# 二〇〇一年全国高中数学联赛

（10月4日上午8：00—9：40）

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | 合计 | 加试 | 总成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 13 | 14 | 15 | | | |
| 得分 | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | |
| 复核人 | | | | | | | | |

学生注意：1、本试卷共有三大题（15个小题），全卷满分150分。

2、用圆珠笔或钢笔作答。

3、解题书写不要超过装订线。

4、不能使用计算器。

一、 选择题（本题满分36分，每小题6分）

本题共有6个小是题，每题均给出（A）（B）（C）（D）四个结论，其中有且仅有一个是正确的。请将正确答案的代表字母填在题后的括号内，每小题选对得6分；不选、选错或选的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得0分。

1、已知a为给定的实数，那么集合$M=\{x|x^2-3x-a^2+2=0, x\in R\}$的子集的个数为

（A）1 （B）2 （C）4 （D）不确定

2、命题1：长方体中，必存在到各顶点距离相等的点；

命题2：长方体中，必存在到各棱距离相等的点；

命题3：长方体中，必存在到各面距离相等的点；

以上三个命题中正确的有

（A）0个 （B）1个 （C）2个 （D）3个

3、在四个函数$y=\sin|x|$，$y=\cos|x|$，$y=|ctgx|$，$y=\lg|\sin x|$中以$\pi$为周期、在$(0, \frac{\pi}{2})$上单调递增的偶函数是

（A）$y=\sin|x|$ （B）$y=\cos|x|$ （C）$y=|ctgx|$ （D）$y=\lg|\sin x|$

4、如果满足$\angle ABC=60^\circ$，$AC=12$，$BC=k$的$\triangle ABC$恰有一个，那么$k$的取值范围是

（A）$k=8\sqrt{3}$ （B）$0<k\leqslant 12$ （C）2 （D）$0<k\leqslant 12$或$k=8\sqrt{3}$

5．若$(1+x+x^2)^{1000}$的展开式为$a_0+a_1x+a_2x_2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，

则$a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$的值为（ ）.

（A）$3^{333}$ （B）$3^{666}$ （C）$3^{999}$ （D）$3^{2001}$

6．已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24，而4枝玫瑰与5枝康乃馨的价格之和小于22元，则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较，结果是（ ）.

（A）2枝玫瑰价格高 （B）3枝康乃馨价格高

（C）价格相同 （D）不确定

二、填空题（本题满分54分，每小题9分）

7．椭圆$\rho=1/(2-\cos\theta)$的短轴长等于_____.

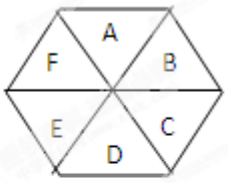
8、若复数$z_1, z_2$满足$|z_1|=2, |z_2|=3, 3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-I$，则$z_1z_2=$_____。

9、正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则直线$A_1C_1$与$BD_1$的距离是_____。

10、不等式 $\left|\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}+2\right|>\frac{3}{2}$ 的解集为_____。

11、函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为_____。

12、在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物（如图），要求同一场块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物。现有 4 种不同的植物可供选择，则有_____种栽种方案。




二、 解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

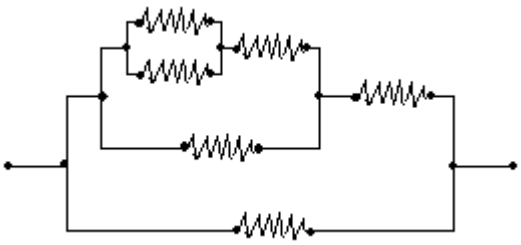
13、设 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，且 $b_1=a_1^2$，$b_2=a_2^2$，$b_3=a_3^2$（$a_1<a_2$），又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$，试求 $\{a_n\}$ 的首项与公差。

14、设曲线 $C_1$：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（a 为正常数）与 $C_2$：$y^2=2(x+m)$ 在 x 轴上方公有一个公共点 P。

（1） 求实数 m 的取值范围（用 a 表示）；

（2） O 为原点，若 $C_1$ 与 x 轴的负半轴交于点 A，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，试求 $\triangle OAP$ 的面积的最大值（用 a 表示）。

15、用电阻值分别为 $a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$、（$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$）的电阻组装成一个如图的组件，在组装中应如何选取电阻，才能使该组件总电阻值最小？证明你的结论。



# 二〇〇一年全国高中数学联合竞赛加试试题

（10月4日上午10：00—12：00）

学生注意：1、本试卷共有三大题，全卷满分150分。

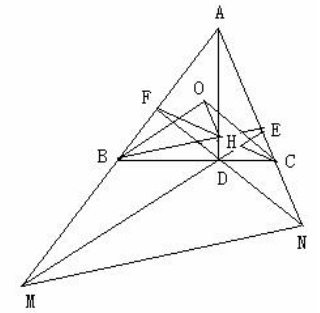
2、用圆珠笔或钢笔作答。

3、解题书写不要超过装订线。

4、不能使用计算器。

一、（本题满分50分）

如图：⊿ABC中，O为外心，三条高AD、BE、CF交于点H，直线ED和AB交于点M，FD和AC交于点N。求证：（1）OB⊥DF，OC⊥DE；（2）OH⊥MN。

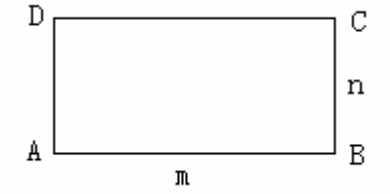



二、（本题满分50分）

设$x_i \geqslant 0 (I=1,2,3,\cdots,n)$且$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + 2\sum_{1\leq k<j\leq n} \sqrt{\frac{k}{j}} x_k x_j = 1$，求$\sum_{i=1}^{n} x_i$的最大值与最小值。

三、（本题满分50分）

将边长为正整数m,n的矩形划分成若干边长均为正整数的正方形，每个正方形的边均平行于矩形的相应边，试求这些正方形边长之和的最小值。



# 2001年全国高中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

一．选择题：*CBDDCA*

1.已知a为给定的实数，那么集合M＝{x｜$x^2-3x-a^2+2=0$，x∈R}的子集的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．4　　D．不确定

【答案】C

【解析】M表示方程$x^2-3x-a^2+2=0$在实数范围内的解集．由于Δ＝$1+4a^2>0$，所以M含有2个元素．故集合M有$2^2=4$个子集，选C．

2．命题1：长方体中，必存在到各顶点距离相等的点．

命题2：长方体中，必存在到各条棱距离相等的点；

命题3：长方体中，必存在到各个面距离相等的点．

以上三个命题中正确的有（　　）.

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

【答案】B

【解析】由于长方体的中心到各顶点的距离相等，所以命题1正确．对于命题2和命题3，一般的长方体（除正方体外）中不存在到各条棱距离相等的点，也不存在到各个面距离相等的点．因此，本题只有命题1正确，选B．

3.在四个函数y＝sin｜x｜、y＝cos｜x｜、y＝｜ctgx｜、y＝lg｜sinx｜中，以π为周期、在（0，π／2）上单调递增的偶函数是（　　）.

A．y＝sin｜x｜　　B．y＝cos｜x｜

C．y＝｜ctgx｜　　D．y＝lg｜sinx｜

【答案】D

【解析】可考虑用排除法．y＝sin｜x｜不是周期函数（可通过作图判断），排除A；y＝cos｜x｜的最小正周期为2π，且在（0，π／2）上是减函数，排除B；y＝｜ctgx｜在（0，π／2）上是减函数，排除C．故应选D．

4．如果满足∠ABC＝60°，AC＝12，BC＝k的△ABC恰有一个，那么k的取值范围是（　　）.

A．$k=8\sqrt{3}$　　B．0＜k≤12

C．k≥12　　D．0＜k≤12或$k=8\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】这是“已知三角形的两边及其一边的对角，解三角形”这类问题的一个逆向问题，由课本结论知，应选结论D．

说明：本题也可以通过画图直观地判断，还可以用特殊值法排除A、B、C．

5．若$(1+x+x^2)^{1000}$的展开式为$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则$a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$的值为（　　）.

A．$3^{333}$　　B．$3^{666}$　　C．$3^{999}$　　D．$3^{2001}$

【答案】C

【解析】由于要求的是展开式中每间隔两项系数的和，所以联想到1的单位根，用特殊值法.

取 $\omega=-(1/2)+(\sqrt{3}/2)\,i$，则 $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$.

令 $x=1$，得

$3^{1000}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2000}$;

令 $x=\omega$，得

$0=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots+a_{2000}\omega^{2000}$;

令 $x=\omega^2$，得

$0=a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4+a_3\omega^6+\cdots+a_{2000}\omega^{4000}$.

三个式子相加得

$3^{1000}=3(a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998})$.

$a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998}=3^{999}$，选C.

6. 已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24，而4枝玫瑰与5枝康乃馨的价格之和小于22元，则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较，结果是（　　）.

A．2枝玫瑰价格高　　B．3枝康乃馨价格高

C．价格相同　　D．不确定

【答案】A

【解析】这是一个大小比较问题. 可先设玫瑰与康乃馨的单价分别为 $x$ 元、$y$ 元，则由题设得，$\begin{cases}6x+3y>24\\4x+5y<22\end{cases}$ 问题转化为在条件①、②的约束下，比较 $2x$ 与 $3y$ 的大小. 有以下两种解法：

解法1：为了整体地使用条件①、②，令 $6x+3y=a$，$4x+5y=b$，联立解得 $x=(5a-3b)/18$，$y=(3b-2a)/9$.

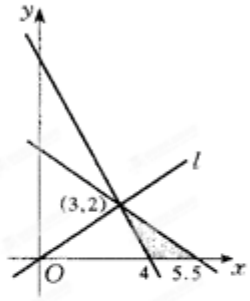
$\therefore 2x-3y=\cdots=(11a-12b)/9$.

$\because a>24$，$b<22$，

$\therefore 11a-12b>11\times24-12\times22=0$.

$\therefore 2x>3y$，选A

解法2：由不等式①、②及 $x>0$、$y>0$ 组成的平面区域如图1中的阴影部分（不含边界）. 令 $2x-3y=2c$，则 $c$ 表示直线 $l$：$2x-3y=2c$ 在 $x$ 轴上的截距. 显然，当 $l$ 过点（3，2）时，$2c$ 有最小值为0. 故 $2x-3y>0$，即 $2x>3y$，选A.




说明：（1）本题类似于下面的1983年一道全国高中数学联赛试题：

已知函数 $M=f(x)=ax^2-c$ 满足：$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$，那么 $f(3)$ 应满足（　　）.

A．$-7\leqslant f(3)\leqslant26$　　B．$-4\leqslant f(3)\leqslant15$

C．$-1\leqslant f(3)\leqslant20$　　D．$-28/3\leqslant f(3)\leqslant35/3$

（2）如果由条件①、②先分别求出 $x$、$y$ 的范围，再由 $2x-y$ 的范围得结论，容易出错. 上面的解法1运用了整体的思想，解法2则直观可靠，详见文[1].

二．填空题

**7.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **8.** $-\frac{30}{13}+\frac{72}{13}i$ **9.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$

**10.** $(0,1)\cup(1,2^{\frac{2}{7}})\cup(4,+\infty)$ **11.** $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$ **12.** **732**

**7. 椭圆 ρ＝1／（2－cos θ）的短轴长等于_____.**

**【答案】** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**【解析】若注意到极点在椭圆的左焦点，可利用特殊值法；若注意到离心率 e 和焦参数 p（焦点到相应准线的距离）的几何意义，本题也可以直接求短半轴的长.**

**解法 1：由** $\begin{cases}\rho(0)=a+c=1\\ \rho(\pi)=a-c=1/3\end{cases}$ **得 a＝2／3，从而 b＝**$\frac{\sqrt{3}}{3}$**，故 2b＝**$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**解法 2：由 e＝c／a＝1／2，p＝b²／c＝1 及 b²＝a²－c²，得**

$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$**. 从而 2b＝**$\frac{2\sqrt{3}}{3}$**. 说明：这是一道符合教学大纲而超出高考范围的试题.**

**8. 若复数 $z_1$、$z_2$ 满足｜$z_1$｜＝2，｜$z_2$｜＝3，$3z_1-2z_2=(3/2)-i$，则 $z_1\cdot z_2$＝_____.**

**【答案】** $-\frac{30}{13}+\frac{72}{13}i$

**【解析】令 $z_1$＝2（cos α＋i sin α），$z_2$＝3（cos β＋i sin β），**

**则由 $3z_1-2z_2=(3/2)-i$ 及复数相等的充要条件，得** $\begin{cases}6(\cos\alpha-\cos\beta)=\frac{3}{2}\\ 6(\sin\alpha-\sin\beta)=-1\end{cases}$ **即**

$$\begin{cases}-12\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{2}\\ 12\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-1\end{cases}$$

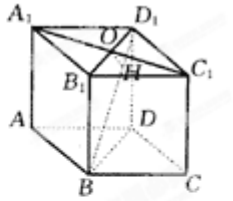
**二式相除，得 tg（α＋β）／2）＝3／2. 由万能公式，得**

**sin（α＋β）＝12／13，cos（α＋β）＝－5／13.**

**故 $z_1\cdot z_2$＝6［cos（α＋β）＋i sin（α＋β）］＝－（30／13）＋（72／13）i.**

说明：本题也可以利用复数的几何意义解.

9. 正方体ABCD－A₁B₁C1₁的棱长为1，则直线A₁C₁与BD₁的距离是_____.




【答案】$\frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】这是一道求两条异面直线距离的问题，解法较多，下面给出一种基本的解法. 为了保证所作出的表示距离的线段与A₁C₁和BD₁都垂直，不妨先将其中一条直线置于另一条直线的垂面内. 为此，作正方体的对角面BDD₁B₁，则A₁C₁⊥面BDD₁B₁，且BD₁⊂面BDD₁B₁. 设A₁C₁∩B₁D₁=O，在面BDD₁B₁内作OH⊥BD₁，垂足为H，则线段OH的长为异面直线A₁C₁与BD₁的距离. 在Rt△BB₁D₁中，OH等于斜边BD₁上高的一半，即OH=$\sqrt{6}$/6.

10. 不等式|（1/log$_{1/2}$x）+2|>3/2的解集为_____.

【答案】x>4，或1<x<$2^{2/7}$，或0<x<1.

【解析】从外形上看，这是一个绝对值不等式，先求得log$_{1/2}$x<−2，或−2/7<log$_{1/2}$x<0，或log$_{1/2}$x>0. 从而x>4，或1<x<$2^{2/7}$，或0<x<1.

11. 函数y=x+$\sqrt{x^2-3x+2}$的值域为_____.

【答案】[1，3/2）∪[2，+∞）.

【解析】先平方去掉根号.

由题设得（y−x）²=x²−3x+2，则x=（y²−2）/（2y−3）.

由y≥x，得y≥（y²−2）/（2y−3）. 解得1≤y<3/2，或y≥2.

由于$\sqrt{x^2-3x+2}$能达到下界0，所以函数的值域为[1，3/2）∪[2，+∞）.

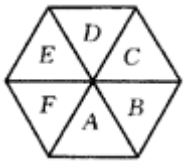
说明：（1）参考答案在求得1≤y<3/2或y≥2后，还用了较长的篇幅进行了一番验证，确无必要.

（2）本题还可以用三角代换法和图象法来解，不过较繁，读者不妨一试.

12. 在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物（如图3），要求同一块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物. 现有4种不同的植物可供选择，则有_____种栽种方案.

【答案】732

【解析】为了叙述方便起见，我们给六块区域依次标上字母A、B、C、D、E、F. 按



间隔三块A、C、E种植植物的种数，分以下三类.

（1）若A、C、E种同一种植物，有4种种法. 当A、C、E种植后，B、D、E可从剩余的三种植物中各选一种植物（允许重复），各有3种方法. 此时共有4×3×3×3=108种方法.

（2）若A、C、E种二种植物，有$P_4^3$种种法. 当A、C、E种好后，若A、C种同一种，则B有3种方法，D、F各有2种方法；若C、E或E、A种同一种，相同（只是次序不同）. 此时共有$P_4^3$×3（3×2×2）=432种方法.

（3）若A、C、E种三种植物，有$P_4^3$种种法. 这时B、D、F各有2种种方法. 此时共有$P_4^3$×2×2×2=192种方法.

根据加法原理，总共有N=108+432+192=732种栽种方案.

说明：本题是一个环形排列问题.

三. 解答题

13.【解析】设所求公差为$d$，∵$a_1<a_2$，∴$d>0$. 由此得

$a_1^2(a_1+2d)^2=(a_1+d)^4$　　化简得：$2a_1^2+4a_1d+d^2=0$

解得：$d=(-2\pm\sqrt{2})a_1$

而$-2\pm\sqrt{2}<0$，故$a_1<0$

若$d=(-2-\sqrt{2})a_1$，则$q=\dfrac{a_2^2}{a_1^2}=(\sqrt{2}+1)^2$

若$d=(-2+\sqrt{2})a_1$，则$q=\dfrac{a_2^2}{a_1^2}=(\sqrt{2}-1)^2$

但$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$存在，故$|q|<1$，于是$q=(\sqrt{2}+1)^2$不可能.

从而$\dfrac{a_1^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}+1 \Rightarrow a_1^2=(2\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+1)=2$

所以$a_1=-\sqrt{2}$，$d=(-2+\sqrt{2})a_1=2\sqrt{2}-2$

14.【解析】(1)由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\\ y^2=2(x+m)\end{cases}$　　消去$y$得：$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0$　　①

设$f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$，问题(1)化为方程①在$x\in(-a,a)$上有唯一解或等根.

只需讨论以下三种情况：

1° △=0 得：$m=\frac{a^2+1}{2}$，此时 $x_p=-a^2$，当且仅当$-a<-a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合；

2° $f(a)f(-a)<0$，当且仅当$-a<m<a$；

3° $f(-a)=0$ 得 $m=a$，此时 $x_p=a-2a^2$，当且仅当$-a<a-2a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合.

$f(a)=0$ 得 $m=-a$，此时 $x_p=-a-2a^2$，由于$-a-2a^2<-a$，从而 $m\neq -a$.

综上可知，当 $0<a<1$ 时，$m=\frac{a^2+1}{2}$ 或$-a<m\leqslant a$；

当 $a\geqslant 1$ 时，$-a<m<a$.

(2) △$OAP$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ay_p$

∵$0<a<\frac{1}{2}$，故$-a<m\leqslant a$时，$0<-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}<a$.

由唯一性得 $x_p=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$

显然当 $m=a$ 时，$x_p$ 取值最小. 由于 $x_p>0$，从而 $y_p=\sqrt{1-\frac{x_p^2}{a^2}}$ 取值最大，此时

$y_p=2\sqrt{a-a^2}$，

∴ $S=a\sqrt{a-a^2}$.

当 $m=\frac{a^2+1}{2}$ 时，$x_p=-a^2$，$y_p=\sqrt{1-a^2}$，此时 $S=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

下面比较 $a\sqrt{a-a^2}$ 与 $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$ 的大小：

令 $a\sqrt{a-a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，得 $a=\frac{1}{3}$

故当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}>\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=a\sqrt{a-a^2}$.

15.【解析】设 6 个电阻的组件(如图 3)的总电阻为 $R_w$，当 $R_i=a_i$，$i=3$，4，5，6，$R_1$、$R_2$是 $a_1$、$a_2$的任意排列时，$R_w$最小

证明如下：

1. 设当两个电阻 $R_1$、$R_2$并联时，所得组件阻值为 $R$，则 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. 故交换二电阻的位置，不改变 $R$ 值，且当 $R_1$或 $R_2$变小时，$R$也减小，因此不妨取 $R_1>R_2$.

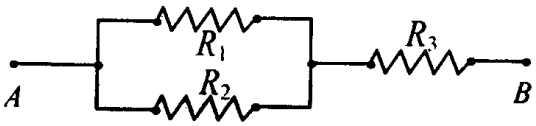



图 1

2．设 3 个电阻的组件（如图 1）的总电阻为 $R_{AB}$，则

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2}$$

显然 $R_1+R_2$越大，$R_{AB}$越小，所以为使 $R_{AB}$最小必须取 $R_3$为所取三个电阻中阻值最小的一个．

3．设 4 个电阻的组件(如图 2)的总电阻为 $R_{CD}$

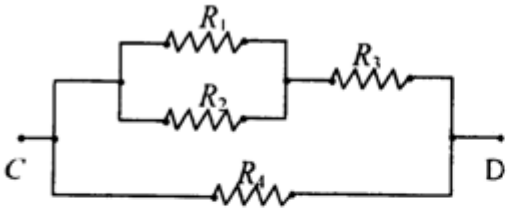



图 2

若记 $S_1=\sum_{1\le i<j\le 4}R_iR_j$，$S_2=\sum_{1\le i<j<k\le 4}R_iR_jR_k$，则 $S_1$、$S_2$ 为定值，于是

$$R_{CD}=\frac{S_2-R_1R_2R_3}{S_1-R_3R_4}$$

只有当 $R_1R_2$最小，$R_1R_2R_3$最大时，$R_{CD}$最小，故应取 $R_1<R_4$，$R_2<R_4$，$R_3<R_4$，即得总电阻的阻值最小

4°对于图 3 把由 $R_1$、$R_2$、$R_3$组成的组件用等效电阻 $R_{AB}$代替．要使 $R_{AB}$最小，由 3°必需使 $R_3<R_4$；且由 1°应使 $R_{AB}$最小．由 2°知要使 $R_{AB}$最小，必需使 $R_3<R_4$，且应使 $R_{AB}$最小．

而由 3°，要使 $R_{AB}$最小，应使 $R_1<R_3<R_2$且 $R_1<R_3<R_4$，

这就说明，要证结论成立

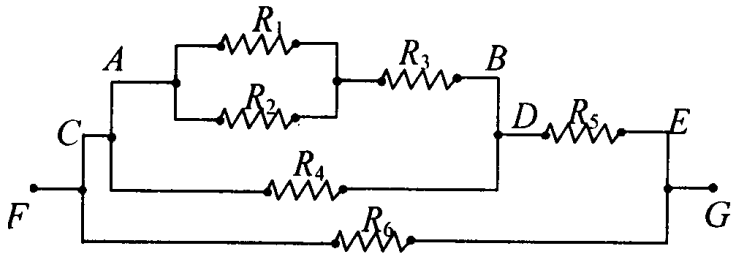



图 3

## 2001 年全国高中数学联合竞赛加试参考答案及评分标准

一.【解析】证明：(1)∵A、C、D、F四点共圆

∴∠BDF=∠BAC

又∠OBC=$\frac{1}{2}$(180°－∠BOC)=90°－∠BAC

∴OB⊥DF.

(2)∵CF⊥MA

∴$MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$ ①

∵BE⊥MA

∴$MB^2-MH^2=AB^2-AH^2$ ②

∵DA⊥BC

∴$BD^2-CD^2=BA^2-AC^2$ ③

∵OB⊥DF

∴$BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$ ④

∵OC⊥DE

∴$CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$ ⑤

①－②+③+④－⑤，得

$NH^2-MH^2=ON^2-OM^2$ $MO^2-MH^2=NO^2-NH^2$

∴OH⊥MN

另证：以BC所在直线为x轴，D为原点建立直角坐标系，

设A(0，a)，B(b，0)，C(c，0)，则 $k_{AC}=-\frac{a}{c}$，$k_{AB}=-\frac{a}{b}$

∴直线AC的方程为$y=-\frac{a}{c}(x-c)$，直线BE的方程为$y=\frac{c}{a}(x-b)$

由$\begin{cases}y=\frac{c}{a}(x-b)\\ y=-\frac{a}{c}(x-c)\end{cases}$ 得E点坐标为E($\frac{a^2c+bc^2}{a^2+c^2}$，$\frac{ac^2-abc}{a^2+c^2}$)

同理可得F($\frac{a^2b+b^2c}{a^2+b^2}$，$\frac{ab^2-abc}{a^2+b^2}$)

直线AC的垂直平分线方程为$y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}(x-\frac{c}{2})$

直线BC的垂直平分线方程为$x=\frac{b+c}{2}$

由$\begin{cases}y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}(x-\frac{c}{2})\\ x=\frac{b+c}{2}\end{cases}$ 得O($\frac{b+c}{2}$，$\frac{bc+a^2}{2a}$)

$k_{OB}=\frac{\frac{bc+a^2}{2a}}{\frac{b+c}{2}-b}=\frac{bc+a^2}{ac-ab}$ ，$k_{DF}=\frac{ab^2-abc}{a^2b+b^2c}=\frac{ab-ac}{a^2+bc}$

∵ $k_{OB}k_{DF}=-1$　　∴ $OB\perp DF$

同理可证 $OC\perp DE$.

在直线 $BE$ 的方程 $y=\frac{c}{a}(x-b)$ 中令 $x=0$ 得 $H(0,\ -\frac{bc}{a})$

$$\therefore k_{OH}=\frac{\frac{bc+a^2}{2a}+\frac{bc}{a}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{a^2+3bc}{ab+ac}$$

直线 $DF$ 的方程为 $y=\frac{ab-ac}{a^2+bc}x$

由 $\begin{cases} y=\frac{ab-ac}{a^2+bc}x \\ y=-\frac{a}{c}(x-c) \end{cases}$ 得 $M\left(\frac{a^2c+bc^2}{a^2+2bc-c^2},\ \frac{abc-ac^2}{a^2+2bc-c^2}\right)$

同理可得 $N\left(\frac{a^2b+b^2c}{a^2+2bc-b^2},\ \frac{abc-ab^2}{a^2+2bc-b^2}\right)$

$$\therefore k_{MN}=\frac{a(b^2-c^2)(a^2+bc)}{(c-b)(a^2+bc)(a^2+3bc)}=-\frac{ab+ac}{a^2+3bc}$$

∵ $k_{OH}\cdot k_{MN}=-1$，∴ $OH\perp MN$.

二.【解析】先求最小值，因为 $(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\le k<j\le n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j\ge 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant 1$

等号成立当且仅当存在 $i$ 使得 $x_i=1$，$x_j=0$，$j=i$

∴ $\sum_{i=1}^{n}x_i$ 最小值为 1.　再求最大值，令 $x_k=\sqrt{k}\,y_k$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}ky_k^2+2\sum_{1\le k<j\le n}ky_ky_j=1 \qquad ①$$

设 $M=\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,y_k$，　令 $\begin{cases} y_1+y_2+\cdots+y_n=a_1 \\ y_2+\cdots+y_n=a_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n=a_n \end{cases}$

则①$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$

令 $a_{n-1}=0$，则 $M=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,(a_k-a_{k+1})$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})a_k$$

由柯西不等式得：

$$M\le[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}=[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

等号成立$\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{1}=\cdots=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}=\cdots=\frac{a_n^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}$$

$$\Leftrightarrow a_k=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由于 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$，从而 $y_k=a_k-a_{k+1}=\frac{2\sqrt{k}-(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}}\ge 0$，即 $x_k\ge 0$

所求最大值为$[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}$

三.【解析】记所求最小值为 $f(m,\ n)$，可义证明 $f(m,\ n)=rn+n-(m,\ n)$ (*)

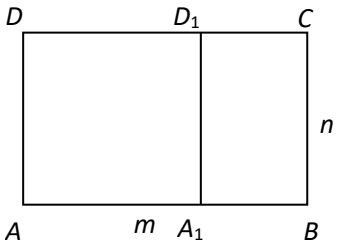
其中$(m,\ n)$ 表示 $m$和 $n$ 的最大公约数

事实上，不妨设 $m\ge n$

(1)关于 $m$ 归纳，可以证明存在一种合乎题意的分法，使所得正方形边长之和恰为 $rn+n-(m,\ n)$

当用 $m=1$ 时，命题显然成立.

假设当，$m\le k$ 时，结论成立($k\ge 1$)．当 $m=k+1$ 时，若 $n=k+1$，则命题显然成立．若 $n<k+1$，从矩形 $ABCD$ 中切去正方形 $AA_1D_1D$(如图)，由归纳假设矩形 $A_1BCD_1$ 有一种分法使得所得正方形边长之和恰为 $m-n+n-(m-n,\ n)=m-(m,\ n)$，于是原矩形 $ABCD$ 有一种分法使得所得正方形边长之和为 $rn+n-(m,\ n)$




(2)关于$m$归纳可以证明(*)成立.

当 $m=1$ 时，由于 $n=1$，显然 $f(m,\ n)=rn+n-(m,\ n)$

假设当 $m\le k$ 时，对任意 $1\le n\le m$ 有 $f(m,\ n)=rn+n-(m,\ n)$

若 $m=k+1$，当 $n=k+1$ 时显然 $f(m,\ n)=k+1=rn+n-(m,\ n)$.

当 $1\le n\le k$ 时，设矩形 $ABCD$ 按要求分成了 $p$ 个正方形，其边长分别为 $a_1$，$a_2$，…，$a_p$

不妨 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_p$

显然 $a_1=n$ 或 $a_1<n$.

若 $a_1<n$，则在 $AD$ 与 $BC$ 之间的与 $AD$ 平行的任一直线至少穿过二个分成的正方形（或其边界）．于是 $a_1+a_2+\cdots+a_s$ 不小于 $AB$ 与 $CD$ 之和．

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_s\geqslant 2m>f(m-n,\ n)+f(m,\ n)$

若 $a_1=n$，则一个边长分别为 $m-n$ 和 $n$ 的矩形可按题目要求分成边长分别为 $a_2,\ \cdots a_s$ 的正方形，由归纳假设

$a_2+\cdots+a_s\geqslant f(m-n+n-(m-n,\ n))=f(m-(m,\ n)$

从而 $a_1+a_2+\cdots+a_s\geqslant f(m,\ n)+f(m-(m,\ n)$

于是当 $f(m,\ n)=k+1$ 时，$f(m,\ n)\geqslant f(m,\ n)+f(m-(m,\ n)$

再由(1)可知 $f(m,\ n)=f(m,\ n)+f(m-(m,\ n)$．