# 1981年二十五省、市、自治区中学生联合数学竞赛

1．选择题(本题满分35分，每题答对者得5分，答错者得－2分，不答者得0分)

(1) 条件甲：两个三角形的面积和两条边对应相等.

条件乙：两个三角形全等.

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

(2) 条件甲：$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a$.

条件乙：$\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a$.

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

(3) 设 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ ($k\neq0$，$\pm1$，$\pm2$，……)，

$$T=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}.$$

A．$T$取负值　　B．$T$取非负值　　C．$T$取正值　　D．$T$取值可正可负

(4) 下面四个图形中，哪一个面积大?

A．$\triangle ABC$：$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}$

B．梯形：两条对角线的长度分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，夹角为75°

C．圆：半径为1

D．正方形：对角线长度为2.5

(5) 给出长方体$ABCD—A'B'C'D'$，下列12条直线：$AB'$，$BA'$，$CD'$，$DC'$，$AD'$，$DA'$，$BC'$，$CB'$，$AC$，$BD$，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线?

A．30对　　B．60对　　C．24对　　D．48对

(6) 在坐标平面上有两个区域$M$和$N$，$M$是由$y\geqslant0$，$y\leqslant x$和$y\leqslant2-x$这三个不等式确定，$N$是随$t$变化的区域，它由不等式$t\leqslant x\leqslant t+1$确定，$t$的取值范围是$0\leqslant t\leqslant1$，设$M$和$N$的公共面积是函数$f(t)$，则$f(t)$为

A．$-t^2+t+\frac{1}{2}$　　B．$-2t^2+2t$　　C.1$-\frac{1}{2}t^2$　　D．$\frac{1}{2}(t-2)^2$

(7) 对方程$x|x|+px+q=0$进行讨论，下面结论中，哪一个是错误的?

A．至多有三个实根　　B．至少有一个实根

C．仅当$p^2-4q\geqslant0$时才有实根　　D．当$p<0$和$q>0$时，有三个实根

2．(本题15分) 下列表中的对数值有两个是错误的，请予纠正：

| $x$ | 0.021 | 0.27 | 1.5 | 2.8 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| lg$x$ | $2a+b+c-3$ | $6a-3b-2$ | $3a-b+c$ | $1-2a+2b-c$ | $2a-b$ | $a+c$ |
| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 14 | |
| lg$x$ | $1+a-b-c$ | $2(a+c)$ | $3-3a-3c$ | $4a-2b$ | $1-a+2b$ | |

3．(本题 15 分)在圆 $O$ 内，弦 $CD$ 平行于弦 $EF$，且与直径 $AB$ 交成 45°角，若 $CD$ 与 $EF$ 分别交直径 $AB$ 于 $P$ 和 $Q$，且圆 $O$ 的半径为 1，求证：

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2.$$

4．(本题 15 分)组装甲、乙、丙三种产品，需用 $A$、$B$、$C$ 三种零件．每件甲需用 $A$、$B$ 各 2 个；每件乙需用 $B$、$C$ 各 1 个；每件丙需用 2 个 $A$ 与 1 个 $C$．用库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件，如组装成 $p$ 件甲产品、$q$ 件乙产品和 $r$ 件丙产品，则剩下 2 个 $A$ 和 1 个 $B$，但 $C$ 恰好用完．试证：无论怎样改变甲、乙、两产品的件数，也不能把库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件都恰好用完．

5．(本题 20 分)一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$，一个球从 $AB$ 的中点 $P$ 击出，击中 $BC$ 边上的某点 $Q$，并且依次碰击 $CD$、$DE$、$EF$、$FA$ 各边，最后击中 $AB$ 边上的某一点．设 $\angle BPQ=\vartheta$，求 $\vartheta$ 的范围．

提示：利用入射角等于反射角的原理．

# 1981年二十五省、市、自治区中学生联合数学竞赛解答

1．选择题(本题满分35分，每题答对者得5分，答错者得—2分，不答者得0分)

(1) 条件甲：两个三角形的面积和两条边对应相等.

条件乙：两个三角形全等.

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

【答案】B

【解析】乙⇒甲，但甲⇒乙，故选 B.

(2) 条件甲：$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a$.

条件乙：$\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a$.

A．甲是乙的充分必要条件　　B．甲是乙的必要条件

C．甲是乙的充分条件　　D．甲不是乙的必要条件，也不是乙的充分条件

【答案】D

【解析】由$\sqrt{1+\sin\vartheta}=a\Rightarrow\left|\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}\right|=a$；而 $\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\vartheta}{2}=a,\Rightarrow\sqrt{1+\sin\vartheta}=|a|$．故选 D.

(3) 设 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ ($k\neq0$，$\pm1$，$\pm2$，……)，$T=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$.

A．$T$取负值　　B．$T$取非负值　　C．$T$取正值　　D．$T$取值可正可负

【答案】C

【解析】$T=\frac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}>0$，选 C.

(4) 下面四个图形中，哪一个面积大?

A．$\triangle ABC$：$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}$

B．梯形：两条对角线的长度分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，夹角为75°

C．圆：半径为1

D．正方形：对角线长度为2.5

【答案】C

【解析】A 中三角形面积$=\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$；B 中梯形面积$=\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$；

C 中圆面积$=\pi$，D 中正方形面积$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{2}$．于是 $B=A<D<C$．选 C.

(5) 给出长方体 $ABCD—A'B'C'D'$，下列12条直线：$AB'$，$BA'$，$CD'$，$DC'$，$AD'$，$DA'$，$BC'$，$CB'$，$AC$，$BD$，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线?

A．30对　　B．60对　　C．24对　　D．48对

【答案】A

【解析】每条面上的对角线都与5条面上的对角线异面．故共有 5×12÷2=30 对．选 A.

⑹ 在坐标平面上有两个区域 $M$ 和 $N$，$M$ 是由 $y\geqslant 0$，$y\leqslant x$ 和 $y\leqslant 2-x$ 这三个不等式确定，$N$ 是随 $t$ 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 确定，$t$ 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$，设 $M$ 和 $N$ 的公共面积是函数 $f(t)$，则 $f(t)$为

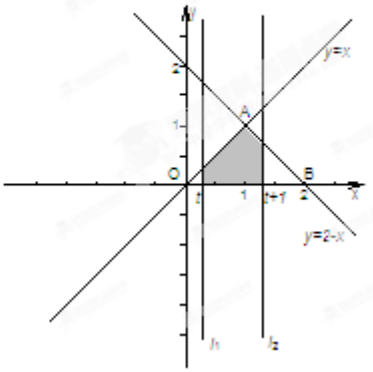
A．$-t^2+t+\frac{1}{2}$　　B．$-2t^2+2t$　　C.$1-\frac{1}{2}t^2$　　D．$\frac{1}{2}(t-2)^2$

【答案】A

【解析】$\triangle OAB$ 的面积=1．

直角边长为 $t$ 的等腰直角三角形面积=$\frac{1}{2}t^2$.直角边长为 $2-(1+t)=1-t$ 的等腰直角三角形面积=$\frac{1}{2}(1-t)^2$．

$f(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2=1-t^2+t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+t-t^2\ (0\leqslant t\leqslant 1)$．选 A．




⑺ 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论，下面结论中，哪一个是错误的？

A．至多有三个实根　　B．至少有一个实根

C．仅当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时才有实根　　D．当 $p<0$ 和 $q>0$ 时，有三个实根

【答案】C,D

【解析】画出 $y=x|x|$及 $y=-px-q$ 的图象：知 A、B 正确，C、D 错误．选 C、D．

2．(本题 15 分) 下列表中的对数值有两个是错误的，请予纠正：

| $x$ | 0.021 | 0.27 | 1.5 | 2.8 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| lg$x$ | $2a+b+c-3$ | $6a-3b-2$ | $3a-b+c$ | $1-2a+2b-c$ | $2a-b$ | $a+c$ |
| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 14 | |
| lg$x$ | $1+a-b-c$ | $2(a+c)$ | $3-3a-3c$ | $4a-2b$ | $1-a+2b$ | |

【解析】若 lg3=$2a-b$，则 lg9=$4a-2b$ 及 lg0.27=$6a-3b-2$，此三个数值同时正确或错误，故此三个数值都正确.

若 lg8=$3-3a-3c$，则 lg2=$1-a-c$，lg5=$1-$lg2=$a+c$，lg6=lg3+lg2=$1+a-b-c$．由于此三数同时正确或错误，故此三个数值都正确.

于是 lg1.5=lg3−lg2=$(2a-b)-(1-a-c)=3a-b+c-1$ 与表中 lg1.5=$3a-b+c$ 矛盾．即 lg1.5 的数值错误.

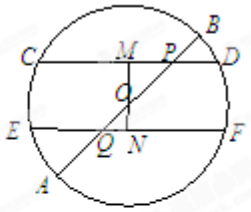
若 lg2.8=$1-2a+2b-c$，则 lg14=lg2.8+lg5=$(1-2a+2b-c)+(a+c)=1-a+2b$，lg0.021=lg3+lg14−lg2−3=$(2a-b)+(1-a+2b)-(1-a-c)-3=2a+b+c-3$，即此三个数值同时正确或错误，故此三个数值正确．lg7=lg14−lg2=$(1-a+2b)-(1-a-c)=2b+c$，与表中 lg7=$2a+2c$ 矛盾；

∴ 表中 lg1.5 与 lg7 是错误的，应为 lg1.5=$3a-b+c-1$，lg7=$2b+c$．

3．(本题 15 分)在圆 $O$ 内，弦 $CD$ 平行于弦 $EF$，且与直径 $AB$ 交成 45°角，若 $CD$ 与 $EF$ 分别交直径 $AB$ 于 $P$ 和 $Q$，且圆 $O$ 的半径为 1，求证：

$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$．

【解析】证明：作 $OM\perp CD$，垂足为 $M$，交 $EF$ 于 $N$，设 $ON=n$，$OM=m$．




则 $CM=DM=\sqrt{1-m^2}$，$EN=FN=\sqrt{1-n^2}$，

本题即证 $(\sqrt{1-m^2}+m)(\sqrt{1-n^2}\pm n)+(\sqrt{1-m^2}-m)(\sqrt{1-n^2}\mp n)<2$．

展开得，$\sqrt{1-m^2}\cdot\sqrt{1-n^2}\pm mn<1$．

移项，平方得，$1-m^2-n^2+m^2n^2<1\mp 2mn+m^2n^2$．$\Rightarrow m^2+n^2>\mp 2mn$．

取“+”号时，$M$、$N$ 在点 $O$ 同侧，此时 $m\neq n$，总之，命题成立．

(当 $E$、$F$ 交换位置时，且 $CD$、$EF$ 在点 $O$ 异侧时，可能有 $m=n$．)

又证：$PC^2+PD^2=(CM+OM)^2+(CM-OM)^2=2(CM^2+OM^2)=2$，同理 $QE^2+QF^2=2$．

∴ $4=PC^2+PD^2+QE^2+QF^2=(PC^2+QE^2)+(PD^2+QF^2)\geq 2(PC\cdot QE+PD\cdot QF)$．等号当且仅当 $PC=QE$，$PD=QF$ 时成立．但由已知，此二式不成立．故证．

4．(本题 15 分)组装甲、乙、丙三种产品，需用 $A$、$B$、$C$ 三种零件．每件甲需用 $A$、$B$ 各 2 个；每件乙需用 $B$、$C$ 各 1 个；每件丙需用 2 个 $A$ 与 1 个 $C$．用库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件，如组装成 $p$ 件甲产品、$q$ 件乙产品和 $r$ 件丙产品，则剩下 2 个 $A$ 和 1 个 $B$，但 $C$ 恰好用完．试证：无论怎样改变甲、乙、两产品的件数，也不能把库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件都恰好用完．

【解析】已知即：每个甲用 $A2$，$B2$，

每个乙用 $B1$，$C1$，

每个丙用 $A2$，$C1$．

∴ 共有 $A$ 产品 $2p+2r+2$ 件；$B$ 产品 $2p+q+1$ 件；$C$ 产品 $q+r$ 件．

设组装 $m$ 件甲，$n$ 件乙，$k$ 件丙，则用 $2m+2k$ 件 $A$；用 $2m+n$ 件 $B$；用 $n+k$ 件 $C$．

如全部用完，则有 $2p+2r+2=2m+2k$；

$\Rightarrow p+r+1=m+k$．(1)

$2p+q+1=2m+n$；(2)

$q+r=n+k$．(3)

∴(1)+(2)−(3)：$3p+2=3m$．这是不可能的．故证．

5．(本题 20 分)一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$，一个球从 $AB$ 的中点 $P$ 击出，击中 $BC$ 边上的某点 $Q$，并且依次碰击 $CD$、$DE$、$EF$、$FA$ 各边，最后击中 $AB$ 边上的某一点．设 $\angle BPQ=\vartheta$，求 $\vartheta$ 的范围．

提示：利用入射角等于反射角的原理．

【解析】只要把这个正六边形经过 5 次对称变换．则击球时应如图所示，击球方向在 $\angle MPN$ 内部时即可．

设 $AB=2$，以 $P$ 为原点，$PB$ 为 $x$ 轴正方向建立直角坐标系，点 $M$ 坐标为$(8，3\sqrt{3})$．点 $N$ 坐标为$(10，3\sqrt{3})$，即 $\vartheta\in[\arctan\frac{3\sqrt{3}}{10}，\arctan\frac{3\sqrt{3}}{8}]$．

