2010 年全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是_____.

【答案】$[-3,\sqrt{3}]$

【解析】易知 $f(x)$ 的定义域是 $[5,8]$，且 $f(x)$ 在 $[5,8]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$-\frac{3}{2}\le a\le 12$

【解析】令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$，即 $g(t)=-at^3+(a-3)t$.

由 $-at^3+(a-3)t\ge -3$，$-at(t^2-1)-3(t-1)\ge 0$，$(t-1)(-at(t+1)-3)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知

$-at(t+1)-3\le 0$ 即 $a(t^2+t)\ge -3$.　　（1）　当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$. 从而可知 $-\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是_____.

【答案】9800

【解析】提示：由对称性知，只要先考虑 x 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,99)$ 与双曲线右半支于 A_k，交直线 $x=100$ 于 B_k，则线段 A_kB_k 内部的整点的个数为 $99-k$，从而在 x 轴上方区域内部整点的个数为 $\sum_{k=1}^{99}(99-k)=99\times 49=4851$. 又 x 轴上有 98 个整点，所以所求整点的个数为 $2\times 4851+98=9800$.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$，且存在常数 α,β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ _____.

【答案】$\sqrt[3]{3}+3$

【解析】提示：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，则

$3+d=q,$　　（1）

$3(3+4d)=q^2$，　　（2）

（1）代入（2）得$9+12d=d^2+6d+9$，求得$d=6,q=9$.

从而有$3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$ 对一切正整数n都成立，即$6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数n都成立. 从而 $\log_\alpha 9=6,-3=-\log_\alpha 9+\beta$，求得 $\alpha=\sqrt[3]{3},\beta=3$，$\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0,a\neq 1)$ 在区间$x\in[-1,1]$上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 _____ .

【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】 提示：令$a^x=y$，则原函数化为$g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$在$(-\frac{3}{2},+\infty)$上是递增的.

当$0<a<1$时，$y\in[a,a^{-1}]$，$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，

所以 $g(y)_{\min}=(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4}$；

当 $a>1$时，$y\in[a^{-1},a]$，$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2$，

所以 $g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\frac{1}{4}$. 综上$f(x)$在$x\in[-1,1]$上的最小值为$-\frac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 _____.

【答案】$\frac{12}{17}$

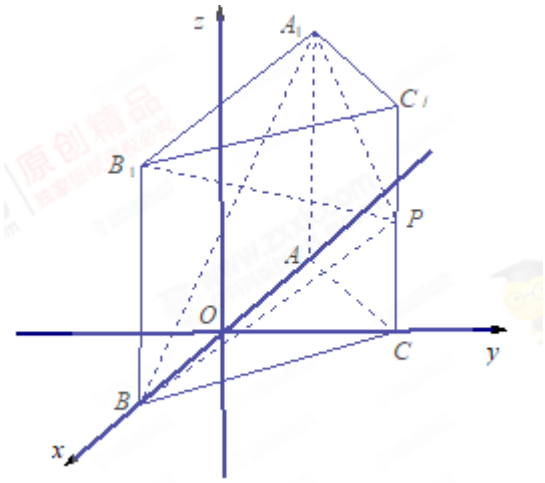
【解析】提示：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

$\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^2\times\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^4\times\frac{7}{12}+\cdots=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{12}{17}$.

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=$ _____ .

【答案】$\frac{\sqrt{10}}{4}$

【解析】



提示：解法一：如图，以 AB 所在直线为 x 轴， 线段 AB 中点 O 为原点， OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系.设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0),B_1(1,0,2),A_1(-1,0,2),P(0,\sqrt{3},1)$，从而，

$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1),\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0),\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1)$.

设分别与平面 BA_1P 、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 、 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

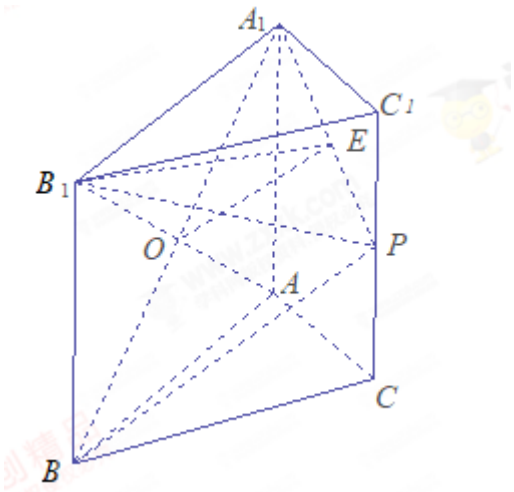
$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$$

由此可设 $\vec{m}=(1,0,1),\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，所以 $\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|=\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\left|\cos\alpha\right|$，即

$\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2\left|\cos\alpha\right|\Rightarrow\left|\cos\alpha\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. 所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

解法二：如图，



$PC = PC_1, PA_1 = PB$.

设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，则 $OA_1 = OB, OA = OB_1, A_1B \perp AB_1$.

因为 $PA = PB_1$，所以 $PO \perp AB_1$，从而 $AB_1 \perp$ 平面 PA_1B .

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE \perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B - A_1P - B_1$ 的平面角．设 $AA_1 = 2$，则易求得

$PB = PA_1 = \sqrt{5}, A_1O = B_1O = \sqrt{2}, PO = \sqrt{3}$.

在直角 ΔPA_1O 中，$A_1O \cdot PO = A_1P \cdot OE$，即 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5} \cdot OE, \therefore OE = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O = \sqrt{2}, \therefore B_1E = \sqrt{B_1O^2 + OE^2} = \sqrt{2 + \dfrac{6}{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$$\sin\alpha = \sin\angle B_1EO = \frac{B_1O}{B_1E} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

8. 方程 $x + y + z = 2010$ 满足 $x \le y \le z$ 的正整数解（x, y, z）的个数是_____.

【答案】336675

【解析】提示：首先易知 $x + y + z = 2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^2 = 2009 \times 1004$.

把 $x + y + z = 2010$ 满足 $x \le y \le z$ 的正整数解分为三类：

（1）x, y, z 均相等的正整数解的个数显然为 1；

（2） x,y,z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数，易知为 1003；

(3) 设 x,y,z 两两均不相等的正整数解为 k .

易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$,

所以 $6k=2009\times1004-3\times1003-1=2006\times1005-2009+3\times2-1=2006\times1005-2004$,

即 $k=1003\times335-334=335671$.

从而满足 $x\le y\le z$ 的正整数解的个数为 $1+1003+335671=336675$.

二、解答题（本大题共 3 个小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

9.（本题满分 16 分）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，当 $0\le x\le1$ 时，$|f'(x)|\le1$，试求 a 的最大值.

【解析】解法一： $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, 由 $\begin{cases}f'(0)=c,\\ f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}a+b+c,\\ f'(1)=3a+2b+c\end{cases}$ 得

$3a=2f'(0)+2f'(1)-4f'(\frac{1}{2})$.

所以 $3|a|=\left|2f'(0)+2f'(1)-4f'(\frac{1}{2})\right|\le2|f'(0)|+2|f'(1)|+4\left|f'(\frac{1}{2})\right|\le8$，

所以 $a\le\frac{8}{3}$. 又易知当 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.

解法二： $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. 设 $g(x)=f'(x)+1$，则当 $0\le x\le1$ 时，$0\le g(x)\le2$.

设 $z=2x-1$，则 $x=\frac{z+1}{2},-1\le z\le1$.

$h(z)=g(\frac{z+1}{2})=\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a+2b}{2}z+\frac{3a}{4}+b+c+1$.

容易知道当 $-1\le z\le1$ 时，$0\le h(z)\le2,0\le h(-z)\le2$. 从而当 $-1\le z\le1$ 时，$0\le\frac{h(z)+h(-z)}{2}\le2$ ，即 $0\le\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a}{4}+b+c+1\le2$,

从而 $\frac{3a}{4}+b+c+1\ge0$ ，$\frac{3a}{4}z^2\le2$ ，由 $0\le z^2\le1$ 知 $a\le\frac{8}{3}$.

又易知当 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.

10.（本题满分 20 分）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

【解析】解法一：设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2, y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}\ .$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{3}(x-2)$. （1）

易知 $x=5, y=0$ 是(1)的一个解，所以线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.

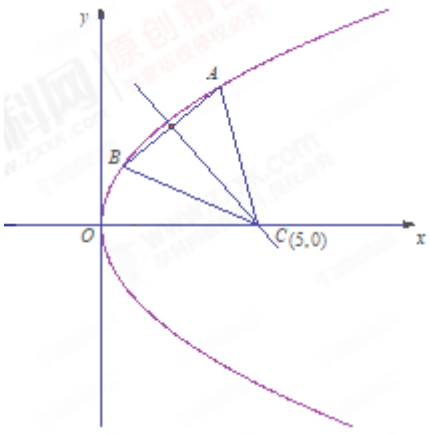
由（1）知直线 AB 的方程为 $y-y_0=\dfrac{3}{y_0}(x-2)$，即 $x=\dfrac{y_0}{3}(y-y_0)+2$. （2）

（2）代入 $y^2=6x$ 得 $y^2=2y_0(y-y_0)+12$，即 $y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0$.（3）

依题意，y_1,y_2 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\neq y_2$，所以

$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0$,

$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}$ $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



$$=\sqrt{(1+(\frac{y_0}{3})^2)(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})(4y_0^2-4(2y_0^2-12))}=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点 $C(5,0)$ 到线段 AB 的距离 $h=|CM|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3})^3}=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$

当且仅当 $9+y_0^2=24-2y_0^2$，即 $y_0=\pm\sqrt{5}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立. 所以，ΔABC 面积的最大值为 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.

解法二：同解法一，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.

设 $x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5&0&1\\t_1^2&\sqrt{6}t_1&1\\t_2^2&\sqrt{6}t_2&1\end{vmatrix}$ 的绝对值，

$$S_{\Delta ABC}^2=(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2))^2=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$

$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)\ \le\frac{3}{2}(\frac{14}{3})^3,$$

所以 $S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$，当且仅当 $(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$ 且 $t_1^2+t_2^2=4$，即 $t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，

$t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立. 所以，ΔABC 面积的最大值是 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.

11.（本题满分 20 分）证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

【解析】令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严格递增的．又 $f(0)=-2<0, f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in(0,\frac{1}{2})$．

所以 $2r^3+5r-2=0$，$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots$．

故数列 $a_n=3n-2(n=1,2,\cdots)$ 是满足题设要求的数列．

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5}$，

去掉上面等式两边相同的项，有 $r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots$，

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots, t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 s_i 与 t_j 都是不同的．

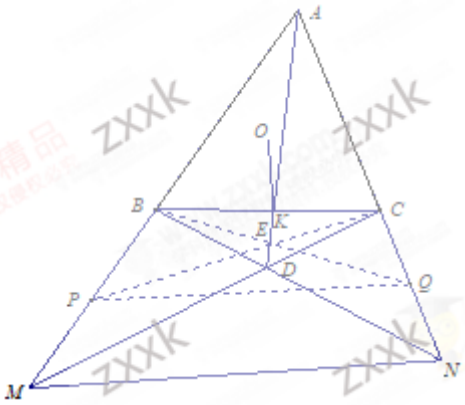
不妨设 $s_1<t_1$，则 $r^{s_1}<r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots$，

$1<r^{t_1-s_1}+r^{t_2-s_1}+\cdots\le r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}-1<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1$，

矛盾．故满足题设的数列是唯一的．

2010 年全国高中数学联赛二试试题参考答案

1．（本题满分 40 分）如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M．求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆．



【解析】用反证法．

若 A，B，D，C 不四点共圆，设三角形 ABC 的外接圆与 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接

CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ.

因为 $PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）

$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right)$，

同理 $QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right)$，

所以 $PO^2-PK^2=QO^2-QK^2$，

故 $OK\perp PQ$．　由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ/\!/MN$，于是 $\dfrac{AQ}{QN}=\dfrac{AP}{PM}$．　①

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$\dfrac{NB}{BD}\cdot\dfrac{DE}{EA}\cdot\dfrac{AQ}{QN}=1$，　②

$\dfrac{MC}{CD}\cdot\dfrac{DE}{EA}\cdot\dfrac{AP}{PM}=1$．③

由①，②，③可得 $\dfrac{NB}{BD}=\dfrac{MC}{CD}$，　所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$，故 $\triangle DMN\backsim\triangle DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC/\!/MN$，故 $OK\perp BC$，即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A,B,D,C 四点共圆.

注 1：“$PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）”的证明：延长 PK 至点 F，使得

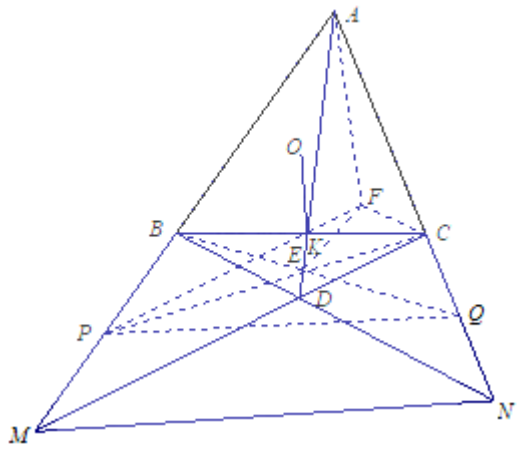
$PK\cdot KF=AK\cdot KE$，　④

则 P，E，F，A 四点共圆，故 $\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE$，

从而 E，C，F，K 四点共圆，于是 $PK\cdot PF=PE\cdot PC$，　⑤

⑤-④，得 $PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）.

注 2：若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.



2．（本题满分 40 分）设 k 是给定的正整数，$r=k+\frac{1}{2}$．记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)),\ l\geq 2$．证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数．这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$．

【解析】记 $v_2(n)$ 表示正整数 n 所含的 2 的幂次．则当 $m=v_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数．

下面我们对 $v_2(k)=v$ 用数学归纳法．

当 $v=0$ 时，k 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时 $f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$ 为整数．

假设命题对 $v-1(v\geq 1)$ 成立．

对于 $v\geq 1$，设 k 的二进制表示具有形式 $k=2^v+\alpha_{v+1}\cdot 2^{v+1}+\alpha_{v+2}\cdot 2^{v+2}+\cdots$，

这里，$\alpha_i=0$ 或者 1，$i=v+1,\ v+2,\cdots$．

于是 $f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+k^2+k$

$$=\frac{1}{2}+2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$$

$$=k'+\frac{1}{2},\qquad ①$$

这里 $k'=2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$．

显然 k' 中所含的 2 的幂次为 $v-1$．故由归纳假设知，$r'=k'+\frac{1}{2}$ 经过 f 的 v 次迭代得到整数，由①知，$f^{(v+1)}(r)$ 是一个整数，这就完成了归纳证明．

3.（本题满分 50 分）给定整数 $n>2$，设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1,k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},k=1,2,\cdots,n.$$

求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}$.

【解析】由 $0<a_k\le 1$ 知，对 $1\le k\le n-1$，有 $0<\sum_{i=1}^{k}a_i\le k,\quad 0<\sum_{i=k+1}^{n}a_i\le n-k$.

注意到当 $x,y>0$ 时，有 $|x-y|<\max\{x,y\}$，于是对 $1\le k\le n-1$，有

$$|A_n-A_k|=\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

$$<\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i,\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right\}\le\max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}=1-\frac{k}{n},$$

故 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}(A_n-A_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}$.

4.（本题满分 50 分）一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

【解析】对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上 a，如果颜色不同，则标上 b，如果数字和颜色都相同，则标上 c．于是对于给定的点 A_1 上的设置（共有 4 种），按照边上的字母可以依次确定点 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 上的设置．为了使得最终回到 A_1 时的设置与初始时相同，标有 a 和 b 的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记 a,b,c，使得标有 a 和 b 的边都是偶数条的方法数的 4 倍．

设标有 a 的边有 $2i$ 条，$0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$，标有 b 的边有 $2j$ 条，$0\le j\le\left[\frac{n-2i}{2}\right]$．选取 $2i$ 条边标记 a 的有 C_n^{2i} 种方法，在余下的边中取出 $2j$ 条边标记 b 的有 C_{n-2i}^{2j} 种方法，其余的边标记 c．由乘法原理，此时共有 $C_n^{2i}C_{n-2i}^{2j}$ 种标记方法．对 i,j 求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为 $4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right)$.

①

这里我们约定 $C_0^0=1$.

当 n 为奇数时，$n-2i>0$，此时 $\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}=2^{n-2i-1}$. ②

代入①式中，得 $4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right)=4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i}\right)$

$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}(-1)^k=(2+1)^n+(2-1)^n=3^n+1$.

当 n 为偶数时，若 $i<\frac{n}{2}$，则②式仍然成立；若 $i=\frac{n}{2}$，则正 n 边形的所有边都标记 a，此时只有一种标记方法．于是，当 n 为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right)=4\times\left(1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)\right)=2+4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=3^n+3.$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当 n 为奇数时有 3^n+1 种；当 n 为偶数时有 3^n+3 种．