2000 年全国高中数学联赛试题

第一试

（10 月 15 日上午 8:00–9:40）

一、　选择题

本题共有 6 小题，每题均给出（A）、（B）、（C）、（D）四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内，每小题选对得 6 分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得 0 分。

1. 设全集是实数，若 $A=\{x\mid \sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap \overline{B}$ 是　　（　）

(A) $\{2\}$　　(B) $\{-1\}$　　(C) $\{x\mid x\leqslant 2\}$　　(D) $\varnothing$

2. 设 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，且 $\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的取值范围是　　（　）

(A) $(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{3}),\ k\in Z$　　(B) $(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}),k\in Z$

(C) $(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi),k\in Z$

(D) $(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3})\cup(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi),k\in Z$

3. 已知点 A 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左顶点，点 B 和点 C 在双曲线的右分支上，$\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\triangle ABC$ 的面积是　　（　）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　(C) $3\sqrt{3}$　　(D) $6\sqrt{3}$

2. 给定正数 p,q,a,b,c，其中 $p\neq q$，若 p,a,q 是等比数列，p,b,c,q 是等差数列，则一元二次方程 $bx^2-2ax+c=0$　　（　）

(A) 无实根　　(B) 有两个相等实根　　(C) 有两个同号相异实根　　(D) 有两个异号实根

3. 平面上整点（纵、横坐标都是整数的点）到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是

(A) $\frac{\sqrt{34}}{170}$　　(B) $\frac{\sqrt{34}}{85}$　　(C) $\frac{1}{20}$　　(D) $\frac{1}{30}$　（　）

4. 设 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$，则以 $\omega,\omega^3,\omega^7,\omega^9$ 为根的方程是　　（　）

(A) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　(B) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$

(C) $x^4-x^3-x^2+x+1=0$　　(D) $x^4+x^3+x^2-x-1=0$

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上。

5. $\arcsin(\sin 2000^\circ)=$_____.

6. 设 a_n 是 $(3-\sqrt{x})^n$ 的展开式中 x 项的系数（$n=2,3,4,\cdots$），则

$\lim_{n\to\infty}(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n})$=_____.

7. 等比数列 $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ 的公比是_____.

8. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 中，记左焦点为 F，右顶点为 A，短轴上方的端点为 B. 若该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\angle ABF$=_____.

9. 一个球与正四面体的六条棱都相切，若正四面体的棱长为 a，则这个球的体积是_____.

10. 如果：(1) a, b, c, d 都属于 $\{1, 2, 3, 4\}$；(2) $a\neq b, b\neq c, c\neq d, d\neq a$；(3) a 是 a, b, c, d 中的最小值，那么，可以组成的不同的四位数 $\overline{abcd}$ 的个数是_____.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

11. 设 $S_n=1+2+3+\cdots+n$, $n\in N$, 求 $f(n)=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值.

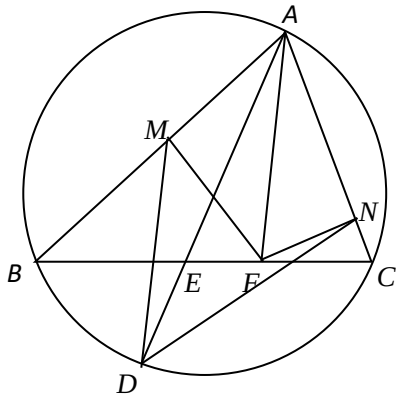
12. 若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 $[a, b]$.

13. 已知 $C_1: x^2+y^2=1$ 和 $C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)。试问：当且仅当 a, b 满足什么条件时，对 C_2 上任意一点 P，均存在以 P 为顶点，与 C_2 外切，与 C_1 内接的平行四边形？并证明你的结论。

【加试】(10 月 15 日上午 10：00-12：00)

一.（本题满分 50 分）

如图，在锐角三角形 ABC 的 BC 边上有两点 E、F，满足 $\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$，$FN\perp AC$（M、N 是垂足），延长 AE 交三角形 ABC 的外接圆于 D. 证明：四边形 $AMDN$ 与三角形 ABC 的面积相等.



二.（本题满分 50 分）

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足，且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4 \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

证明 a_n（n=0，1，2，…）是完全平方数.

三.（本题满分 50 分）

有 n 个人，已知他们中的任意两人至多通电话一次，他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的次数相等，都是 3^k 次，其中 k 是自然数，求 n 的所有可能值.

2000年全国高中数学联合竞赛试题答案

1.【答案】D

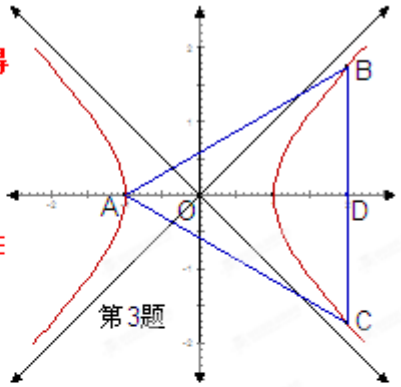
【解析】由$\sqrt{x-2}\le 2$得x=2，故A={2}；由$10^{x^2-2}=10^x$得$x^2-x-2=0$，故B={-1，2}.所以$A\cap\overline{B}=\phi$.

2.【答案】D

【解析】由$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$得

$$\alpha\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),k\in Z$$

从而有 $\frac{\alpha}{3}\in$



第3题

$$\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right),k\in Z \quad \cdots\cdots①$$

又因为$\sin\frac{\alpha}{3}>\cos\frac{\alpha}{3}$，所以又有$\frac{\alpha}{3}\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right),k\in Z$ ……②

如上图所示，是①、②同时成立的公共部分为

$$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi\right),k\in Z.$$

3.【答案】C

【解析】如图所示，设BD=t，则OD=$\sqrt{3}$t-1，从而B（$\sqrt{3}$t-1，t）

满足方程$x^2-y^2=1$，可以得到t=$\sqrt{3}$,所以等边三角形，ΔABC的面积是$3\sqrt{3}$.

4.【答案】A

【解析】由题意知 $pq=a^2$，$2b=p+c,2c=q+b\Rightarrow b=\frac{2p+q}{3}$，

$c=\frac{p+2q}{3}\Rightarrow bc=\frac{2p+q}{3}\cdot\frac{p+2q}{3}\ge\sqrt[3]{p^2q}\cdot\sqrt[3]{pq^2}=pq=a^2$.因为p≠q，故$bc>a^2$，方程的判别式Δ= $4a^2-4bc<0$，因此，方程无实数根.

5.【答案】B

【解析】设整点坐标(m,n)，则它到直线 25x-15y+12=0 的距离为

$$d=\frac{|25m-15n+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|5(5m-3n)+12|}{5\sqrt{34}}$$

由于 m,n∈Z，故 5(5m-3n)是 5 的倍数，只有当 m=n=-1，时 5(5m-3n)=-10 与 12 的和的绝对值最小，其值为 2，从而所求的最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{85}$.

6.【答案】 B

【解析】由 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{10}+i\sin\frac{2\pi}{10}$ 知，

ω，ω^2，ω^3，ω^4，ω^5，ω^6，ω^7，ω^8，ω^9，ω^{10}(=1)是 1 的 10 个 10 次方根.

从而有

$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)(x-\omega^7)(x-\omega^8)(x-\omega^9)(x-\omega^{10})=x^{10}-1$ ·····①

由因ω^2，ω^4，ω^6，ω^8，ω^{10}是 1 的 5 个 5 次方根，

从而有

$(x-\omega^2)(x-\omega^4)(x-\omega^6)(x-\omega^8)(x-\omega^{10})=x^5-1$ ·····②

①÷②得 $(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^5+1$ ·····③

③的两边同除以$(x-\omega^5)=x+1$，得

$(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^4-x^3+x^2-x+1$.

所以ω，ω^3，ω^7，ω^9为根的方程是 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

二、填空题（满分 54 分，每小题 9 分）

7.【答案】-20°

【解析】sin2000° =sin(5×360° +200°)=sin200° =-sin20°

故 $a\,rcsin(sin2000°)=a\,rcsin(-sin20°)=-a\,rcsin(sin20°)=-20°$

8.【答案】18

【解析】由二项式定理知，$a_n=C_n^2\cdot 3^{n-2}$，因此 $\frac{3^n}{a_n}=\frac{3^2\cdot 2}{n(n-1)}=18\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

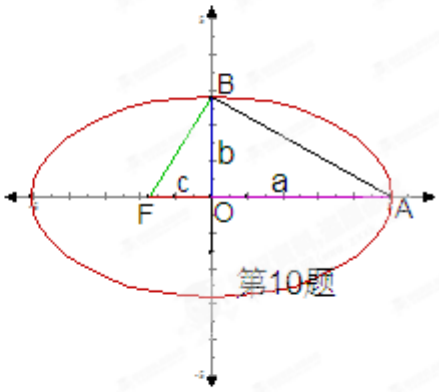
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}18\left(1-\frac{1}{n}\right)=18.$$

9.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}=\frac{1}{3}$

10.【答案】90°

【解析】如图所示，由



第10题

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow c^2+ac-a^2=0$,

$\cos\angle ABF=\frac{(a^2+b^2)+a^2-(c+a)^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=0$

$\Rightarrow$则∠ABF=90°.

11.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$

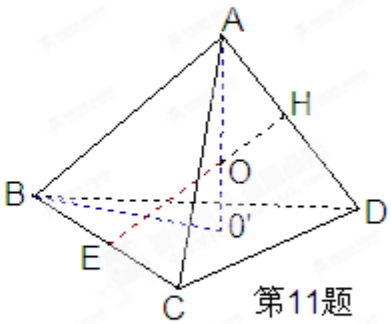
【解析】如图，设球心为O，半径为r，体积为V，面BCD的中心为O_1，棱BC的中心点为E，

则 $AO_1=\sqrt{a^2-O_1B^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

由 $OB^2=O_2O^2+O_2B^2=(O_1B-OB)^2+O_2B^2$ 得

$\frac{2}{3}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a\,OB+\frac{1}{3}a^2=0$，故 $OB=\frac{3}{2\sqrt{6}}a\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

于是 $r=OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}a$.



第11题

$V=\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{16\sqrt{2}}a^2=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

12.【答案】28

【解析】$\overline{abcd}$ 中恰有2个不中数字时，能组成 $C_4^2=6$ 个不中数字

$\overline{abcd}$ 中恰有3个不中数字时，能组成 $C_3^1C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1=12+4=16$ 个不中数字

$\overline{abcd}$ 中恰有 4 个不中数字时，能组成 P_3^3=6 个不中数字

所以，符合要求的数字共有 6+16+6=28 个

13.【答案】$\frac{1}{50}$

【解析】由已知，对任何 n∈N，有 f（n）= $\frac{S_n}{(n+32)S_{N+1}}=\frac{S_n}{(n+32)(n+2)}$

$=\frac{n}{n^2+34n+64}=\frac{1}{n+34+\frac{64}{n}}$　又因 $n+\frac{64}{n}+34\geq 2\sqrt{n\cdot\frac{64}{n}}+34=50$，

故对任何 n∈N，有 f（n）$=\frac{1}{n+34+\frac{64}{n}}\leq\frac{1}{50}$　由于 f(8)=$\frac{1}{50}$，故 f(n)的最大值为 $\frac{1}{50}$

14.【答案】所求区间为[1,3]或[-2-$\sqrt{17}$ $\frac{13}{4}$].

【解析】 化三种情况讨论区间[a,b].

(1) 若 0≤a<b，　则 f（x)在[a，b] 上单调递减，故 f(a) =2b，　f(b)=2a 于是有

$\begin{cases}2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}\\2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}\end{cases}$，解之得[a，b] = [1，3]，

(2)若 a <0 <b，f（x)在[a，b] 上单调递增，在[0,b] 上单调递减，，

因此 f（x)在 x=0 处取最大值 2b 在 x=a 或 x=b 处取最小值

2a. 故 2b=$\frac{13}{2}$, b=$\frac{13}{4}$. 由于 a<0,

又 f(b)=-$\frac{1}{2}$($\frac{13}{4}$)^2 + $\frac{13}{2}$=$\frac{39}{32}>0$

故 f(x)在 x=a 处取最小值 2a, 即 2a=$\frac{1}{2}a^2$+$\frac{13}{2}$,

解得 a=-2-$\sqrt{17}$;于是得 [a,b]=[-2-$\sqrt{17}$, $\frac{13}{4}$].

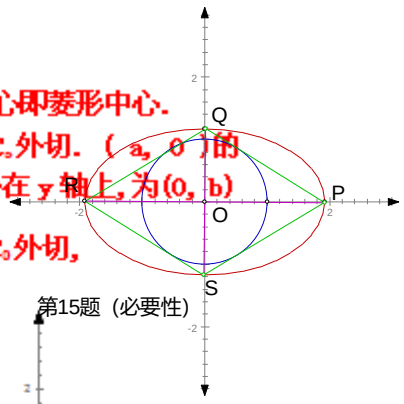
(2) 当 a<b≤0 时，f(x)在[a,b] 上单调递增，故 f(a)=2a，f(b)=2b,

即 2a=-$\frac{1}{2}a^2$+$\frac{13}{2}$, 2b=-$\frac{1}{2}a^2$+$\frac{13}{2}$.

由于方程$\frac{1}{2}$x^2+2x-$\frac{13}{2}$=0 的两根异号，故满足 a≺b≺0 的区间不存在.

综上所述，所求区间为[1,3]或[-2-$\sqrt{17}$ $\frac{13}{4}$].

15.【答案】所求条件为 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

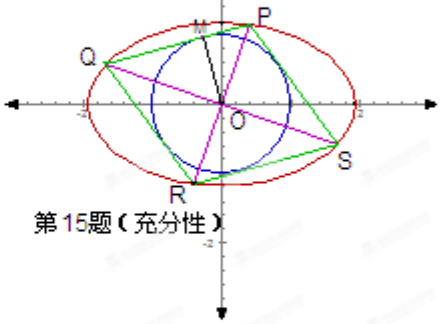


第15题（必要性）

【解析】证明：必要性：易知，圆外切平行四边形一定是菱形，圆心即菱形中心.

假设论成立，则对点（a，0），有（a，0）为顶点的菱形与 C_1 内接，与 C_0 外切.（a，0）的相对顶点为（－a，0），由于菱形的对角线互相垂直平分，另外两个顶点必在 y 轴上，为（0，b）和（0，－b）. 菱形一条边的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 bx+ay=ab. 由于菱形与 C_0 外切，

故必有 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b_2}}=1$，整理得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. 必要性得证.



第 15题（充分性）

充分性：设 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，P 是 C_1 上任意一点，过 P、O 作 C_1 的弦 PR，再过 O 作与 PR 垂直的弦 QS，则 PQRS 为与 C_1 内接菱形. 设 OP＝r_1，OQ＝r_2，则点 O 的坐标为（$r_1\cos\theta$，$r_1\sin\theta$），点 Q 的坐标为（$r_2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$，$r_2\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$），代入椭圆方程，得

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1,\quad \frac{[r^2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})]^2}{a^2}+\frac{[r^2\sin(\theta+\frac{\pi}{2})]^2}{b^2}=1,$$

于是，$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})+[\frac{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}{a^2}+\frac{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}{b^2}]$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$

又在 Rt△POQ 中，设点 O 到 PQ 的距离为 h，则 $\frac{1}{h}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=1$，故得 h=1

同理，点 O 到 QR，RS，SP 的距离也为 1，故菱形 PQRS 与 C_0 外切. 充分性得证.

[注]对于给出 $a^2+b^2=a^2b^2$ ，$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$ 等条件者，应同样给分.

2000年全国高中数学联合竞赛试卷答案
加试

一、【解析】证明：连结MN、BD，

∵FM⊥AB，FN⊥AC，∴A，M，F，N四点共圆.

∴∠AMN=∠AFN，

∴∠AMN+∠BAE=∠AFN+∠CAF=90°，即MN⊥AD.

∴$S_{AMFN}=\frac{1}{2}$AD·MN

∵∠CAF=∠DAB，∠ACF=∠ADB，

∴ △AFC∽△ABC$\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow$AB·AC=AD·AF.

又AF是过A、M、F、N四点的圆的直经，

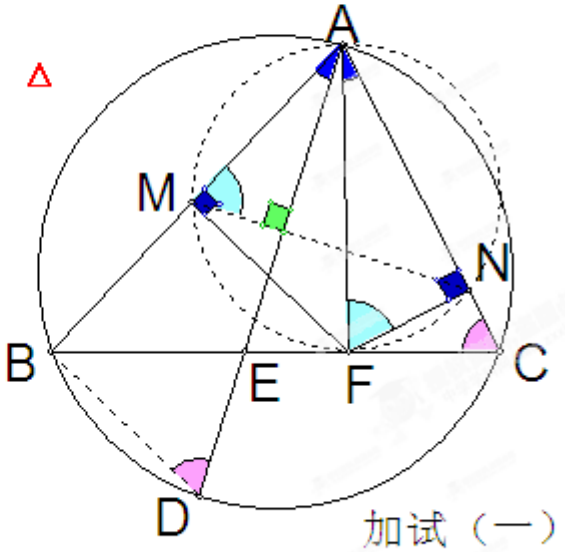
∴$\frac{MN}{\sin\angle BAC}$=AF⇒AF sin∠BAC=MN.

∴$S_{\triangle abc}=\frac{1}{2}$AB·AC·sin∠BAC

$=\frac{1}{2}$AD·AF·sin∠BAC

$=\frac{1}{2}$AD·MN

$=S_{AMFN}$



加试（一）

二.【解析】

[证法一]：由假设得 $a_1=4$，$b_1=4$ 且当 $n\geq 1$ 时（$2a_{n+1}-1$）$+\sqrt{3}b_{n+1}=(14a_n+12b_n-7)+\sqrt{3}(8a_n+7b_n-4)$

$=[(2a_n-1)+\sqrt{3b_n}](7+4\sqrt{3})$

依次类推可得（$2a_n-1$）$+\sqrt{3}b_n=(7+4\sqrt{3})^{n-1}(2a_1-1+\sqrt{3b_1})=(7+4\sqrt{3})^n$

同理（$2a_n-1+$）$-\sqrt{3b_n}=(7+4\sqrt{3})^n$ 从而 $a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$.

由于 $7\pm4\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^2$，所以 $a_n=[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n]^2$

由二项式展开得 $c_n=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n=\sum_{0\leq 2k\leq n}C_n^{2k}\ 3^k\ 2^{n-2k}$，

显然 C_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

[证法二]：由已知得 $a_{n+1}=7a_n+6b_n-3=7a_n+6(8a_{n-1}+7b_{n-1}-4)-3=7a_n+48a_{n-1}+42b_{n-1}-27$，

由 $a_n=7a_{n-1}+6b_{n-1}-3$，得 $42b_{n-1}=7a_n-49a_{n-1}+21$，

从而 $a_{n+1}=7a_n+48a_{n-1}+7a_n-49a_{n-1}+21-27=14a_n-a_{n-1}-6$.

也就是 $a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}-6$.

设 $(a_{n+1}-ka_n+t)=p(a_n-ka_{n-1}+t)$ ……①②③④

则有 $\begin{cases} p+k=14 \\ pk=1 \\ t(1-p)=6 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \\ p=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2 \\ t=3+2\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2 \\ p=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \\ t=3-2\sqrt{3} \end{cases}$

分别代入①，根据数列 $\{a_{n+1}-ka_n+t\}$ 是以 a_2-ka_0+t 为首项、p 为公比的等比数列，整理得

$$a_{n+1}-(7+4\sqrt{3})a_n+(3+2\sqrt{3})=-2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})^n=-2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{2n} \quad \cdots②$$

$$a_{n+1}-(7-4\sqrt{3})a_n+(3-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})^n=2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^{2n} \quad \cdots③$$

③-②，整理得 $a_n=\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n\right]^2$

由二项式展开得 $c_n=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n=\sum_{0\le 2k\le n}C_n^{2k}\ 3^k\ 2^{n-2k}$ ，

显然 C_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

三.【解析】显然 $n\ge 5$. 记 n 个人为 A_1，A_2，…… A_n ，

设 A_i 通话的次数为 m_i，A_i 与 A_j 之间通话的数为 y_{ij}，$1\le i,j\le n$.则

$$m_i+m_j-y_{i,j}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s-3^k=c \ . \qquad (*)$$

其中 c 是常数 ，$1\le i,j\le n$.

根据（*）知，$|m_i-m_j|=|(m_i+m_s)-(m_j+m_s)|=|y_{i.s}-y_{j.s}|\le 1$ ， $1\le i,j\le n$.

$$\Rightarrow |m_i-m_j|\le 1, \qquad 1\le i,j\le n$$

设 $m_t=\max\{m_s,1\le s\le n.\}$ ，$m_j=\min\{m_s,1\le s\le n.\}$ ，

则 $m_i+m_j\le 1$.

若 $m_i+m_j=1$ ，则对于任意 $s\ne i,j$， $1\le s\le n$ ，

都有 $(m_i+m_s-y_{i,s})-(m_j+m_s-y_{i,s})=1-(y_{i,s}-y_{j,s})=0$ ， 即 $y_{i,s}-y_{j,s}=1$

故 $y_{i,s}=1$ ， $y_{j,s}=0$. $s\ne i,j$， $1\le s\le n$ ，

因此 $m_t\ge n-2$ ， $m_j\ge 1$. 于是 ，$m_i+m_j\ge n-3\ge 2$.

出现矛盾，故 $m_i+m_j=0$，即 $m_s(1\le s\le n)$恒为常数。

根据（*）知，$y_{i,j}=0$ 或 $y_{i,j}=1$。

若 $y_{i,j}=0$，则 $m_s=0$，$1\le s\le n$。与已知条件矛盾。

因此，$y_{i,s}=1 \Rightarrow m_s=n-1$，$1\le s\le n$．所以

$$\frac{1}{2}n(n-1)-(2n-3)=3^k,\quad \text{即}\quad (n-2)(n-3)=2\times 3^k\ .$$

设 $n-2=2\times 3^{k_1}$，$n-3=3^{k_2}$，$k_1\ge k_2$，则 $2\times 3^{k_1}-3^{k_2}=1$，于是

$3^{k_2}(2\times 3^{k_1-k_2}-1)=1$，得 $3^{k_2}=1$，$2\times 3^{k_1-k_2}-1=1$，因此 $k_2=0$，$k_1=0$．

这与 $k\ge 1$ 矛盾．

设 $n-2=3^{k_1}$，$n-3=2\times 3^{k_2}$，$k_1\ge k_2+1$，则 $3^{k_1}-2\times 3^{k_2}=1$，于是

$3^{k_2}(3^{k_1-k_2}-2)=1$，得 $3^{k_2}=1$，$3^{k_1-k_2}-2=1$，因此 $k_2=0$，$k_1=1$，$n=5$．

此时，若 5 人中每两人之间都通话一次，则其中任意 3 个人之间通话的总次数为 3^1 次

综上所述，$n=5$ 为 n 的所有可能值．