1986年全国高中数学联赛试题

第一试

1. 选择题(本题满分42分，每小题7分，每小题答对得7分，答错得0分不答得1分)

(1) 设$-1<a<0$，$\theta=\arcsin a$，那么不等式$\sin x<a$的解集为(　　)

A. $\{x|2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta, n\in Z\}$　　B. $\{x|2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta, n\in Z\}$

C. $\{x|(2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta, n\in Z\}$　　D. $\{x|2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta, n\in Z\}$

(2) 设x为复数，$M=\{z|(z-1)^2=|z-1|^2\}$，那么(　　)

A. $M=${纯虚数}　　B. $M=${实数}　　C. {实数}$\subsetneq M\subsetneq$ {复数}　　D. $M=${复数}

(3) 设实数a、b、c满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0,\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0.\end{cases}$$

那么，a的取值范围是(　　)

A. $(-\infty, +\infty)$　　B. $(-\infty, 1]\cup[9, +\infty)$　　C. $(0, 7)$　　D. $[1, 9]$

(4) 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱的条数最少为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(5) 平面上有一个点集和七个不同的圆C_1，C_2，…，C_7，其中圆C_1恰好经过M中的7个点，圆C_2恰好经过M中的6个点，…，圆C_7恰好经过M中的1个点，那么M中的点数最少为(　　)

A. 11　　B. 12　　C. 21　　D. 28

(6) 边长为a、b、c的三角形，其面积等于$\frac{1}{4}$，而外接圆半径为1，若

$$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\quad t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

则s与t的大小关系是

A. $s>t$　　B. $s=t$　　C. $s<t$　　D. 不确定

2. 填空题(本题满分28分，每小题7分)：

本题共有4个小题，每小题的答案都是000到999的某一个整数，请把你认为正确的答案填在____上.

(1) 在底面半径为6的圆柱内，有两个半径也为6的球面，其球心距为13，若作一平面与这二球面相切，且与圆柱面交成一个椭圆，则这个椭圆的长轴长与短轴长之和是_____.

(2) 已知$f(x)=|1-2x|$，$x\in[0, 1]$，那么方程

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$$

的解的个数是_____.

(3)设　$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，那么和式　$f(\frac{1}{1001})+f(\frac{2}{1001})+f(\frac{3}{1001})+\cdots+f(\frac{1000}{1001})$的值等于_____；

⑷设 x、y、z 为非负实数，且满足方程 $4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0$，那么 $x+y+z$ 的最大值与最小值的乘积等于_____.

第二试

1．(本题满分17分)已知实数列 a_0，a_1，a_2，…，满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i,\ (i=1,2,3,\cdots)$$

求证：对于任何自然数 n，

$$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$$

是一次多项式．(本题应增加条件：$a_0\neq a_1$)

2．(本题满分17分)已知锐角三角形 ABC 的外接圆半径为 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，求证：AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE).$$

式中 S 是三角形 ABC 的面积．

3．平面直角坐标系中，纵横坐标都是整数的点称为整点，请设计一种染色方法将所有的整点都染色，每一个整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得

(1) 每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

(2) 对任意白色 A、红点 B 和黑点 C，总可以找到一个红点 D，使得 $ABCD$ 为一平行四边形．

证明你设计的方法符合上述要求．

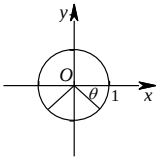
1986年全国高中数学联赛解答

第一试

1. 选择题(本题满分42分，每小题7分，每小题答对得7分，答错得0分不答得1分)

(1) 设$-1<a<0$，$\theta=\arcsin a$，那么不等式$\sin x<a$的解集为(　　)

A. $\{x|2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta, n\in Z\}$　　B. $\{x|2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta, n\in Z\}$



C. $\{x|(2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta, n\in Z\}$　　D. $\{x|(2n-1)\pi-\theta<x<2n\pi+\theta, n\in Z\}$

【答案】D

【解析】$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$，在$(-\pi, 0)$内满足$\sin x<a$的角为$-\pi-\theta<x<\theta$，由单位圆易得解为D.

(2) 设x为复数，$M=\{x|(x-1)^2=|x-1|^2\}$，那么(　　)

A. $M=$[纯虚数]　　B. $M=$[实数]　　C. [实数]$\subsetneq M\subsetneq$[复数]　　D. $M=$[复数]

【答案】B

【解析】即$(x-1)^2-(x-1)(\overline{x}-1)=0$，$\Rightarrow(x-1)(x-\overline{x})=0$，$\Rightarrow x=1$或$x=\overline{x}$，总之，$x$为实数. 选B

(3) 设实数a、b、c满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0,\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0.\end{cases}$$

那么，a的取值范围是(　　)

A. $(-\infty, +\infty)$　　B. $(-\infty, 1]\cup[9, +\infty)$　　C. $(0, 7)$　　D. $[1, 9]$

【答案】D

【解析】①×3+②：$b^2+c^2-2bc+3a^2-30a+27=0$，$\Rightarrow(b-c)^2+3(a-1)(a-9)=0$，$\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 9$. 选D.

$b^2+c^2+2bc-a^2+2a-1=0$，$(b+c)^2=(a-1)^2$，$\Rightarrow b+c=a-1$，或$b+c=-a+1$.

(4) 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱的条数最少为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】A

【解析】取等腰四面体，其棱长至多2种长度. 棱长少于3时，必出现等腰三角形. 选A.

(5) 平面上有一个点集和七个不同的圆C_1，C_2，…，C_7，其中圆C_1恰好经过M中的7个点，圆C_2恰好经过M中的6个点，…，圆C_7恰好经过M中的1个点，那么M中的点数最少为(　　)

A. 11　　B. 12　　C. 21　　D. 28

【答案】B

【解析】首先，C_1经过M中7个点，C_2与C_1至多2个公共点，故C_2中至少另有4个M中的点，C_3至少经过M中另外1个点，共有至少7+4+1=12个点.

(6) 边长为 a、b、c 的三角形，其面积等于$\frac{1}{4}$，而外接圆半径为 1，若

$$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\quad t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

则 s 与 t 的大小关系是

A. $s>t$　　B. $s=t$　　C. $s<t$　　D. 不确定

【答案】C

【解析】$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$，由 $R=1$，$\triangle=\frac{1}{4}$，知 $abc=1$．且三角形不是等边三角形．

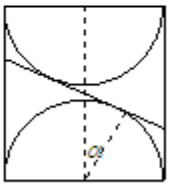
$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$（等号不成立）．选 C.

2．填空题(本题满分 28 分，每小题 7 分)：

本题共有 4 个小题，每小题的答案都是 000 到 999 的某一个整数，请把你认为正确的答案填在____上．

(1) 在底面半径为 6 的圆柱内，有两个半径也为 6 的球面，其球心距为 13，若作一平面与这二球面相切，且与圆柱面交成一个椭圆，则这个椭圆的长轴长与短轴长之和是_____．

【答案】25



【解析】易得 $\cos\alpha=\frac{6}{6.5}=\frac{12}{13}$，于是椭圆长轴=13，短轴=12．所求和=25.

(2) 已知 $f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，那么方程

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$$ 的解的个数是_____．

【答案】8

【解析】$f(f(x))=|1-2|1-2x||=\begin{cases}1-4x, & (0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4})\\ 4x-1, & (\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2})\\ 3-4x, & (\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4})\\ 4x-3, & (\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

同样 $f(f(f(x)))$的图象为 8 条线段，其斜率分别为±8，夹在 $y=0$ 与 $y=1$，$x=0$，$x=1$ 之内．它们各与线段 $y=\frac{1}{2}x$ $(0\leqslant x\leqslant1)$有 1 个交点．故本题共计 8 解.

(3) 设 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，那么和式 $f(\frac{1}{1001})+f(\frac{2}{1001})+f(\frac{3}{1001})+\cdots+f(\frac{1000}{1001})$ 的值等于_____；

【答案】500

【解析】 $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\times4^x}=1.$　　(1)

以 $x=\frac{1}{1001}$，$\frac{2}{1001}$，$\frac{3}{1001}$，…，$\frac{500}{1001}$代入(1)式，即得所求和=500.

(4) 设 x、y、z 为非负实数，且满足方程 $4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0$，那么 $x+y+z$ 的最大值与最小值的乘积等于_____；

【答案】4

【解析】令 $2^{\sqrt{5x+9y+4z}}=t$，则得，$t^2-68t+256=0$，$\Rightarrow(t-64)(t-4)=0$，$\Rightarrow t=4$，$t=64$.

$\sqrt{5x+9y+4z}=2\Rightarrow5x+9y+4z=4$，$\Rightarrow9(x+y+z)=4+4x+5z\geq4$，$x+y+z\geq\frac{4}{9}$;

$4(x+y+z)=4-x-5y\leq4$，$x+y+z\leq1\Rightarrow x+y+z\in[\frac{4}{9},1]$;

$\sqrt{5x+9y+4z}=6\Rightarrow5x+9y+4z=36$，$\Rightarrow9(x+y+z)=36+4x+5z\geq36$，$\Rightarrow x+y+z\geq4$;

$4(x+y+z)=36-x-5y\leq36$，$\Rightarrow x+y+z\leq9$.

故，所求最大值与最小值的乘积$=\frac{4}{9}\times9=4$.

第二试

1. (本题满分 17 分)已知实数列 a_0，a_1，a_2，…，满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i,\ (i=1,2,3,\cdots)$$

求证：对于任何自然数 n，

$$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$$

是一次多项式.

(本题应增加条件：$a_0\neq a_1$)

【解析】证明：由已知，得 $a_{i+1}-a_i=a_i-a_{i-1}$，$\Rightarrow$故$\{a_i\}$是等差数列. 设 $a_i-a_{i-1}=d\neq0$. 则 $a_k=a_0+kd$.

于是 $P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$

$=a_0C_n^0(1-x)^n+(a_0+d)C_n^1x(1-x)^{n-1}+(a_0+2d)C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+(a_0+(n-1)d)C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+(a_0+nd)C_n^nx^n$

$=a_0[C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+C_n^nx^n]$

$+d[C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+nC_n^nx^n]$　(由 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$)

$=a_0(1-x+x)^n+ndx[C_{n-1}^0(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}x^{n-2}(1-x)+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]$

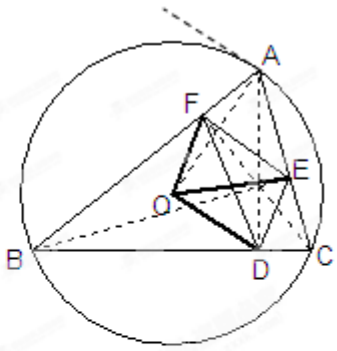
$=a_0+ndx(1-x+x)^{n-1}=a_0+ndx=a_0+(a_n-a_0)x$.

此为一次多项式. 证毕.

2．(本题满分 17 分)已知锐角三角形 ABC 的外接圆半径为 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，求证：AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE).$$

式中 S 是三角形 ABC 的面积.



【解析】证明：连 OA，则由 C、E、F、B 四点共圆，得 $\angle AFE=\angle C$，又在 $\triangle OAB$ 中，$\angle OAF=(180°-2\angle C)/2=90°-\angle C$，$\therefore OA\perp EF$.

$\therefore\quad S_{\triangle AEF}=EF\cdot\frac{OA}{2}=\frac{R}{2}\cdot EF$，

同理，$S_{\triangle BDF}=\frac{R}{2}\cdot DF$，$S_{\triangle CDE}=\frac{R}{2}\cdot DE$，故得 $S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

反之，由 $S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$. 得 $OA\perp EF$，$OB\perp FD$，$OC\perp ED$，

否则 $S<\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

过 A 作 $\odot O$ 的切线 AT，则 $\angle AFE=\angle TAF=\angle ACB$，$\Rightarrow B$、$F$、$E$、$D$ 共圆，

同理，A、F、D、C 共圆，A、E、D、B 共圆. $\Rightarrow\angle AFC=\angle ADC$，$\angle AEB=\angle ADB$.

$\therefore\ \angle AFC+\angle AEB=\angle ADC+\angle ADB=180°$. 但 $\angle BFC=\angle BEC$，即 $\angle AFC=\angle AEB=90°$，于是 F、E 为垂足，同理 D 为垂足. 故证.

3．(本题 16 分)平面直角坐标系中，纵横坐标都是整数的点称为整点，请设计一种染色方法将所有的整点都染色，每一个整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得

(1) 每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

(2) 对任意白色 A、红点 B 和黑点 C，总可以找到一个红点 D，使得 $ABCD$ 为一平行四边形.

证明你设计的方法符合上述要求.

【解析】证明：设任一点的坐标为 $(x,\ y)$，把 $x+y\equiv1\pmod4$ 的点染白，$x+y\equiv3\pmod4$ 的点染黑，$x+y\equiv0$ 或 $2\pmod4$ 的点染红.

显然，这样染色的点满足要求.

首先，每条平行于 x 轴的直线上都有三种颜色的点. 即每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；其次，对于任一白点 $A(x_1,\ y_1)$，任一红点 $B(x_2,\ y_2)$，与任一黑点 $C(x_3,\ y_3)$，当点 $D(x_4,\ y_4)$ 与之组成平行四边形时，有 $x_1+x_3=x_2+x_4$，$y_1+y_3=y_2+y_4$. 而 $x_1+y_1+x_3+y_3\equiv0\pmod4$，于是 $x_2+y_2+x_4+y_4\equiv0\pmod4$，

故 $x_4+y_3\equiv0$(当 $x_2+y_2\equiv0$ 时)或 2(当 $x_2+y_2\equiv2$ 时)$\pmod4$. 即点 D 为红点.