1983年全国高中数学联赛

第一试

1．选择题(本题满分32分，每题答对者得4分，答错者得0分，不答得1分)

(1) 设p、q是自然数，条件甲：p^3-q^3是偶数；条件乙：$p+q$是偶数．那么

A. 甲是乙的充分而非必要条件　　B. 甲是乙的必要而非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

(2) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$的值是属于区间

A. $(-2,-1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-3,-2)$　　D. $(2,3)$

(3) 已知等腰三角形ABC的底边BC及高AD的长都是整数，那么，$\sin A$和$\cos A$中

A. 一个是有理数，另一个是无理数　　B. 两个都是有理数

C. 两个都是无理数　　D. 是有理数还是无理数要根据BC和AD的数值来确定

(4) 已知$M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使$M\cap N=N$成立的充要条件是

A. $a\geqslant 1\frac{1}{4}$　　B. $a=1\frac{1}{4}$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $0<a<1$

(5) 已知函数$f(x)=ax^2-c$，满足

$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5.$$

那么，$f(3)$应满足

A. $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　B. $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$　　C. $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　D. $-\dfrac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant\dfrac{35}{3}$

(6) 设a，b，c，d，m，n都是正实数，

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，那么

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P<Q$　　D. P、Q的大小关系不确定，而与m，n的大小有关．

(7) 在正方形$ABCD$所在平面上有点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$都是等腰三角形，那么具有这样性质的点P的个数有

A. 9个　　B. 17个　　C. 1个　　D. 5个

(8) 任意$\triangle ABC$，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为l、R与r，那么

A. $l>R+r$　　B. $l\leqslant R+r$　　C. $\dfrac{l}{6}<R+r<6l$　　D. A、B、C三种关系都不对

2．填充题(本题满分18分，每小题6分)

(1) 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$，那么$\cos C$的值等于_____.

⑵ 三边均为整数，且最大边长为 11 的三角形，共有_____个.

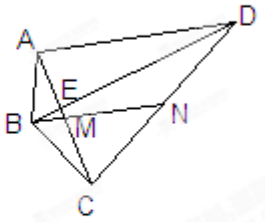
⑶ 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$，那么积 $m\cdot n$ 是_____.

第二试

1. (本题满分 8 分)求证：arc sin$x$+arc cos$x$=$\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1,1]$

2. (本题满分 16 分)函数 $f(x)$在[0，1]上有定义，$f(0)=f(1)$．如果对于任意不同的 x_1，$x_2\in[0,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$．求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$．

3. (本题满分 16 分) 在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 3∶4∶1，点 M、N 分别在 AC、CD 上满足 $AM∶AC=CN∶CD$，并且 B、M、N 三点共线．求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点．



4. (本题满分 16 分)在在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大体积是多少？证明你的结论．

5. (本题满分 18 分) 函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论．

1983年全国高中数学联赛解答

第一试

1．选择题(本题满分32分，每题答对者得4分，答错者得0分，不答得1分)

(1) 设p、q是自然数，条件甲：p^3-q^3是偶数；条件乙：$p+q$是偶数．那么

A．甲是乙的充分而非必要条件　　B．甲是乙的必要而非充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】$p^3-q^3=(p-q)(p^2+pq+q^2)$．又$p+q=p-q+2q$，故$p+q$与$p-q$的奇偶性相同．

∴ $p+q$为偶数，$\Rightarrow p-q$为偶数，$\Rightarrow p^3-q^3$为偶数．

$p+q$为奇数，$\Rightarrow p$、q一奇一偶，$\Rightarrow p^3-q^3$为奇数．故选C．

(2) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$的值是属于区间

A．$(-2,-1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(-3,-2)$　　D．$(2,3)$

【答案】D

【解析】$x=\log_32+\log_35=\log_310\in(2,3)$，选D．

(3) 已知等腰三角形ABC的底边BC及高AD的长都是整数，那么，$\sin A$和$\cos A$中

A．一个是有理数，另一个是无理数　　B．两个都是有理数

C．两个都是无理数　　D．是有理数还是无理数要根据BC和AD的数值来确定

【答案】B

【解析】$\tan\dfrac{A}{2}$为有理数，$\Rightarrow\sin A$、$\cos A$都是有理数．选B．

(4) 已知$M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使$M\cap N=N$成立的充要条件是

A．$a\geqslant 1\dfrac{1}{4}$　　B．$a=1\dfrac{1}{4}$　　C．$a\geqslant 1$　　D．$0<a<1$

【答案】A

【解析】$M\cap N=N$的充要条件是圆$x^2+(y-a)^2\leqslant 1$在抛物线$y=x^2$内部(上方)．即$a\geqslant 1$，且方程

$$y^2-(2a-1)y+a^2-1=0\text{的}\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0,\ \Rightarrow a\geqslant 1\frac{1}{4},\text{选}A.$$

(5) 已知函数$f(x)=ax^2-c$，满足

$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5.$$

那么，$f(3)$应满足

A. $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　B. $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$　　C. $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　D. $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{35}{3}$

【答案】C

【解析】$f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，$f(3)=9a-c$. 令 $9a-c=\lambda(a-c)+\mu(4a-c)$，

$\therefore\ \lambda+4\mu=9$，$\lambda+\mu=1$. $\therefore\ \lambda=-\frac{5}{3}$，$\mu=\frac{8}{3}$. 即 $f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)$.

但 $\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{40}{3}$，$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$，

$\therefore -1\leqslant-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)\leqslant 20$.. 选 C.

(6) 设 a，b，c，d，m，n 都是正实数，

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P<Q$　　D. P、Q 的大小关系不确定，而与 m，n 的大小有关.

【答案】B

【解析】由柯西不等式，$Q\geqslant P$. 选 B.

(7) 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使△PAB、△PBC、△PCD、△PDA 都是等腰三角形，那么具有这样性质的点 P 的个数有

A. 9 个　　B. 17 个　　C. 1 个　　D. 5 个

【答案】A

【解析】如图，以正方形的顶点为圆心，边长为半径作 4 个圆，其 8 个交点满足要求，正方形的中心满足要求，共有 9 个点. 选 A.

(8) 任意△ABC，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为 l、R 与 r，那么

A. $l>R+r$　　B. $l\leqslant R+r$　　C. $\frac{l}{6}<R+r<6l$　　D. A、B、C 三种关系都不对

【答案】D

【解析】$R=\frac{a}{2\sin A}$，当 $A\to 180°$ 时，a 最大，而 R 可大于任意指定的正数 M，从而可有 $R<6l$，否定 A、C.

又正三角形中，$R+r=\frac{\sqrt{3}}{2}a<l$，否定 B. 故选 D.

2. 填充题(本题满分 18 分，每小题 6 分)

(1) 在△ABC 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，那么 $\cos C$ 的值等于_____.

【答案】$\frac{16}{65}$

【解析】$\cos A=\pm\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{12}{13}$，但若 $\cos A=-\frac{4}{5}$，则 $A>135°$，$\cos B=\frac{5}{13}<\cos 60°$，$B>60°$，

矛盾．故 $\cos A=\frac{4}{5}$．∴ $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$.

⑵ 三边均为整数，且最大边长为 11 的三角形，共有_____个．

【答案】36

【解析】设另两边为 x，y，且 $x\leqslant y$．则得 $x\leqslant y\leqslant 11$，$x+y>11$，在直角坐标系内作直线 $y=x$，$y=11$，$x=11$，$x+y=11$，则所求三角形数等于由此四条直线围成三角形内的整点数．（含 $y=11$，$y=x$ 上的整点，不含 $x+y=11$ 上的整点）共有 $12^2\div 4=36$ 个．即填 36.

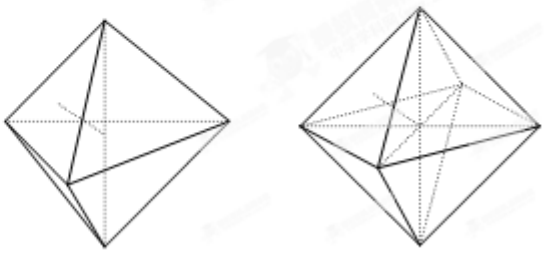
⑶ 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$，那么积 $m\cdot n$ 是_____.

【答案】6

【解析】此六面体可看成是由两个正四面体粘成．每个正四面体的高 $h_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，于是，利用体积可得 $Sh_1=3Sr_1$，$r_1=\frac{\sqrt{6}}{9}a$.

同样，正八面体可看成两个四棱锥粘成，每个四棱锥的高 $h_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，又可得 $a^2h_2=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2r_2$，$r_2=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

∴ $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$，∴ $m\cdot n=6$.



第二试

1．（本题满分 8 分）求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1,1]$

【解析】证明：由于 $x\in[-1,1]$，故 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 有意义，

$\sin(\frac{\pi}{2}-\arccos x)=\cos(\arccos x)=x$，由于 $\arccos x\in[0,\pi]$，∴ $\frac{\pi}{2}-\arccos x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

故根据反正弦定义，有 $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$．故证.

2．（本题满分 16 分）函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，$f(0)=f(1)$．如果对于任意不同的 x_1，$x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$．求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

【解析】证明：不妨取 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，若 $|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{2}$，则必有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|<\frac{1}{2}$.

若 $|x_1-x_2|>\frac{1}{2}$，则 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，于是 $1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$，即 $1-x_2+x_1-0<\frac{1}{2}$.

而 $|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-f(0))-(f(x_2)-f(1))|\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|<|x_1-0|+|1-x_2|$

$=1-x_2+x_1-0<\frac{1}{2}$. 故证.

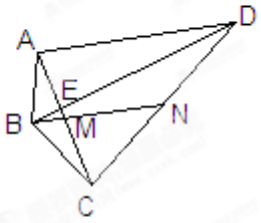
3. (本题满分 16 分) 在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 3∶4∶1，点 M、N 分别在 AC、CD 上满足 $AM∶AC=CN∶CD$，并且 B、M、N 三点共线. 求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

【解析】证明 设 AC、BD 交于点 E. 由 $AM∶AC=CN∶CD$，故 $AM∶MC=CN∶ND$，令 $CN∶ND=r(r>0)$，则 $AM∶MC=r$.

由 $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle BCD}=4S_{\triangle ABC}$ 即 $S_{\triangle ABD}∶S_{\triangle BCD}=3∶4$.

从而 $AE∶EC∶AC=3∶4∶7$.

$S_{\triangle ABD}∶S_{\triangle ABC}=6∶1$，故 $DE∶EB=6∶1$，$\therefore DB∶BE=7∶1$.



$AM∶AC=r∶(r+1)$，即 $AM=\frac{r}{r+1}AC$，$AE=\frac{3}{7}AC$，

$\therefore EM=(\frac{r}{r+1}-\frac{3}{7})AC=\frac{4r-3}{7(r+1)}AC$，$MC=\frac{1}{r+1}AC$，

$\therefore EM∶MC=\frac{4r-3}{7}$. 由 Menelaus 定理，知 $\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1$，代入得

$r\cdot 7\cdot\frac{4r-3}{7}=1$，即 $4r^2-3r-1=0$，这个方程有惟一的正根 $r=1$. 故 $CN∶ND=1$，就是 N 为 CN 中点，M 为 AC 中点.

4. (本题满分 16 分)在在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大体积是多少？证明你的结论.

【解析】解：边长为 2 的三角形，其余两边可能是：

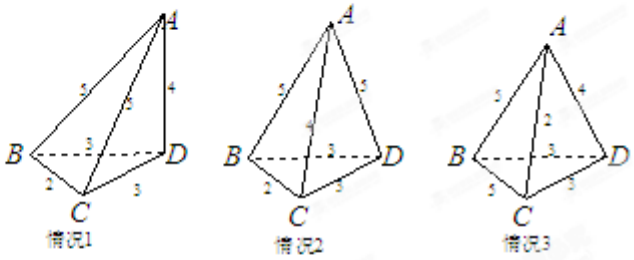
(1) 3，3；(2) 3，4；(3) 4，5；(4) 5，5.

按这几条棱的组合情况，以 2 为公共棱的两个侧面可能是：

① (1)，(4)；② (1)，(3)；③ (2)，(4).

先考虑较特殊的情况①：由于 $3^2+4^2=5^2$，即图中 AD⊥平面 BCD，

$\therefore V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3^2-1^2}\cdot 4=\frac{8}{3}\sqrt{2}$;



情况②：由于此情况的底面与情况②相同，但 AC 不与底垂直，故高<4，于是得 $V_2<V_1$.

情况③：高<2，底面积$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{5}{4}\sqrt{11}$.

$\therefore V_3<\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{11}=\frac{5}{6}\sqrt{11}<\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

$\therefore$ 最大体积为$\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

5. (本题满分 18 分) 函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时，M 为最小？证明

你的结论.

【解析】$F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$. 取 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，则 $g(\frac{\pi}{8})=g(\frac{9\pi}{8})=\sqrt{2}$. $g(\frac{5\pi}{8})=-\sqrt{2}$.

取 $h(x)=Ax+B$，若 $A=0$，$B\neq 0$，则当 $B>0$ 时，$F(\frac{\pi}{8})>\sqrt{2}$，当 $B<0$ 时，$F(\frac{5\pi}{8})<\sqrt{2}$. 从而 $M>\sqrt{2}$.

若 $A\neq 0$，则当 $h(\frac{5\pi}{8})<0$ 时，$F(\frac{5\pi}{8})>\sqrt{2}$，当 $h(\frac{5\pi}{8})\geq 0$ 时，由于 $h(x)$ 是一次函数，当 $A>0$ 时 $h(x)$ 递增，$h(\frac{9\pi}{8})>h(\frac{5\pi}{8})>0$，此时 $F(\frac{9\pi}{8})>\sqrt{2}$；当 $A<0$ 时 $h(x)$ 递减，$h(\frac{\pi}{8})>h(\frac{5\pi}{8})>0$，此时 $F(\frac{\pi}{8})>\sqrt{2}$. 故此时 $M>\sqrt{2}$.

若 $A=B=0$，显然有 $M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$，这个最小值在 $A=B=0$ 时取得.