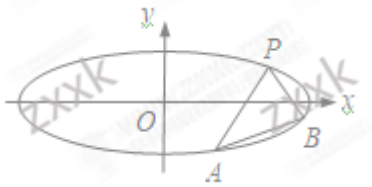
$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}\right]$，

显然在 $t>0\,(t\neq1)$ 时恒有 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$．

11．（本题满分 20 分）作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A,B 两点（如图所示），且 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方．

（1）证明：△ PAB 的内切圆的圆心在一条定直线上；

（2）若 $\angle APB=60°$，求△ PAB 的面积．



【解析】（1）设直线 l：$y=\frac{1}{3}x+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

将 $y=\frac{1}{3}x+m$ 代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，化简整理得 $2x^2+6mx+9m^2-36=0$．

于是有 $x_1+x_2=-3m$，$x_1x_2=\frac{9m^2-36}{2}$，$k_{PA}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}$，$k_{PB}=\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$．则

$$k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}=\frac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})},$$

上式中，分子 $=(\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})$

$=\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}+(m-2\sqrt{2})(-3m)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})$

$=3m^2-12-3m^2+6\sqrt{2}m-6\sqrt{2}m+12=0$，从而，$k_{PA}+k_{PB}=0$．

又 P 在直线 l 的左上方，因此，$\angle APB$ 的角平分线是平行于 y 轴的直线，所以△ PAB 的内切圆的圆心在直线 $x=3\sqrt{2}$ 上.

（2）若 $\angle APB=60°$ 时，结合（1）的结论可知 $k_{PA}=\sqrt{3}, k_{PB}=-\sqrt{3}$.

直线 PA 的方程为：$y-\sqrt{2}=\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$，代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，消去 y 得

$$14x^2+9\sqrt{6}(1-3\sqrt{3})x+18(13-3\sqrt{3})=0 .$$

它的两根分别是 x_1 和 $3\sqrt{2}$，所以 $x_1\cdot 3\sqrt{2}=\frac{18(13-3\sqrt{3})}{14}$，即 $x_1=\frac{3\sqrt{2}(13-3\sqrt{3})}{14}$. 所以

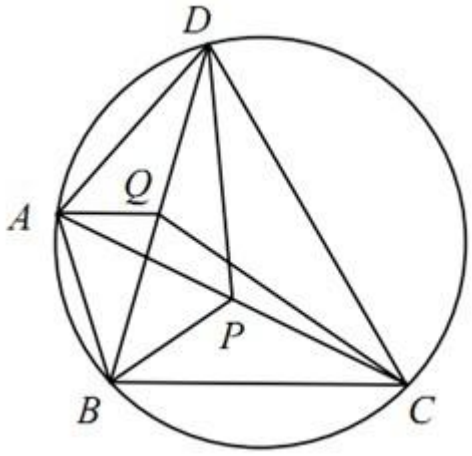
$$|PA|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot|x_1-3\sqrt{2}|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7} .$$

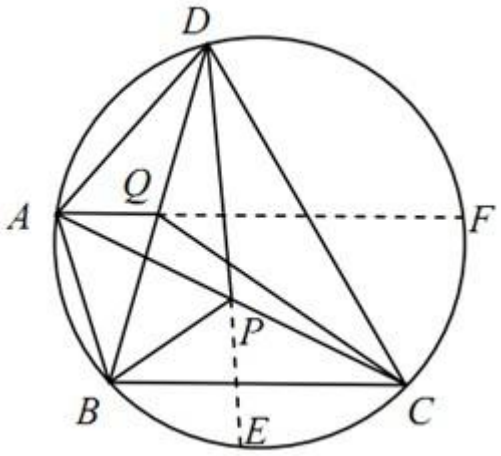
同理可求得 $|PB|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}$.

所以 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{117\sqrt{3}}{49}.$

2011 全国高中数学联赛二试试题参考答案

一、（本题满分 40 分）如图，P，Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 的中点．若 $\angle BPA=\angle DPA$，证明：$\angle AQB=\angle CQB$.





【解析】 延长线段 DP 与圆交于另一点 E，则 $\angle CPE=\angle DPA=\angle BPA$，又 P 是线段 AC 的中点，故 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CE}$，从而 $\angle CDP=\angle BDA$.

又 $\angle ABD=\angle PCD$，所以△ $ABD\backsim$△ PCD，于是 $\frac{AB}{BD}=\frac{PC}{CD}$，即 $AB\cdot CD=PC\cdot BD$.

从而有 $AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AC\cdot(\frac{1}{2}BD)=AC\cdot BQ$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{BQ}{CD}$.

又 $\angle ABQ=\angle ACD$，所以$\triangle ABQ\backsim\triangle ACD$，所以 $\angle QAB=\angle DAC$．

延长线段 AQ 与圆交于另一点 F，则 $\angle CAB=\angle DAF$，故 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF}$．

又因为 Q 为 BD 的中点，所以 $\angle CQB=\angle DQF$．

又 $\angle AQB=\angle DQF$，所以 $\angle AQB=\angle CQB$．

二、（本题满分 40 分）证明：对任意整数 $n\geq 4$，存在一个 n 次多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

具有如下性质：

（1）$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 均为正整数；

（2）对任意正整数 m，及任意 $k\ (k\geq 2)$ 个互不相同的正整数 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，均有

$$f(m)\neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)\ .$$

【解析】令 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+2$，　　①

将①的右边展开即知 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的正整数系数的 n 次多项式．

下面证明 $f(x)$ 满足性质（2）．

对任意整数 t，由于 $n\geq 4$，故连续的 n 个整数 $t+1,t+2,\cdots,t+n$ 中必有一个为 4 的倍数，从而由①知 $f(t)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$．

因此，对任意 $k\ (k\geq 2)$ 个正整数 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，有 $f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)\equiv 2^k\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$．

但对任意正整数 m，有 $f(m)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$，故 $f(m)\not\equiv f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)(\mathrm{mod}\,4)$，

从而 $f(m)\neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$．所以 $f(x)$ 符合题设要求．

三、（本题满分 50 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geq 4)$ 是给定的正实数，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．对任意正实数 r，满足 $\dfrac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r\ (1\leq i<j<k\leq n)$ 的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $f_n(r)$．证明：$f_n(r)<\dfrac{n^2}{4}$．

【解析】对给定的 $j\ (1<j<n)$，满足 $1\leq i<j<k\leq n$，且 $\dfrac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r$　①

的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $g_j(r)$．

注意到，若 i,j 固定，则显然至多有一个 k 使得①成立．因 $i<j$，即 i 有 $j-1$ 种选法，故 $g_j(r)\leq j-1$．

同样地，若 j,k 固定，则至多有一个 i 使得①成立．因 $k>j$，即 k 有 $n-j$ 种选法，故 $g_j(r)\leq n-j$．从而 $g_j(r)\leq\min\{j-1,n-j\}$．

因此，当n为偶数时，设$n=2m$，则有$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m-1}g_j(r)+\sum_{j=m}^{2m-1}g_j(r)$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m-1}(2m-j)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=m^2-m<m^2=\frac{n^2}{4}.$$

当n为奇数时，设$n=2m+1$，则有$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m}g_j(r)+\sum_{j=m+1}^{2m}g_j(r)$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m}(2m+1-j)=m^2<\frac{n^2}{4}.$$

四、（本题满分 50 分）设 A 是一个3×9的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个$m\times n\ (1\le m\le3,1\le n\le9)$方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个1×1的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值．

【解析】首先证明 A 中“坏格”不多于 25 个．

用反证法．假设结论不成立，则方格表A中至多有 1 个小方格不是“坏格”．由表格的对称性，不妨假设此时第 1 行都是“坏格”．

设方格表A第i列从上到下填的数依次为$a_i,b_i,c_i,\ i=1,2,\cdots,9$．记$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i,T_k=\sum_{i=1}^{k}(b_i+c_i),\ k=0,1,2,\cdots,9$，这里$S_0=T_0=0$．

我们证明：三组数$S_0,S_1,\cdots,S_9$；$T_0,T_1,\cdots,T_9$及$S_0+T_0,S_1+T_1,\cdots,S_9+T_9$都是模 10 的完全剩余系．

事实上，假如存在$m,n,\ 0\le m<n\le9$，使$S_m\equiv S_n(\mathrm{mod}10)$，则$\sum_{i=m+1}^{n}a_i=S_n-S_m\equiv0(\mathrm{mod}10)$，

即第 1 行的第$m+1$至第n列组成一个“好矩形”，与第 1 行都是“坏格”矛盾．

又假如存在$m,n,\ 0\le m<n\le9$，使$T_m\equiv T_n(\mathrm{mod}10)$，则$\sum_{i=m+1}^{n}(b_i+c_i)=T_n-T_m\equiv0(\mathrm{mod}10)$，

即第 2 行至第 3 行、第$m+1$列至第n列组成一个“好矩形”，从而至少有 2 个小方格不是“坏格”，矛盾．

类似地，也不存在$m,n,\ 0\le m<n\le9$，使

$$S_m+T_m\equiv S_n+T_n(\mathrm{mod}10).$$

因此上述断言得证．故

$$\sum_{k=0}^{9}S_k\equiv\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv0+1+2+\cdots+9\equiv5(\mathrm{mod}10),$$

所以 $$\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv\sum_{k=0}^{9}S_k+\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv5+5\equiv0(\mathrm{mod}10),$$

矛盾！故假设不成立，即“坏格”不可能多于 25 个．

另一方面，构造如下一个3×9的方格表，可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”，此时有 25 个“坏格”．

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述，“坏格”个数的最大值是 25.