2009 全国高中数学联赛一试试题参考答案

一、填空（本大题共 8 题，每小题 7 分，共 56 分）

1. 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 且 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f\left[f\left[f\cdots f(x)\right]\right]}_{n}$，则 $f^{(99)}(1)=$_____.

【答案】$\dfrac{1}{10}$

【解析】$f^{(1)}(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f^{(2)}(x)=f\left[f(x)\right]=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，……，$f^{(99)}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+99x^2}}$. 故 $f^{(99)}(1)=\dfrac{1}{10}$.

2. 已知直线 $L:x+y-9=0$ 和圆 $M:2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$，点 A 在直线 L 上，B，C 为圆 M 上两点，在 ΔABC 中，$\angle BAC=45°$，AB 过圆心 M，则点 A 横坐标范围为_____.

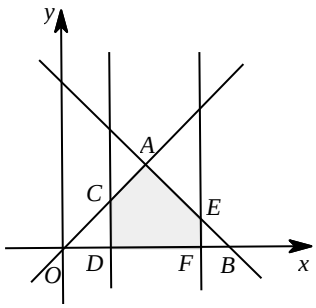
【答案】$[3,6]$

【解析】设 $A(a,9-a)$，则圆心 M 到直线 AC 的距离 $d=|AM|\sin 45°$，由直线 AC 与圆 M 相交，得 $d\leqslant\dfrac{\sqrt{34}}{2}$. 解得 $3\leqslant a\leqslant 6$.

3. 在坐标平面上有两个区域 M 和 N，M 为 $\begin{cases}y\geqslant 0\\ y\leqslant x\\ y\leqslant 2-x\end{cases}$，$N$ 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定，t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)=$_____.

【答案】$-t^2+t+\dfrac{1}{2}$

【解析】由题意知 $f(t)=S_{\text{阴影部分面积}}=S_{\Delta AOB}-S_{\Delta OCD}-S_{\Delta BEF}=1-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}(1-t)^2=-t^2+t+\dfrac{1}{2}$



4. 使不等式 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}<a-2007\dfrac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为_____.

【答案】2009

【解析】设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$. 显然 $f(n)$ 单调递减，则由 $f(n)$ 的最大值 $f(1)<a-2007\dfrac{1}{3}$，可得 $a=2009$.

5. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上任意两点 P，Q，若 $OP\perp OQ$，则乘积 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

【解析】设 $P(|OP|\cos\theta,|OP|\sin\theta)$，$Q\left(|OQ|\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right),|OQ|\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

由 P，Q 在椭圆上，有

$\frac{1}{|OP|^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$ ①　　$\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}$ ②

①+② 得 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

于是当 $|OP|=|OQ|=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ 时，$|OP||OQ|$ 达到最小值 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6．若方程 $\lg kx=2\lg(x+1)$ 仅有一个实根，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k<0$ 或 $k=4$

【解析】当且仅当

$kx>0$ ①

$x+1>0$ ②

$x^2+(2-k)x+1=0$ ③

对③由求根公式得 x_1，$x_2=\frac{1}{2}\left[k-2\pm\sqrt{k^2-4k}\right]$ ④

$\Delta=k^2-4k\geqslant 0\Rightarrow k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 4$.

（ⅰ）当 $k<0$ 时，由③得 $\begin{cases}x_1+x_2=k-2<0\\x_1x_2=1>0\end{cases}$，所以 x_1，x_2 同为负根.

又由④知 $\begin{cases}x_1+1>0\\x_2+1<0\end{cases}$，所以原方程有一个解 x_1.

（ⅱ）当 $k=4$ 时，原方程有一个解 $x=\frac{k}{2}-1=1$.

（ⅲ）当 $k>4$ 时，由③得 $\begin{cases}x_1+x_2=k-2>0\\x_1x_2=1>0\end{cases}$，

所以 x_1，x_2 同为正根，且 $x_1\neq x_2$，不合题意，舍去．综上可得 $k<0$ 或 $k=4$ 为所求.

7. 一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前100个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是_____（可以用指数表示）

【答案】 101×2^{98}

【解析】易知：

(ⅰ)该数表共有100行；

(ⅱ)每一行构成一个等差数列，且公差依次为$d_1=1$，$d_2=2$，$d_3=2^2$，…，$d_{99}=2^{98}$

(ⅲ)a_{100}为所求.

设第$n(n\geqslant 2)$行的第一个数为a_n，则

$$a_n=a_{n-1}+\left(a_{n-1}+2^{n-2}\right)=2a_{n-1}+2^{n-2}=2\left[2a_{n-2}+2^{n-3}\right]+2^{n-2}$$

$$=2^2\left[2a_{n-3}+2^{n-4}\right]+2\times 2^{n-2}+2^{n-2}=2^3a_{n-3}+3\times 2^{n-2}=\cdots\cdots=2^{n-1}a_1+(n-1)\times 2^{n-2}=(n+1)2^{n-2}$$

故$a_{100}=101\times 2^{98}$.

8. 某车站每天8∶00～9∶00，9∶00～10∶00都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	8∶10 9∶10	8∶30 9∶30	8∶50 9∶50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客8∶20到车站，则它候车时间的数学期望为_____（精确到分）.

【答案】27

【解析】旅客候车的分布列为

候车时间（分）	10	30	50	70	90
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$

候车时间的数学期望为

$$10\times\frac{1}{2}+30\times\frac{1}{3}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{1}{12}+90\times\frac{1}{18}=27$$

二、解答题（本大题共3个小题，共44分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9.（本小题满分14分）设直线$l:y=kx+m$（其中k，m为整数）与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$A$，$B$，与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$C$，$D$，问是否存在直线$l$，使得向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$，若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，请说明理由.

【解析】由$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$消去$y$化简整理得$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-48=0$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$

$$\Delta_1=(8km)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-48\right)>0 \qquad ①$$

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ 消去 y 化简整理得 $\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-12=0$

设 $C\left(x_3,\ y_4\right)$，$D\left(x_4,\ y_4\right)$，则 $x_3+x_4=\dfrac{2km}{3-k^2}$

$\Delta_2=\left(-2km\right)^2+4\left(3-k^2\right)\left(m^2+12\right)>0$ ②

因为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$，所以 $\left(x_4-x_2\right)+\left(x_3-x_1\right)=0$，此时 $\left(y_4-y_2\right)+\left(y_3-y_1\right)=0$．

由 $x_1+x_2=x_3+x_4$ 得 $-\dfrac{8km}{3+4k^2}=\dfrac{2km}{3-k^2}$．

所以 $2km=0$ 或 $-\dfrac{4}{3+4k^2}=\dfrac{1}{3-k^2}$．由上式解得 $k=0$ 或 $m=0$．当 $k=0$ 时，由①和②得 $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$．因 m 是整数，所以 m 的值为 -3，-2，-1，0，1，2，3．当 $m=0$，由①和②得 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$．因 k 是整数，所以 $k=-1$，0，1．于是满足条件的直线共有 9 条．

10.（本小题满分 15 分）已知 p，$q\left(q\neq 0\right)$ 是实数，方程 $x^2-px+q=0$ 有两个实根 α，β，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=p$，$a_2=p^2-q$，$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}\left(n=3,\ 4,\ \cdots\right)$

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（用 α，β 表示）；

（Ⅱ）若 $p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$，求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．

【解析】方法一：（Ⅰ）由韦达定理知 $\alpha\cdot\beta=q\neq 0$，又 $\alpha+\beta=p$，所以

$a_n-px_{n-1}-qx_{n-2}=\left(\alpha+\beta\right)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$，$\left(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\right)$

整理得 $a_n-\beta a_{n-1}=\alpha\left(a_{n-1}-\beta a_{n-2}\right)$

令 $b_n=a_{n+1}-\beta a_n$，则 $b_{n+1}=\alpha b_n\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$．所以 $\{b_n\}$ 是公比为 α 的等比数列．

数列 $\{b_n\}$ 的首项为：$b_1=a_2-\beta a_1=p^2-q-\beta p=\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha\beta-\beta\left(\alpha+\beta\right)=\alpha^2$．

所以 $b_n=\alpha^2\cdot\alpha^{n-1}=\alpha^{n+1}$，即 $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n+1}\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$．

所以 $a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$．

①当 $\Delta=p^2-4q=0$ 时，$\alpha=\beta\neq 0$，$a_1=p=\alpha+\alpha=2\alpha$，$a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$ 变为 $a_{n+1}=\alpha a_n+\alpha^{n+1}\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$．整理得，$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}=1$，$\left(n=1,\ 2,\ \cdots\right)$．所以，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ 成公差为 1 的等差数列，其首项为 $\dfrac{a_1}{\alpha}=\dfrac{2\alpha}{\alpha}=2$．所以 $\dfrac{a_n}{\alpha^n}=2+1\left(n-1\right)=n+1$．

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(n+1\right)\alpha^n$；

②当 $\Delta=p^2-4q>0$ 时，$\alpha\neq\beta$，

$a_{n+1}=\beta a_n+\alpha^{n+1}=\beta a_n+\dfrac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1}=\beta a_n+\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1}-\dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$.

整理得 $a_{n+1}+\dfrac{\alpha^{n+2}}{\beta-\alpha}=\beta\left(a_n+\dfrac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right)$，$(n=1,2,\cdots)$.

所以，数列 $\left\{a_n+\dfrac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right\}$ 成公比为 β 的等比数列，其首项为

$a_1+\dfrac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta+\dfrac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha}$．所以 $a_n+\dfrac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha}\beta^{n-1}$.

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$.

（Ⅱ）若 $p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$，则 $\Delta=p^2-4q=0$，此时 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$．由第（Ⅰ）步的结果得，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n+1}{2^n}$，所以，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$s_n=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}+\dfrac{n+1}{2^n}$

$\dfrac{1}{2}s_n=\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$

以上两式相减，整理得 $\dfrac{1}{2}s_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$

所以 $s_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$.

方法二：

（Ⅰ）由韦达定理知 $\alpha\cdot\beta=q\neq0$，又 $\alpha+\beta=p$，所以 $a_1=\alpha+\beta$，$a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$.

特征方程 $\lambda^2-p\lambda+q=0$ 的两个根为 α，β.

①当 $\alpha=\beta\neq0$ 时，通项 $a_n=(A_1+A_2n)\alpha^n\ (n=1,2,\cdots)$ 由 $a_1=2\alpha$，$a_2=3\alpha^2$ 得

$\begin{cases}(A_1+A_2)\alpha=2\alpha\\(A_1+2A_2)\alpha^2=3\alpha^2\end{cases}$，解得 $A_1=A_2=1$．故 $a_n=(1+n)\alpha^n$.

②当 $\alpha\neq\beta$ 时，通项 $a_n=A_1\alpha^n+A_2\beta^n\ (n=1,2,\cdots)$．由 $a_1=\alpha+\beta$，$a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 得

$\begin{cases}A_1\alpha+A_2\beta=\alpha+\beta\\A_1\alpha^2+A_2\beta^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\end{cases}$，解得 $A_1=\dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}$，$A_2=\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$．故

$a_n=\dfrac{-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}+\dfrac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$.

（Ⅱ）同方法一.

11.（本小题满分 15 分）求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 的最大和最小值.

【解析】函数的定义域为 $[0,13]$. 因为

$$y=\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}$$

当 $x=0$ 时等号成立. 故 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

又由柯西不等式得

$$y^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)(2x+(x+27)+3(13-x))=121$$

所以 $y\leqslant 11$.

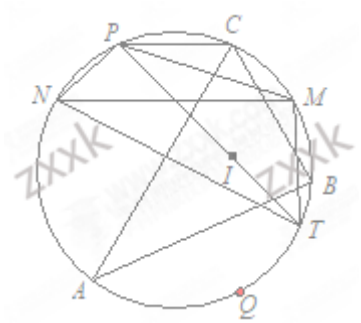
由柯西不等式等号成立的条件，得 $4x=9(13-x)=x+27$ ，解得 $x=9$. 故当 $x=9$ 时等号成立. 因此 y 的最大值为 11 .

2009 年全国高中数学联合竞赛二试试题参考答案

12、(本题满分 50 分)如图，M，N 分别为锐角三角形 ΔABC（$\angle A<\angle B$）的外接圆 Γ 上弧 $\overset{\frown}{BC}$ 、$\overset{\frown}{AC}$ 的中点. 过点 C 作 $PC\parallel MN$ 交圆 Γ 于 P 点， I 为 ΔABC 的内心，连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T .

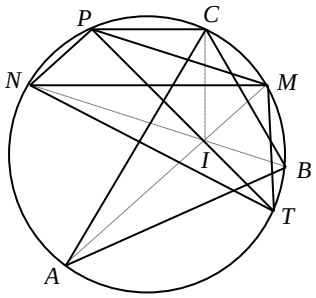
⑴求证： $MP\cdot MT=NP\cdot NT$ ；

⑵在弧 $\overset{\frown}{AB}$（不含点 C ）上任取一点 Q（$Q\neq A$， T， B），记 ΔAQC， $\triangle QCB$ 的内心分别为 I_1， I_2，



求证： Q， I_1， I_2， T 四点共圆.

【解析】⑴连 NI， MI . 由于 $PC\parallel MN$， P， C， M， N 共圆，故 $PCMN$ 是等腰梯形. 因此 $NP=MC$，$PM=NC$.



连 AM，CI，则 AM 与 CI 交于 I，因为

$\angle MIC=\angle MAC+\angle ACI=\angle MCB+\angle BCI=\angle MCI$，所以 $MC=MI$．同理 $NC=NI$．

于是 $NP=MI$，$PM=NI$．

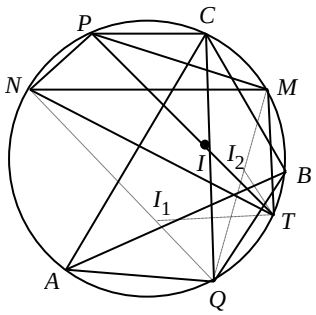
故四边形 $MPNI$ 为平行四边形．因此 $S_{\triangle PMT}=S_{\triangle PNT}$（同底，等高）．

又 P，N，T，M 四点共圆，故 $\angle TNP+\angle PMT=180^\circ$，由三角形面积公式

$$S_{\triangle PMT}=\frac{1}{2}PM\cdot MT\sin\angle PMT=S_{\triangle PNT}=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PNT=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PMT$$

于是 $PM\cdot MT=PN\cdot NT$．

(2)因为 $\angle NCI_1=\angle NCA+\angle ACI_1=\angle NQC+\angle QCI_1=\angle CI_1N$，



所以 $NC=NI_1$，同理 $MC=MI_2$．由 $MP\cdot MT=NP\cdot NT$ 得 $\frac{NT}{MP}=\frac{MT}{NP}$．

由(1)所证 $MP=NC$，$NP=MC$，故 $\frac{NT}{NI_1}=\frac{MT}{MI_2}$．

又因 $\angle I_1NT=\angle QNT=\angle QMT=\angle I_2MT$，有 $\Delta I_1NT\backsim\Delta I_2MT$．

故 $\angle NTI_1=\angle MTI_2$，从而 $\angle I_1QI_2=\angle NQM=\angle NTM=\angle I_1TI_2$．

因此 Q，I_1，I_2，T 四点共圆．

13、（本题满分 50 分）求证不等式：$-1<\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\right)-\ln n\leqslant\frac{1}{2}$，$n=1$，2，…

【解析】证明：首先证明一个不等式：

(1) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，$x>0$．

事实上，令 $h(x)=x-\ln(1+x)$，$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$．

则对 $x>0$，$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$．

于是 $h(x)>h(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$．在(1)中取 $x=\frac{1}{n}$ 得

(2)

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$，则 $x_1=\frac{1}{2}$，

$$x_n-x_{n-1}=\frac{n}{n^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)<\frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{(n^2+1)n}<0$$

因此 $x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$.

又因为

$$\ln n=(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n-1)-\ln(n-2))+\cdots+(\ln 2-\ln 1)+\ln 1=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$ 从而

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)+\frac{n}{n^2+1}>\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k^2+1)k}\geqslant-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)k}=-1+\frac{1}{n}>-1.$$

14、（本题满分 50 分）设 k，l 是给定的两个正整数．证明：有无穷多个正整数 $m\geqslant k$，使得 C_m^k 与 l 互素．

【解析】证法一：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)$．我们证明 $\left(\mathrm{C}_m^k,\ l\right)=1$．

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明：$p\nmid \mathrm{C}_m^k$．

若 $p\nmid k!$，则由 $k!\mathrm{C}_m^k=\prod_{i=1}^{k}(m-k+i)\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!\left(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1}\right)$．

及 $p^{\alpha}\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^{\alpha}\mid k!\mathrm{C}_m^k$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid k!\mathrm{C}_m^k$．从而 $p\nmid \mathrm{C}_m^k$．

证法二：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)^2$，我们证明 $\left(\mathrm{C}_m^k,\ l\right)=1$．

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明：$p\nmid \mathrm{C}_m^k$．若 $p\nmid k!$，则由

$$k!\mathrm{C}_m^k=\prod_{i=1}^{k}(m-k+i)\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!\left(\mathrm{mod}\ p\right).$$

即 p 不整除上式，故 $p\nmid \mathrm{C}_m^k$．

若 $p\mid k!$，设 $\alpha\geqslant 1$ 使 $p^{\alpha}\mid k!$，但 $p^{\alpha+1}\nmid k!$．$p^{\alpha+1}\mid(k!)^2$．故由

$$k!\mathrm{C}_m^k=\prod_{i=1}^{k-1}(m-k+i)\equiv\prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!\left(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1}\right)$$，及 $p^{\alpha}\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^{\alpha}\mid k!\mathrm{C}_m^k$

且 $p^{\alpha+1}\nmid k!\mathrm{C}_m^k$．从而 $p\nmid \mathrm{C}_m^k$．

15、（本题满分 50 分）在非负数构成的 3×9 数表

$$P=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}&x_{18}&x_{19}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}&x_{28}&x_{29}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}&x_{38}&x_{39}\end{pmatrix}$$

中每行的数互不相同，前 6 列中每列的三数之和为 1，$x_{17}=x_{28}=x_{39}=0$，x_{27}，x_{37}，x_{18}，x_{38}，x_{19}，x_{29} 均大于．如果 P 的前三列构成的数表

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

满足下面的性质 (O)：对于数表 P 中的任意一列 $\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$（$k=1$，2，…，9）均存在某个 $i\in\{1,2,3\}$ 使得

⑶ $x_{ik}\leqslant u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$．

求证：

（ⅰ）最小值 $u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$，$i=1$，2，3 一定自数表 S 的不同列．

（ⅱ）存在数表 P 中唯一的一列 $\begin{pmatrix} x_{1k^*} \\ x_{2k^*} \\ x_{3k^*} \end{pmatrix}$，$k^*\neq 1$，2，3 使得 3×3 数表

$$S'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

仍然具有性质 (O)．

【解析】（ⅰ）假设最小值 $u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$，$i=1$，2，3 不是取自数表 S 的不同列．则存在一列不含任何 u_i．不妨设 $u_i\neq x_{i2}$，$i=1$，2，3．由于数表 P 中同一行中的任何两个元素都不等，于是 $u_i<x_{i2}$，$i=1$，2，3．另一方面，由于数表 S 具有性质 (O)，在⑶中取 $k=2$，则存在某个 $i_0\in\{1,2,3\}$ 使得 $x_{i_0 2}\leqslant u_{i_0}$．矛盾．

（ⅱ）由抽屉原理知，$\min\{x_{11},x_{12}\}$，$\min\{x_{21},x_{22}\}$，$\min\{x_{31},x_{32}\}$ 中至少有两个值取在同一列．不妨设 $\min\{x_{21},x_{22}\}=x_{22}$，$\min\{x_{31},x_{32}\}=x_{32}$．由前面的结论知数表 S 的第一列一定含有某个 u_i，所以只能是 $x_{11}=u_1$．同样，第二列中也必含某个 u_i，$i=1$，2．不妨设 $x_{22}=u_2$．于是 $u_3=x_{33}$，即 u_i 是数表 S 中的对角线上数字．

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

记 $M=\{1,2,\cdots,9\}$，令集合

$I=\{k\in M\mid x_{ik}>\min\{x_{i1},x_{i2}\},i=1,3\}$．

显然 $I=\{k\in M\mid x_{1k}>x_{11},x_{3k}>x_{32}\}$ 且 1，$23\notin I$．因为 x_{18}，$x_{38}>1\geqslant x_{11}$，x_{32}，所以 $8\in I$．

故 $I\neq\varnothing$．于是存在 $k^*\in I$ 使得 $x_{2k^*}=\max\{x_{2k}\mid k\in I\}$．显然，$k^*\neq 1$，2，3．

下面证明 3×3 数表

$$S'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O)．

从上面的选法可知 $u_i':=\min\{x_{i1}，x_{i2}，x_{ik^*}\}=\min\{x_{i1}，x_{i2}\}$，$(i=1，3)$．这说明

$$x_{1k^*}>\min\{x_{11}，x_{12}\}\geqslant u_1，\quad x_{3k^*}>\min\{x_{31}，x_{32}\}\geqslant u_3．$$

又由 S 满足性质 (O)．在(3)中取 $k=k^*$，推得 $x_{2k^*}\leqslant u_2$，于是 $u_2'=\min\{x_{21}，x_{22}，x_{2k^*}\}=x_{2k^*}$．下证对任意的 $k\in M$，存在某个 $i=1，2，3$ 使得 $u_i'\geqslant x_{ik}$．假若不然，则 $x_{ik}>\min\{x_{i1}，x_{i2}\}$，$i=1，$ 3 且 $x_{2k}>x_{2k^*}$．这与 x_{2k^*} 的最大性矛盾．因此，数表 S' 满足性质 (O)．

下证唯一性．设有 $k\in M$ 使得数表

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O)，不失一般性，我们假定

$$\begin{aligned} &u_1=\min\{x_{11}，x_{12}，x_{13}\}=x_{11} \\ (4)\quad &u_2=\min\{x_{21}，x_{22}，x_{23}\}=x_{22} \\ &u_3=\min\{x_{31}，x_{32}，x_{33}\}=x_{33} \\ &x_{32}<x_{31}． \end{aligned}$$

由于 $x_{32}<x_{31}$，$x_{22}<x_{21}$ 及（ⅰ），有 $u_1=\min\{x_{11}，x_{12}，x_{1k}\}=x_{11}$．又由（ⅰ）知：或者 (a) $u_3=\min\{x_{31}，x_{32}，x_{3k}\}=x_{3k}$，或者 $(b)u_2=\min\{x_{21}，x_{22}，x_{2k}\}=x_{2k}$．

如果 (a) 成立，由数表 S 具有性质 (O)，则

$$\begin{aligned} &u_1=\min\{x_{11}，x_{12}，x_{1k}\}=x_{11}， \\ (5)\quad &u_2=\min\{x_{21}，x_{22}，x_{2k}\}=x_{22}， \\ &u_3=\min\{x_{31}，x_{32}，x_{3k}\}=x_{3k}． \end{aligned}$$

由数表 S 满足性质 (O)，则对于 $3\in M$ 至少存在一个 $i\in\{1，2，3\}$ 使得 $u_i\geqslant x_{ik^*}$．由 $k^*\in I$ 及(4)和(6)式知，$x_{1k^*}>x_{11}=u_1$，$x_{3k^*}>x_{32}=u_3$．于是只能有 $x_{2k^*}\leqslant u_2=x_{2k}$．类似地，由 S' 满足性质 (O) 及 $k\in M$ 可推得 $x_{2k}\leqslant u_2'=x_{2k^*}$．从而 $k^*=k$．