1993年全国高中数学联合竞赛试卷

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

1．若 $M=\{(x, y)\mid |\tan\pi xy|+\sin^2\pi xy=0\}$，$N=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　　）

(A)4　　(B)5　　(C)8　　(D)9

2．已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（$a$，$b$ 为实数），且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是（　　）

(A)-5　　(B)-3　　(C)3　　(D)随 a，b 取不同值而取不同值

3．集合 A，B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A, B) 与 (B, A) 视为不同的对，则这样的 (A, B) 对的个数是（　　）

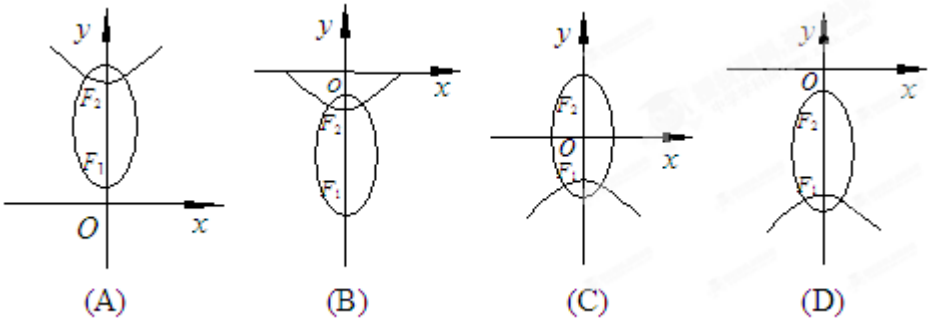
(A) 8　　(B) 9　　(C) 26　　(D) 27

4．若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 $C:(x-\arcsin a)(x-\arccos a)+(y-\arcsin a)(y+\arccos a)=0$ 所截的弦长为 d，当 a 变化时 d 的最小值是（　　）

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

5．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边长分别为 a，b，c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$ 的值是（　　）

(A)1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D)-1



6．设 m，n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程 $|z+ni|+|z-mi|=n$ 与 $|z+ni|-|z-mi|=-m$ 在同一复平面内的图形(F_1，F_2 为焦点)是（　　）

二、填空题（每小题5分，共30分）

1．二次方程 $(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$（$i$ 为虚数单位，$\lambda\in R$）有两个虚根的充分必要条

件是λ的取值范围为_____.

2. 实数 x，y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则 $\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=$_____.

3. 若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\frac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，则 z 的值是_____.

4. 整数 $\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$ 的末两位数是_____.

5. 设任意实数 $x_3>x_2>x_1>x_0>0$，要使 $\log_{\frac{x_3}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_3}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_3}{x_3}}1993\geq k\cdot\log_{\frac{x_3}{x_0}}1993$ 恒成立，则 k 的最大值是_____.

6. 三位数(100，101，…，999)共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印[133]个三位数，有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861；有的卡片则不然，如 531 倒过来看是　，因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印_____张卡片.

三、(本题满分 20 分)

三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为三角形 ABC 的重心，D 为 AB 的中点，作与 SC 平行的直线 DP. 证明：(1) DP 与 SM 相交；(2) 设 DP 与 SM 的交点为 D，则 D 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心.

四、(本题满分 20 分)

设 $0<a<b$，过两定点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$ 分别引直线 l 和 m，使与抛物线 $y^2=x$ 有四个不同的交点，当这四点共圆时，求这种直线 l 与 m 的交点 P 的轨迹.

五、(本题满分 20 分)

设正数列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，…满足 $\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$，$(n\geq 2)$ 且 $a_0=a_1=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

第二试

一、（35 分）

设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有 $\angle D$ 是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成 n 个钝角三角形，但除去 A、B、C、D 外，在该四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点．试证 n 应满足的充分必要条件是 $n\geqslant 4$.

二、（35 分）

设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含.

试证：(1) $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$；

(2) $\sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$. 其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数.

三、（35 分）

水平直线 m 通过圆 O 的中心，直线 $l \perp m$，l 与 m 相交于 M，点 M 在圆心的右侧，直线 l 上不同的三点 A, B, C 在圆外，且位于直线 m 上方，A 点离 M 点最远，C 点离 M 点最近，AP, BQ, CR 为圆 O 的三条切线，P, Q, R 为切点．试证：(1) l 与圆 O 相切时，$AB\times CR+BC\times AP=AC\times BQ$；(2) l 与圆 O 相交时，$AB\times CR+BC\times AP<AC\times BQ$；(3) l 与圆 O 相离时，$AB\times CR+BC\times AP>AC\times BQ$.

1993年全国高中数学联合竞赛解答

第一试

一、选择题(每小题5分，共30分)

1. 若 $M=\{(x, y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　　）

(A) 4　　(B) 5　　(C) 8　　(D) 9

【答案】D

【解析】$\tan\pi y=0$，$y=k(k\in Z)$，$\sin^2\pi x=0$，$x=m(m\in Z)$，即圆 $x^2+y^2=2$ 及圆内的整点数．共9个．选 D.

2. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（$a$，$b$ 为实数），且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是（　　）

(A) -5　　(B) -3　　(C) 3　　(D) 随 a，b 取不同值而取不同值

【答案】C

【解析】设 $\lg\log_3 10=m$，则 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10=-m$，则 $f(m)=a\sin m+b\sqrt[3]{m}+4=5$，即

$$a\sin m+b\sqrt[3]{m}=1.$$

$\therefore f(-m)=-(a\sin m+b\sqrt[3]{m})+4=-1+4=3$．选 C.

3. 集合 A，B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A, B) 与 (B, A) 视为不同的对，则这样的 (A, B) 对的个数是（　　）

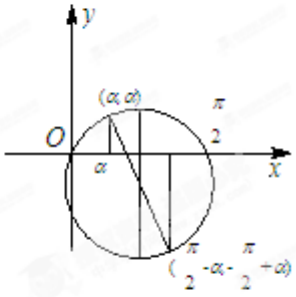
(A) 8　　(B) 9　　(C) 26　　(D) 27

【答案】D

【解析】$a_1\in A$ 或 $\notin A$，有2种可能，同样 $a_1\in B$ 或 $\notin B$，有2种可能，但 $a_1\notin A$ 与 $a_1\notin B$ 不能同时成立，故有 2^2-1 种安排方式，同样 a_2、a_3 也各有 2^2-1 种安排方式，故共有 $(2^2-1)^3$ 种安排方式．选 D.

4. 若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 $C:(x-\arcsin\alpha)(x-\arccos\alpha)+(y-\arcsin\alpha)(y+\arccos\alpha)=0$ 所截的弦长为 d，当 α 变化时 d 的最小值是（　　）

$(A)\ \frac{\pi}{4}$　　$(B)\ \frac{\pi}{3}$　　$(C)\ \frac{\pi}{2}$　　$(D)\ \pi$



【答案】C

【解析】曲线 C 表示以 $(\arcsin\alpha,\ \arcsin\alpha)$，$(\arccos\alpha,\ -\arccos\alpha)$ 为直径端点的圆. 即以 $(\sigma,\ \sigma)$ 及 $(\frac{\pi}{2}-\sigma,\ -\frac{\pi}{2}+\sigma)$ $(\sigma\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}])$ 为直径端点的圆. 而 $x=\frac{\pi}{4}$ 与圆交于圆的直径. 故 $d=\sqrt{(2\sigma-\frac{\pi}{2})^2+(\frac{\pi}{2})^2}\geqslant\frac{\pi}{2}$.

故选 C.

5. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边长分别为 a，b，c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$ 的值是（　　）

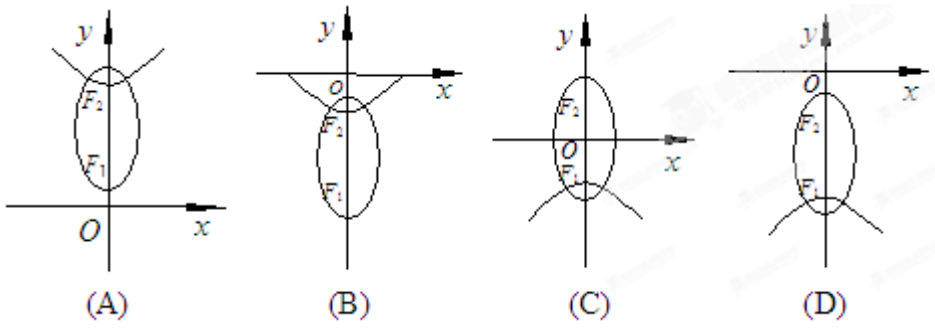
$(A)\ 1$　　$(B)\ \frac{1}{2}$　　$(C)\ \frac{1}{3}$　　$(D)\ -1$

【答案】A

【解析】$2R(\sin C-\sin A)=c\sin A=2R\sin C\sin A$，$\Rightarrow\sin C-\sin A=\sin C\sin A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(C+A)-\cos(C-A)]=\frac{1}{2}[1-2\sin^2\frac{C-A}{2}-2\cos^2\frac{C+A}{2}+1]$.

$\Rightarrow(\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2})^2=1$，但 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}>0$，故选 A.



6. 设 m，n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程 $|z+ni|+|z-mi|=n$ 与 $|z+ni|-|z-mi|=-m$ 在同一复平面内的图形（F_1，F_2 为焦点）是（　　）

【答案】B

【解析】方程①为椭圆，②为双曲线的一支. 二者的焦点均为 $(-ni,\ mi)$，由①$n>0$，

故否定 A，

由于 n 为椭圆的长轴，而 C 中两个焦点与原点距离(分别表示$|n|$、$|m|$)均小于椭圆长轴，故否定 C.

由 B 与 D 知，椭圆的两个个焦点都在 y 轴负半轴上，由 n 为长轴，知$|OF_1|=n$，于是 $m<0$，$|OF_2|=-m$. 曲线上一点到 $-ni$ 距离大，否定 D，故选 B.

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 二次方程$(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$($i$ 为虚数单位，$\lambda\in R$)有两个虚根的充分必要条件是λ的取值范围为_____.

【答案】 $\lambda\neq 2$.

【解析】即此方程没有实根的条件. 当 $\lambda\in R$时，此方程有两个复数根，若其有实根，则

$x^2+\lambda x+1=0$，且 $x^2-x-\lambda=0$. 相减得$(\lambda+1)(x+1)=0$.

当 $\lambda=-1$时，此二方程相同，且有两个虚根. 故 $\lambda=-1$ 在取值范围内.

当 $\lambda\neq -1$时，$x=-1$，代入得 $\lambda=2$. 即 $\lambda=2$ 时，原方程有实根 $x=-1$. 故所求范围是 $\lambda\neq 2$.

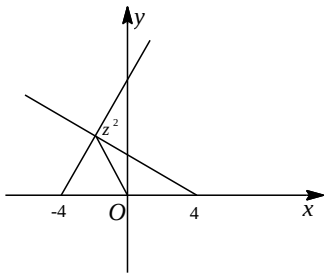
2. 实数 x，y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则$\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=$_____.

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 $S=r^2$得 $r^2(4-5\sin\theta\cos\theta)=5$. $S=\dfrac{5}{4-\frac{5}{2}\sin 2\theta}$.

$\therefore \frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=\frac{4+\frac{5}{2}}{5}+\frac{4-\frac{5}{2}}{5}=\frac{8}{5}$.

3. 若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\frac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，则 z 的值是_____.



【答案】$\pm(1+\sqrt{3}i)$

【解析】如图，可知 z^2 表示复数 $4(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$. $\therefore$ $z=\pm 2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)=\pm(1+\sqrt{3}i)$.

4．整数$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末两位数是_____.

【答案】08

【解析】令$x=10^{31}$，则得$\frac{x^3}{x+3}=\frac{x^3+27-27}{x+3}=x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}$．由于$0<\frac{27}{x+3}<1$，故所求末两位数字为09－1=08.

5．设任意实数$x_0>x_1>x_2>x_3>0$，要使$\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993\geqslant k\cdot\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$恒成立，则$k$的最大值是_____.

【答案】9

【解析】显然$\frac{x_0}{x_3}>1$，从而$\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993>0$.即$\frac{1}{\lg x_0-\lg x_1}+\frac{1}{\lg x_1-\lg x_2}+\frac{1}{\lg x_2-\lg x_3}\geqslant\frac{k}{\lg x_0-\lg x_3}$.

就是$[(\lg x_0-\lg x_1)+(\lg x_1-\lg x_2)+(\lg x_2-\lg x_3)]\left(\frac{1}{\lg x_0-\lg x_1}+\frac{1}{\lg x_1-\lg x_2}+\frac{1}{\lg x_2-\lg x_3}\right)\geqslant k$.

其中$\lg x_0-\lg x_1>0$，$\lg x_1-\lg x_2>0$，$\lg x_2-\lg x_3>0$，由*Cauchy*不等式，知$k\leqslant 9$．即k的最大值为9.

6．三位数(100，101，…，999)共900个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印一个三位数，有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如198倒过来看是861；有的卡片则不然，如531倒过来看是 ，因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印_____张卡片.



【答案】34

【解析】首位与末位各可选择1，6，8，9，有4种选择，十位还可选0，有5种选择，共有4×5×4=80种选择.

但两端为1，8，中间为0，1，8时，或两端为9、6，中间为0，1，8时，倒后不变；共有2×3+2×3=12个，故共有(80－12)÷2=34个.

三、(本题满分20分)

三棱锥*S*-*ABC*中，侧棱*SA*、*SB*、*SC*两两互相垂直，*M*为三角形*ABC*的重心，*D*为*AB*的中点，作与*SC*平行的直线*DP*．证明：(1)*DP*与*SM*相交；(2)设*DP*与*SM*的交点为D'，则D'

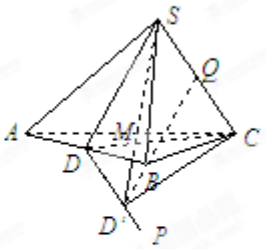
为三棱锥 $S—ABC$ 的外接球球心.

【解析】(1) 证明：∵ $DP \parallel SC$，故 DP、CS 共面.

∴ $DC \subseteq$ 面 DPC，

∵ $M \in DC$，$\Rightarrow M \in$ 面 DPC，$SM \subseteq$ 面 DPC.

∵ 在面 DPC 内 SM 与 SC 相交，故直线 SM 与 DP 相交.



(2) ∵ SA、SB、SC 两两互相垂直，∴ $SC \perp$ 面 SAB，$SC \perp SD$.

∵ $DP \parallel SC$，∴ $DP \perp SD$. $\triangle DD'M \backsim \triangle CSM$.

∵ M 为 $\triangle ABC$ 的重心，∴ $DM : MC = 1 : 2$. ∴ $DD' : SC = 1 : 2$.

取 SC 中点 Q，连 $D'Q$. 则 $SQ = DD'$，$\Rightarrow$ 平面四边形 $DD'QS$ 是矩形.

∴ $D'Q \perp SC$，由三线合一定理，知 $D'C = PS$.

同理，$D'A = D'B = D'B = D'S$. 即以 D' 为球心 $D'S$ 为半径作球 D'. 则 A、B、C 均在此球上. 即 D' 为三棱锥 $S—ABC$ 的外接球球心.

四、(本题满分 20 分)

设 $0<a<b$，过两定点 $A(a, 0)$ 和 $B(b, 0)$ 分别引直线 l 和 m，使与抛物线 $y^2=x$ 有四个不同的交点，当这四点共圆时，求这种直线 l 与 m 的交点 P 的轨迹.

【解析】设 l：$y=k_1(x-a)$，m：$y=k_2(x-b)$. 于是 l、m 可写为 $(k_1x-y-k_1a)(k_2x-y-k_2b)=0$.

∴ 交点满足 $\begin{cases} y^2=x, \\ (k_1x-y-k_1a)(k_2x-y-k_2b)=0. \end{cases}$

若四个交点共圆，则此圆可写为 $(k_1x-y-k_1a)(k_2x-y-k_2b)+\lambda(y^2-x)=0$.

此方程中 xy 项必为 0，故得 $k_1=-k_2$，设 $k_1=-k_2=k\neq 0$.

于是 l、m 方程分别为 $y=k(x-a)$ 与 $y=-k(x-b)$.

消去 k，得 $2x-(a+b)=0$，$(y\neq 0)$ 即为所求轨迹方程.

五、(本题满分 20 分)

设正数列 a_0、a_1、a_2、…、a_n、…满足

$$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1},\ (n\geqslant 2)$$

且 $a_0=a_1=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】变形，同除以 $\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ 得：$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}+1$，

令$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}+1=b_n$，则得 $b_n=2b_{n-1}$.

即$\{b_n\}$是以 $b_1=\sqrt{\frac{1}{1}}+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列.

∴ $b_n=2^n$.

∴ $\frac{a_n}{a_{n-1}}=(2^n-1)^2$. 故

∴ $\begin{cases} a_0=1, \\ a_n=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2\cdots(2^1-1)^2. \ (n\geqslant 1) \end{cases}$

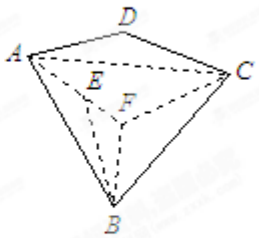
第二试

一、(35 分)

设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有$\angle D$是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成 n 个钝角三角形，但除去 A、B、C、D外，在该四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点. 试证 n 应满足的充分必要条件是 $n\geqslant 4$.

【解析】证明 充分性

(1)当 $n=4$ 时，如图，只要连 AC，并在$\triangle ABC$内取一点 F，使$\angle AFB$、$\angle BFC$、$\angle CFA$都为钝角(例如，可以取$\triangle ABC$的 Fermat 点，由于$\triangle ABC$是锐角三角形，故其 Fermat 点在其形内). 于是，$\triangle ADC$、$\triangle AFB$、$\triangle BFC$、$\triangle AFC$都是钝角三角形.



(2)当 $n=5$ 时，可用上法把凸四边形分成四个钝角三角形. 再在 AF 上任取一点 E，连 EB，则$\triangle AEB$也是钝角三角形，这样就得到了 5 个钝角三角形.

一般的，由(1)得到了 4 个钝角三角形后，只要在 AF 上再取 $n-4$ 个点 E_1、E_2、$\cdots E_{n-4}$，把这些点与 B连起来，即可得到均是钝角三角形的 n个三角形.

必要性

$n=2$ 时，连 1 条对角线把四边形分成了 2 个三角形，但其中最多只能有 1 个钝角三角形.

$n=3$ 时，无法从同一顶点出发连线段把四边形分成 3 个三角形，现连了 1 条对角线 AC 后，再连 B与 AC上某点得到线段，此时无法使得到的两个三角形都是钝角三角形.

∴当 $n=2$，3 时无法得到满足题目要求的解. 只有当 $n\geqslant 4$ 时才有解.

二、(35 分)

设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含.

试证：(1) $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$；

(2) $\sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$. 其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数.

【解析】证明：(1) 即证：若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，则 $k_1!(n-k_1)!+k_2!(n-k_2)!+\cdots+k_m!(n-k_m)! \leqslant n!$.

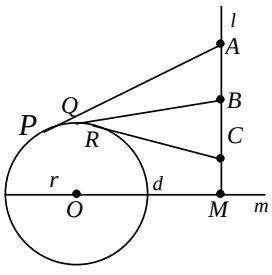
由于 $n!$ 表示 n 个元素的全排列数，而 $k_i!(n-k_i)!$ 表示先在这 n 个元素中取出 k_i 个元素排列再把其其余元素排列的方法数，由于 A_i 互不包含，故 $n! \geqslant k_1!(n-k_1)!+k_2!(n-k_2)!+\cdots+k_m!(n-k_m)!$ 成立.

(2) $\because \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|}\right) \geqslant (1+1+1+\cdots+1)^2=m^2$.

但 $0<\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$，故 $\sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$.

三、(35 分)

水平直线 m 通过圆 O 的中心，直线 $l \perp m$，l 与 m 相交于 M，点 M 在圆心的右侧，直线 l 上不同的三点 A, B, C 在圆外，且位于直线 m 上方，A 点离 M 点最远，C 点离 M 点最近，AP, BQ, CR 为圆 O 的三条切线，P, Q, R 为切点. 试证：(1) l 与圆 O 相切时，$AB\times CR+BC\times AP=AC\times BQ$；(2) l 与圆 O 相交时，$AB\times CR+BC\times AP<AC\times BQ$；(3) l 与圆 O 相离时，$AB\times CR+BC\times AP>AC\times BQ$.



【解析】证明：设 $MA=a$，$MB=b$，$MC=c$，$OM=d$，$\odot O$ 的半径 $=r$.

且设 $k=d^2-r^2$. 则当 $k>0$ 时，点 M 在 $\odot O$ 外，此时，直线 l 与 $\odot O$ 相离；

当 $k=0$ 时，点 M 在 $\odot O$ 上，此时，直线 l 与 $\odot O$ 相切；

当 $k<0$ 时，点 M 在 $\odot O$ 内，此时，直线 l 与 $\odot O$ 相交.

$\therefore AP=\sqrt{a^2+d^2-r^2}=\sqrt{a^2+k}$，同理，$BQ=\sqrt{b^2+k}$，$CR=\sqrt{c^2+k}$.

则 $AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ=AB\times CR+BC\times AP-(AB+BC)\times BQ=BC\times(AP-BQ)-AB\times(BQ-CR)$

$$=BC\times\frac{AP^2-BQ^2}{AP+BQ}-AB\times\frac{BQ^2-CR^2}{BQ+CR}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(a+b)}{AP+BQ}-\frac{(a-b)(b-c)(b+c)}{BQ+CR}$$

$$=(a-b)(b-c)\left(\frac{a+b}{AP+BQ}-\frac{b+c}{BQ+CR}\right)$$

$$=(a-b)(b-c)\frac{a\cdot BQ+a\cdot CR+b\cdot CR-b\cdot AP-c\cdot AP-c\cdot BQ}{(AP+BQ)(BQ+CR)}.$$

注意到 $aBQ-bAP=\frac{a^2\cdot BQ^2-b^2\cdot AP^2}{b\cdot AP+a\cdot BQ}=\frac{(a^2-b^2)k}{b\cdot AP+a\cdot BQ}$

故 $k>0$ 时，$aBQ-bAP>0$，$k=0$ 时，$aBQ-bAP=0$，$k<0$ 时，$aBQ-bAP<0$；

同理可得，$k>0$ 时，$bCR-cBQ>0$，$k=0$ 时，$bCR-cBQ=0$，$k<0$ 时，$bCR-cBQ<0$；

$k>0$ 时，$aCR-cAP>0$，$k=0$ 时，$aCR-cAP=0$，$k<0$ 时，$aCR-cAP<0$；

即当 $k>0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ>0$；

当 $k=0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ=0$，

当 $k<0$ 时，$AB\times CR+BC\times AP-AC\times BQ<0$. 故证.