2003 年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

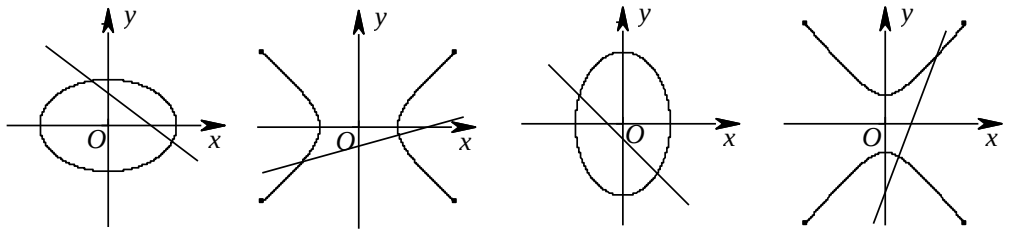
(10 月 12 日上午 8:00-9:40)

一、选择题(每小题 6 分，共 36 分)

1．(2003 年全国高中数学联赛)删去正整数数列 1，2，3，……中的所有完全平方数，得到一个新数列．这个数列的第 2003 项是

(A) 2046　　(B) 2047　　(C) 2048　　(D) 2049

2．设 a，$b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，那么直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是



A.　　B.　　C.　　D.

3．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线，若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，则线段 PF 的长等于

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

4．若 $x\in[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}]$，则 $y=\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值是

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

5．已知 x，y 都在区间 $(-2,2)$ 内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

6．在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二．填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7．不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是_____．

8．设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则△PF_1F_2 的面积等于_____．

9．已知 $A=\{x|x^2-4x+3<0,\ x\in R\}$，

$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant0,\ x^2-2(a+7)x+5\leqslant0,\ x\in\mathbf{R}\}$

若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是_____．

10. 已知 a, b, c, d 均为正整数，且 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$，若 $a-c=9$，则 $b-d=$_____.

11. 将八个半径都为 1 的球分放两层放置在一个圆柱内，并使得每个球都和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于_____.

12. 设 M_n={(十进制) n 位纯小数 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ | a_i 只取 0 或 1 (i=1, 2, …, $n-1$), a_n=1}，T_n 是 M_n 中元素的个数，S_n 是 M_n 中所有元素的和，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=$_____.

三、(本题满分 20 分)

13. 设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$，证明不等式

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

四、(本题满分 20 分)

14. 设 A、B、C 分别是复数 $Z_0=ai$，$Z_1=\frac{1}{2}+bi$，$Z_2=1+ci$ (其中 a、b、c 都是实数)对应的不共线的三点. 证明：曲线

$$Z=Z_0\cos^4 t+2Z_1\cos^2 t\sin^2 t+Z_2\sin^4 t \qquad (t\in R)$$

与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点.

五、(本题满分 20 分)

15. 一张纸上画有一个半径为 R 的圆 O 和圆内一个定点 A，且 $OA=a$，折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与点 A 重合. 这样的每一种折法，都留下一条折痕. 当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

加试题

(10月12日上午10:00–12:00)

一、(本题50分)

过圆外一点P作圆的两条切线和一条割线，切点为A、B，所作割线交圆于C、D两点，C在P、D之间．在弦CD上取一点Q，使$\angle DAQ=\angle PBC$.

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.

二、(本题50分)

设三角形的三边长分别是正整数l，m，n．且$l>m>n>0$.

已知$\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$，其中$\{x\}=x-[x]$，而$[x]$表示不超过$x$的最大整数．求这种三角形周长的最小值.

三、(本题50分)

由n个点和这些点之间的l条连线段组成一个空间图形，其中$n=q^2+q+1$，$l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant 2$，$q\in N$. 已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有$q+2$条连线段．证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点A、B、C、D和四条连线段AB、BC、CD、DA组成的图形)．

2003年全国高中数学联赛解答

第一试

一、选择题(每小题6分，共36分)

1．删去正整数数列1，2，3，……中的所有完全平方数，得到一个新数列．这个数列的第2003项是

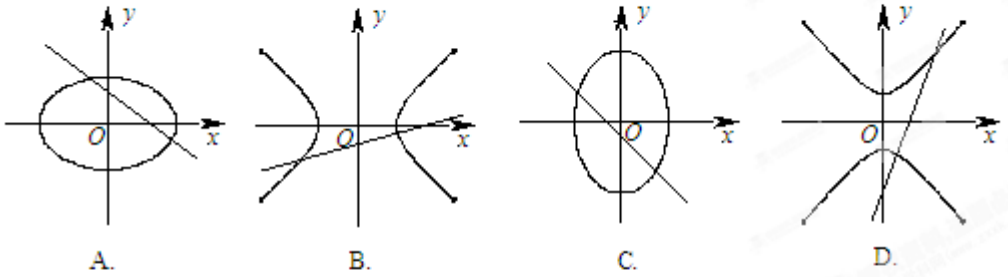
(A) 2046　　(B) 2047　　(C) 2048　　(D) 2049

【答案】C

【解析】$45^2=2025$，$46^2=2116$．

在1至2025之间有完全平方数45个，而2026至2115之间没有完全平方数．故1至2025中共有新数列中的2025－45=1980项．还缺2003－1980=23项．由2025+23=2048．知选*C*.

2．设 a、$b\in R$，$ab\neq 0$，那么直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】B

【解析】曲线方程为 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$，直线方程为 $y=ax+b$.

由直线图形，可知*A*、*C*中的 $a<0$，*A*图的 $b>0$，*C*图的 $b<0$，与*A*、*C*中曲线为椭圆矛盾.

由直线图形，可知*B*、*D*中的 $a>0$，$b<0$，则曲线为焦点在 x 轴上的双曲线，故选*B*.

3．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为60°的直线，若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，则线段 PF 的长等于

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】抛物线的焦点为原点(0，0)，弦 AB 所在直线方程为 $y=\sqrt{3}x$，弦的中点在 $y=\frac{p}{k}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ 上，即 AB 中点为 $(\frac{4}{3},\frac{4}{\sqrt{3}})$，中垂线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{4}{3})+\frac{4}{\sqrt{3}}$，令 $y=0$，得点 P 的坐标为 $\frac{16}{3}$.

∴ $PF=\frac{16}{3}$．选*A*.

4. 若 $x\in[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}]$，则 $y=\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值是

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】令 $x+\frac{\pi}{6}=u$，则 $x+\frac{2\pi}{3}=u+\frac{\pi}{2}$，当 $x\in[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}]$ 时，$u\in[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}]$，

$y=-(\cot u+\tan u)+\cos u=-\frac{2}{\sin 2u}+\cos u$. 在 $u\in[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}]$ 时，$\sin 2u$ 与 $\cos u$ 都单调递增，从而 y 单调递增. 于是 $u=-\frac{\pi}{6}$ 时，y 取得最大值 $\frac{11}{6}\sqrt{3}$，故选 C.

5. 已知 x，y 都在区间 $(-2,2)$ 内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

【答案】D

【解析】由 x，$y\in(-2,2)$，$xy=-1$ 知，$x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},2)$，

$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=\frac{-9x^4+72x^2-4}{-9x^4+37x^2-4}=1+\frac{35}{37-(9x^2+\frac{4}{x^2})}$.

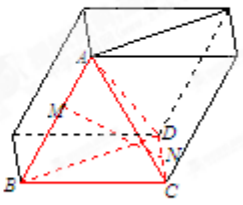
当 $x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},2)$ 时，$x^2\in(\frac{1}{4},4)$，此时，$9x^2+\frac{4}{x^2}\geqslant 12$.（当且仅当 $x^2=\frac{2}{3}$ 时等号成立）.

此时函数的最小值为 $\frac{12}{5}$，故选 D.

6. 在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B



【解析】如图，把四面体补成平行六面体，则此平行六面体的体积 $=1\times\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}\times 2=3$. 而四面体 $ABCD$ 的体积 $=\frac{1}{6}\times$ 平行六面体体积 $=\frac{1}{2}$. 故选 B.

二. 填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7. 不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是_____.

【答案】$(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(\frac{\sqrt{5}-1}{2},3)$.

【解析】即$|x|^3-2|x|^2-4|x|+3<0$，$\Rightarrow(|x|-3)(|x|-\frac{\sqrt{5}-1}{2})(|x|+\frac{\sqrt{5}+1}{2})<0$．$\Rightarrow|x|<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，或$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<|x|<3$．

∴ 解为$(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(\frac{\sqrt{5}-1}{2},3)$．

8．设F_1、F_2是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，$P$是椭圆上一点，且$|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则$\triangle PF_1F_2$的面积等于_____．

【答案】4

【解析】$F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$；$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$．

$|PF_1|+|PF_2|=6$，$\Rightarrow|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$．由于$4^2+2^2=(2\sqrt{5})^2$．故$\triangle PF_1F_2$是直角三角形$\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$．

∴ $S=4$．

9．已知$A=\{x|x^2-4x+3<0,\ x\in R\}$，

$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant 0,\ x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,\ x\in R\}$

若$A\subseteq B$，则实数a的取值范围是_____．

【答案】$-4\leqslant a\leqslant -1$．

【解析】$A=(1,3)$；

又，$a\leqslant -2^{1-x}\in(-1,-\frac{1}{4})$，当$x\in(1,3)$时，$a\geqslant\frac{x^2+5}{2x}-7\in(\sqrt{5}-7,-4)$．

∴ $-4\leqslant a\leqslant -1$．

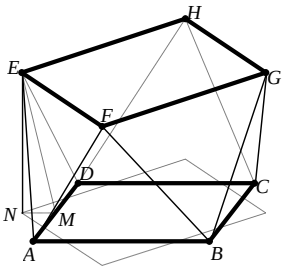
10．已知a,b,c,d均为正整数，且$\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$，若$a-c=9$，则$b-d=$_____．

【答案】93

【解析】$a^3=b^2$，$c^5=d^4$，设$a=x^2$，$b=x^3$；$c=y^4$，$d=y^5$，$x^2-y^4=9$．$(x+y^2)(x-y^2)=9$．

∴ $x+y^2=9$，$x-y^2=1$，$x=5$，$y^2=4$．$b-d=5^3-2^5=125-32=93$．

11．将八个半径都为1的球分放两层放置在一个圆柱内，并使得每个球都和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于_____．



【答案】$2+\sqrt[4]{8}$

【解析】如图，$ABCD$是下层四个球的球心，$EFGH$是上层的四个球心．每个球心与其相切的球的球心距离=2．$EFGH$在平面$ABCD$上的射影是一个正方形．是把正方形$ABCD$绕其中心旋转45°而得．设E的射影为N，则

$MN=\sqrt{2}-1$．$EM=\sqrt{3}$，故$EN^2=3-(\sqrt{2}-1)^2=2\sqrt{2}$．∴ $EN=\sqrt[4]{8}$．所求圆柱的高$=2+\sqrt[4]{8}$．

12. 设 M_n={(十进制)n位纯小数 0. $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ |a_i只取 0 或 1(i=1, 2, …, n−1), a_n=1}, T_n是 M_n中元素的个数, S_n是 M_n中所有元素的和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$=_____.

【答案】$\frac{1}{18}$

【解析】由于 a_1, a_2, …, a_{n-1}中的每一个都可以取 0 与 1 两个数, $T_n=2^{n-1}$.

在每一位(从第一位到第 n−1 位)小数上, 数字 0 与 1 各出现 2^{n-2}次. 第 n 位则 1 出现 2^{n-1}次.

∴ $S_n=2^{n-2}\times 0.11\cdots 1+2^{n-2}\times 10^{-n}$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$.

三、(本题满分 20 分)

13. 设$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$, 证明不等式

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

【解析】$x+1\geqslant 0$, $2x-3\geqslant 0$, $15-3x\geqslant 0$. $\Rightarrow\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$.

由平均不等式$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}}{4}\leqslant\sqrt{\frac{x+1+x+1+2x-3+15-3x}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{14+x}{4}}$.

∴ $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant 2\sqrt{14+x}$.

但 $2\sqrt{14+x}$在$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$ 时单调增. 即 $2\sqrt{14+x}\leqslant 2\sqrt{14+5}=2\sqrt{19}$.

故证.

四、(本题满分 20 分)

14. 设 A、B、C分别是复数 $Z_0=ai$, $Z_1=\frac{1}{2}+bi$, $Z_2=1+ci$(其中 a, b, c 都是实数)对应的不共线的三点. 证明: 曲线

$$Z=Z_0\cos^4 t+2Z_1\cos^2 t\sin^2 t+Z_2\sin^4 t \qquad (t\in R)$$

与△ABC中平行于 AC的中位线只有一个公共点, 并求出此点.

【解析】曲线方程为: $Z=ai\cos^4 t+(1+2bi)\cos^2 t\sin^2 t+(1+ci)\sin^4 t=(\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t)+i(a\cos^4 t+2b\cos^2 t\sin^2 t+c\sin^4 t)$

∴ $x=\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t=\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=\sin^2 t$. $(0\leqslant x\leqslant 1)$

$y=a\cos^4 t+2b\cos^2 t\sin^2 t+c\sin^4 t=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2$

即 $y=(a-2b+c)x^2+2(b-a)x+a$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. ①

若 $a-2b+c=0$, 则 Z_0、Z_1、Z_2三点共线, 与已知矛盾, 故 $a-2b+c\neq 0$. 于是此曲线为轴与 x 轴垂直的抛物线.

AB中点 M: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(a+b)i$, BC中点 N: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(b+c)i$.

与 AC 平行的中位线经过 $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(a+b))$ 及 $N(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}(b+c))$ 两点，其方程为

$$4(a-c)x+4y-3a-2b+c=0. \quad (\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}). \qquad ②$$

令 $4(a-2b+c)x^2+8(b-a)x+4a=4(c-a)x+3a+2b-c.$

即 $4(a-2b+c)x^2+4(2b-a-c)x+a-2b+c=0$. 由 $a-2b+c\neq 0$，得

$$4x^2+4x+1=0,$$

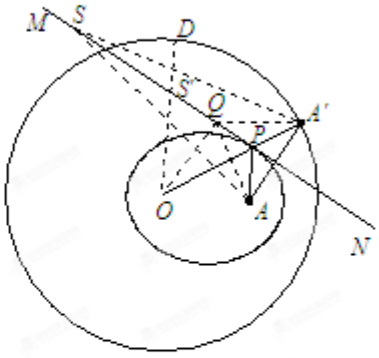
此方程在 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 内有惟一解： $x=\frac{1}{2}$.

以 $x=\frac{1}{2}$ 代入②得， $y=\frac{1}{4}(a+2b+c)$.

∴ 所求公共点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(a+2b+c))$.

五、（本题满分 20 分）

15. 一张纸上画有一个半径为 R 的圆 O 和圆内一个定点 A，且 $OA=a$，折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与点 A 重合. 这样的每一种折法，都留下一条折痕. 当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.



【解析】对于⊙O 上任意一点 A'，连 AA'，作 AA' 的垂直平分线 l 交 OA' 于点 P. 显然 $OP+PA=OA'=R$. 由于点 A 在⊙O 内，故 $OA=a<R$. 从而当点 A' 取遍圆周上所有点时，点 P 的轨迹是以 O、A 为焦点，$OA=a$ 为焦距，$R(R>a)$ 为长轴的椭圆 C.

而 l 上任一异于 P 的点 Q，都有 $OQ+QA=OQ+QA'>OA'$. 故点 Q 在椭圆 C 外. 即折痕上所有的点都在椭圆 C 上及 C 外.

反之，对于椭圆 C 上或外的一点 S，以 S 为圆心，SA 为半径作圆，交⊙O 于 A'，则 S 在 AA' 的垂直平分线上，从而 S 在某条折痕上.

最后证明所作⊙S 与⊙O 必相交.

1° 当 S 在⊙O 外时，由于 A 在⊙O 内，故⊙S 与⊙O 必相交；

2° 当 S 在⊙O 内时（例如在⊙O 内，但在椭圆 C 外或其上的点 S'），取过 S' 的半径 OD，则由点 S' 在椭圆 C 外，故 $OS'+S'A\geqslant R$（椭圆的长轴）. 即 $S'A\geqslant S'D$. 于是 D 在⊙S' 内或上，即⊙S' 与⊙O 必有交点.

于是上述证明成立.

综上可知，折痕上的点的集合为椭圆 C 上及 C 外的所有点的集合.

加试题

(10月12日上午10:00–12:00)

一、(本题50分)

过圆外一点P作圆的两条切线和一条割线，切点为A、B，所作割线交圆于C、D两点，C在P、D之间．在弦CD上取一点Q，使$\angle DAQ=\angle PBC$.

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.

分析：由$\angle PBC=\angle CDB$，若$\angle DBQ=\angle PAC=\angle ADQ$，则$\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$.反之，若$\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$.则本题成立．而要证$\Delta BDQ\backsim\Delta DAQ$，只要证$\frac{BD}{AD}=\frac{DQ}{AQ}$即可．

【解析】证明：连AB.

$\because\ \Delta PBC\backsim\Delta PDB$,

$\therefore\ \frac{BD}{BC}=\frac{PD}{PB}$，同理，$\frac{AD}{AC}=\frac{PD}{PA}$.

$\because\ PA=PB,\ \therefore\ \frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$.

$\because\ \angle BAC=\angle PBC=\angle DAQ,\ \angle ABC=\angle ADQ$.

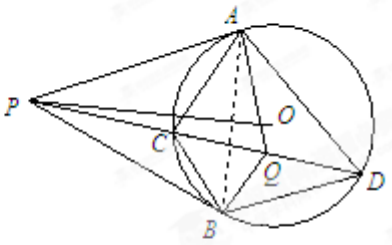
$\therefore\ \Delta ABC\backsim\Delta ADQ$.

$\therefore\ \frac{BC}{AC}=\frac{DQ}{AQ},\ \therefore\ \frac{BD}{AD}=\frac{DQ}{AQ}$.

$\because\ \angle DAQ=\angle PBC=\angle BDQ$.

$\therefore\ \Delta ADQ\backsim\Delta DBQ$.

$\therefore\ \angle DBQ=\angle ADQ=\angle PAC$.证毕.



二、(本题50分)

设三角形的三边长分别是正整数l，m，n．且$l>m>n\geqslant 0$.

已知$\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$，其中$\{x\}=x-[x]$，而$[x]$表示不超过$x$的最大整数．求这种三角形周长的最小值.

【解析】当3^l、3^m、3^n的末四位数字相同时，$\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$.

即求满足$3^l\equiv 3^m\equiv 3^n(\mod 10^4)$的$l$、$m$、$n$．$\therefore\ 3^n(3^{l-n}-1)\equiv 0\ (\mod 10^4)$．$(l-n>0)$

但$(3^n,\ 10^4)=1$，故必有$3^{l-n}\equiv 1(\mod 10^4)$；同理$3^{m-n}\equiv 1(\mod 10^4)$.

下面先求满足$3^x\equiv 1(\mod 10^4)$的最小正整数x.

$\because\ \varphi(10^4)=10^4\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=4000$．故$x\mid 4000$．用4000的约数试验：

$\because\ x=1$，2，时$3^x\not\equiv 1(\mod 10)$，而$3^4\equiv 1(\mod 10)$，$\therefore\ x$必须是4的倍数；

$\because\ x=4$，8，12，16时$3^x\not\equiv 1(\mod 10^2)$，而$3^{20}\equiv 1(\mod 10^2)$，$\therefore\ x$必须是20的倍数；

$\because\ x=20$，40，60，80时$3^x\not\equiv 1(\mod 10^3)$，而$3^{100}\equiv 1(\mod 10^3)$，$\therefore\ x$必须是100的倍数；

$\because\ x=100$，200，300，400时$3^x\not\equiv 1(\mod 10^4)$，而$3^{500}\equiv 1(\mod 10^4)$.

即，使$3^x\equiv 1(\mod 10^4)$成立的最小正整数$x=500$，从而$l-n$、$m-n$都是500的倍数，

设$l-n=500k$，$m-n=500h$，$(k,\ h\in\mathbb{N}^*,\ k>h)$.

由$m+n>l$，即$n+500h+n>n+500k$，$\Rightarrow n>500(k-h)\geqslant 500$，故$n\geqslant 501$.

取 $n=501$，$m=1001$，$l=1501$，即为满足题意的最小三个值.

∴ 所求周长的最小值=3003.

三、（本题 50 分）

由 n 个点和这些点之间的 l 条连线段组成一个空间图形，其中 $n=q^2+q+1$，$l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant 2$，$q\in N$. 已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有 $q+2$ 条连线段. 证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点 A、B、C、D 和四条连线段 AB、BC、CD、DA 组成的图形).

【解析】证明：设点集为 $V=\{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\}$，与 A_i 连线的点集为 B_i，且 $|B_i|=b_i$. 于是 $1\leqslant b_i\leqslant n-1$. 又显然有 $\sum_{i=0}^{n-1} b_i=2l\geqslant q(q+1)^2+2$.

若存在一点与其余点都连线，不妨设 $b_0=n-1$.

则 B_0 中 $n-1$ 个点的连线数 $l-b_0\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1-(n-1)$ (注意：$q(q+1)=q^2+q=n-1$)

$=\frac{1}{2}(q+1)(n-1)-(n-1)+1=\frac{1}{2}(q-1)(n-1)+1\geqslant\frac{1}{2}(n-1)+1\geqslant[\frac{1}{2}(n-1)]+1$. (由 $q\geqslant 2$)

但若在这 $n-1$ 个点内，没有任一点同时与其余两点连线，则这 $n-1$ 个点内至多连线 $[\frac{n-1}{2}]$ 条，故在 B_0 中存在一点 A_i，它与两点 A_j、A_k (i、j、k 互不相等，且 $1\leqslant i$，j，$k)$ 连了线，于是 A_0、A_i、A_j、A_k 连成四边形.

现设任一点连的线数 $\leqslant n-2$. 且设 $b_0=q+2\leqslant n-2$. 且设图中没有四边形. 于是当 $i\neq j$ 时，B_i 与 B_j 没有公共的点对，即 $|B_i\cap B_j|\leqslant 1$ ($0\leqslant i$，$j\leqslant n-1$). 记 $\overline{B_0}=V\backslash B_0$，则由 $|B_i\cap B_0|\leqslant 1$，得 $|B_i\cap\overline{B_0}|\geqslant b_i-1$ ($i=1$，2，…，$n-1$)，且当 $1\leqslant i$，$j\leqslant n-1$ 且 $i\neq j$ 时，$B_i\cap\overline{B_0}$ 与 $B_j\cap\overline{B_0}$ 无公共点对. 从而

$\overline{B_0}$ 中点对个数 $\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}$ ($B_i\cap\overline{B_0}$ 中点对个数). 即

$$C_{n-b_0}^2\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_{|B_i\cap\overline{B_0}|}^2\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_{b_i-1}^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b_i^2-3b_i+2)\geqslant\frac{1}{2}[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1}b_i)^2-3\sum_{i=1}^{n-1}b_i+2(n-1)]\text{(由平均不等式)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{n-1}(2l-b_0)^2-3(2l-b_0)+2(n-1)]=\frac{1}{2(n-1)}[(2l-b_0)^2-3(n-1)(2l-b_0)+2(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}(2l-b_0-n+1)(2l-b_0-2n+2)(2l\geqslant q(q+1)^2+2=(n-1)(q+1)+2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2(n-1)}[(n-1)(q+1)+2-b_0-n+1][(n-1)(q+1)+2-b_0-2n+2]$$

$=\frac{1}{2(n-1)}[(n-1)q+2-b_0][(n-1)(q-1)+2-b_0]$．（两边同乘以 $2(n-1)$ 即

$(n-1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$．（$n-1\geqslant q(q+1)$ 代入）

得　$q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$．（各取一部分因数比较）　①

但 $(nq-q-n+3-b_0)-q(n-b_0-1)=(q-1)b_0-n+3(b_0\geqslant q+2)\geqslant(q-1)(q+2)-n+3=q^2+q+1-n=0$．②

$(nq-q+2-b_0)-(q+1)(n-b_0)=qb_0-q-n+2\geqslant q(q+1)-n+2=1>0$．　③

又 $(nq-q-n+3-b_0)$、$(nq-q+2-b_0)$、$q(n-b_0-1)$、$(q+1)(n-b_0)$ 均为正整数，

从而由②、③得，　$q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)<(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)$．　④

由①、④矛盾，知原命题成立．

又证：画一个 $n\times n$ 表格，记题中 n 个点为 A_1，A_2，…，A_n，若 A_i 与 A_j 连了线，则将表格中第 i 行 j 列的方格中心涂红．于是表中共有 $2l$ 个红点，当 $d(A_i)=m$ 时，则表格中的 i 行及 i 列各有 m 个红点．且表格的主对角线上的方格中心都没有涂红．

由已知，表格中必有一行有 $q+2$ 个红点．不妨设最后一行前 $q+2$ 格为红点．其余格则不为红点（若有红点则更易证），于是：问题转化为：证明存在四个红点是一个边平行于格线的矩形顶点．

若否，则表格中任何四个红点其中心都不是一个边平行于格线的矩形顶点．于是，前 $n-1$ 行的前 $q+2$ 个方格中，每行至多有 1 个红点．去掉表格的第 n 行及前 $q+2$ 列，则至多去掉 $q+2+(n-1)=q+2+q^2+q=(q+1)^2+1$ 个红点．于是在余下 $(n-1)\times(n-q-2)$ 方格表中，至少有

$2l-(q+1)^2-1=q(q+1)^2+2-(q+1)^2-1=(q-1)(q+1)^2+1=q^3+q^2-q$ 个红点．

设此表格中第 i 行有 $m_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 个红点，于是，同行的红点点对数的总和

$=\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$．其中 $n-1=q^2+q$．（由于当 $n>k$ 时，$C_n^2+C_k^2<C_{n+1}^2+C_{k-1}^2$，故当红点总数为 q^3+q^2-q 个时，可取 q^2 行每行取 q 个红点，q 行每行取 $q-1$ 个红点时 $\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$ 取最小值，由下证可知红点数多于此数时更有利于证明．即）

但 $q^2C_q^2+qC_{q-1}^2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2$．

由假设，不存在处在不同行的 2 个红点对，使此四点两两同列，所以，有（由于去掉了 $q+2$ 列，故还余 q^3-1 列，不同的列对数为 $C_{q^3-1}^2$）$\sum_{i=1}^{n-1}C_{m_i}^2\leqslant C_{q^3-1}^2$．

所以 $q^2\cdot q(q-1)+q(q-1)(q-2)\leqslant(q^3-1)(q^3-2)$．

$\Rightarrow$　$q(q-1)(q^3+q-2)\leqslant(q-1)(q+1)(q^3-2)\Rightarrow q^3+q^2-2q\leqslant q^3+q^2-2q-2$．矛盾．故证．