# 2025年重庆市高中数学联赛初赛试题

**考试时间：80分钟**

**一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.**

**1.** 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2025\}$，$B=\{3x\mid x\in A\}$，$C=\{x\mid 3x\in A\}$，则 $B\cap C$ 的元素个数为_____.

**2.** 四面体 $ABCD$ 满足 $AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$CD\perp AB$，$AB=BC=CD=1$，设 $AB$、$BC$、$CD$ 的中点分别为 $L$、$M$、$N$，则点 $M$ 到直线 $LN$ 的距离为_____.

**3.** 从面积为 $1$ 的正六边形的 $6$ 个顶点中随机选 $3$ 个不同的点，它们构成的三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率为_____.

**4.** 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1,F_2$，若过点 $F_1$ 的直线与双曲线交于 $A,B$ 两点，且 $\angle AF_1F_2=30^\circ$，$F_2A=F_2B$，则双曲线的离心率为_____.

**5.** 在 $\Delta ABC$ 中，$\dfrac{2\sin^2 A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$ 的最小值为_____.

**6.** 若实数 $m,n$ 使得关于 $x$ 的方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 $3$ 的虚根，则 $m+n$ 的取值范围为_____.

**7.** 设函数 $f(x)=x\sin(2\pi\ln x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值为 $a$，在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $b$，在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 $c$，则 $\dfrac{bc}{a}=$_____.

**8.** 小明在注册账号时想到一个问题. 他将这个问题简化如下：可以使用字符 $1,2,3,a,b,c,A,B,C$ 来组成五位密码，要求必须包含数字、小写字母和大写字母，且不可以出现两个相同的字符相邻. 例如密码可以设置为 $123aA$ 或 $1aA12$，但不能设置为 $123ab$ 或 $112aA$，则可以设置不同的密码的个数为_____.

**二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

**9.（本题满分16分）**

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\ \log_2 x+1,x>0\end{cases}$，设 $a,b,c$ 是三个不同的实数，满足 $f[f(a)]=f[f(b)]=f[f(c)]$，求 $a+b+c$ 的取值范围.

**10.（本题满分20分）**

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{1}{2^n}(n\in N^*)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$，$b_i\in\{a_i,-a_i\}$ $(i\ge 2)$，$S_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 前 $n$ 项和.

（1）若 $S_{4n}=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{2^{4n}}\right)$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）对于给定的 $n\in N^*$，求所有可能的 $S_n$.

**11.（本题满分20分）**

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的右焦点为 $F$，已知椭圆上有三个点 $A$、$B$、$C$ 满足四边形 $OACB$ 为平行四边形，$C$ 关于 $O$ 的对称点为 $D$. 若 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆，且直线 $AB$ 过 $F$，求实数 $a$ 的值.

# 2025 年重庆市高中数学联赛初赛试题参考答案

**一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.**

**1.** 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2025\}$，$B=\{3x\mid x\in A\}$，$C=\{x\mid 3x\in A\}$，则 $B\cap C$ 的元素个数为_____.

【答案】225

【解析】$B=\{3,6,9,\cdots,6075\}$，$C=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,675\right\}$，故 $B\cap C=\{3,6,9,...,675\}$，$B\cap C$ 的元素个数为 $225$.

**2.** 四面体 $ABCD$ 满足 $AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$CD\perp AB$，$AB=BC=CD=1$，设 $AB$、$BC$、$CD$ 的中点分别为 $L$、$M$、$N$，则点 $M$ 到直线 $LN$ 的距离为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】利用勾股定理可算得 $LM=MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$LN=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故在等腰 $\Delta LMN$ 中可算得点 $M$ 到直线 $LN$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**3.** 从面积为 $1$ 的正六边形的 $6$ 个顶点中随机选 $3$ 个不同的点，它们构成的三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率为_____.

【答案】$\frac{7}{10}$

【解析】记正六边形的 $6$ 个顶点顺时针依次为 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6$，易知从中选 $3$ 个不同的点构成的三角形只有三种不同的形状，分别为 $\Delta A_iA_{i+1}A_{i+2},\Delta A_iA_{i+1}A_{i+3},\Delta A_iA_{i+2}A_{i+4}$（其中下标按模 $6$ 理解），其面积依次为 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$，而形如 $\Delta A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 的三角形共有 $6$ 个，故构成的三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率为 $1-\frac{6}{C_6^3}=\frac{7}{10}$.

**4.** 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1,F_2$，若过点 $F_1$ 的直线与双曲线交于 $A,B$ 两点，且 $\angle AF_1F_2=30^\circ$，$F_2A=F_2B$，则双曲线的离心率为_____.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】不妨 $A$ 在双曲线靠近 $F_1$ 的这一支上，取 $AB$ 中点 $C$，则 $F_2C\perp AB$. 设 $|AF_1|=x$，由双曲线的第一定义知 $|AF_2|=|BF_2|=x+2a,|BF_1|=x+4a$，从而 $|AB|=4a,|AC|=2a$. 由 $\angle AF_1F_2=30^\circ$ 知 $|CF_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$，可得 $x=\sqrt{3}c-2a$. 又由 $|CF_2|=\frac{\sqrt{3}}{3}|CF_1|$ 及 $|AC|^2+|CF_2|^2=|AF_2|^2$ 可得 $(2a)^2+\frac{(x+2a)^2}{3}=(x+2a)^2$，解得 $x=\left(\sqrt{6}-2\right)a$. 于是 $\sqrt{3}c-2a=\left(\sqrt{6}-2\right)a$，可得离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

**5.** 在 $\Delta ABC$ 中，$\frac{2\sin^2A+\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$ 的最小值为_____.

【答案】3

【解析】由余弦定理及均值不等式，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{2bc-a^2}{2bc}=1-\frac{a^2}{2bc}$，所以 $\frac{2a^2}{bc}\geq 4-4\cos A$. 于是由正弦定理，原式 $=\frac{2a^2+bc}{bc\sin A}=\frac{1}{\sin A}\left(\frac{2a^2}{bc}+1\right)\geq\frac{5-4\cos A}{\sin A}$. 令 $\tan\frac{A}{2}=t>0$，则 $\frac{5-4\cos A}{\sin A}=\frac{9t^2+1}{2t}\geq\frac{2\sqrt{9t^2}}{2t}=3$.

又当 $A=\arcsin\frac{3}{5}, B=C=\frac{\pi-A}{2}$ 时，原式 $=3$. 故原式的最小值为 $3$.

**6.** 若实数 $m,n$ 使得关于 $x$ 的方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 $3$ 的虚根，则 $m+n$ 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(-81,\frac{117}{4}\right]$

【解析】

**法一：** 设方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 的虚根 $a+bi$，其中 $a,b\in R$ 满足 $a^2+b^2=9, b\neq 0$. 代入有 $(a+bi)^3+m(a+bi)+n=0$，从而有 $a^3-3ab^2+am+n=0$ 且 $3a^2b-b^3+bm=0$. 注意 $b\neq 0$，所以 $m=b^2-3a^2=9-4a^2, n=-a^3+3ab^2-am=18a, m+n=-4a^2+18a+9=-4\left(a-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{117}{4}$. 注意 $a\in(-3,3)$，所以 $m+n\in\left(-81,\frac{117}{4}\right]$. 另一方面，对每一个 $t\in\left(-81,\frac{117}{4}\right]$，可找到一个 $a=\frac{9-\sqrt{117-4t}}{4}\in(-3,3)$，使得 $m=9-4a^2$，$n=18a$，$m+n=t$，且使方程 $x^3+mx+n=0$ 有模为 的虚根 $a+\sqrt{9-a^2}i$. 故 $m+n$ 的取值范围为 $\left(-81,\frac{117}{4}\right]$.

**法二：** 由实系数多项式方程虚根成对原理，可设方程 $x^3+mx+n=0$ 的两虚根为 $a+bi, a-bi$，其中 $a,b\in R$ 满足 $a^2+b^2=9, b\neq 0$. 由韦达定理知此三次方程三根之和为 0，从而其唯一实根为 $-2a$. 再由韦达定理知 $m=(-2a)(a+bi)+(-2a)(a-bi)+(a+bi)(a-bi)=9-4a^2$，$n=-(-2a)(a+bi)(a-bi)=18a$. 下同法一.

**7.** 设函数 $f(x)=x\sin(2\pi\ln x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值为 $a$，在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $b$，在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 $c$，则 $\frac{bc}{a}=$_____.

【答案】 $3e\sin(2\pi\ln 3)$

【解析】由 $f\left(e^{-\frac{3}{4}}\right)=e^{-\frac{3}{4}}>0, f\left(e^{\frac{1}{4}}\right)=e^{\frac{1}{4}}>0$ 且 $e^{-\frac{3}{4}}\in(0,1], e^{\frac{1}{4}}\in[1,2]$ 知 $a>0$，$b>0$. 注意 $f(x)$ 满足 $f(ex)=ef(x)$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值 $a$ 即为在区间 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上的最大值. 又注意在区间 $\left[\sqrt{e},e\right]$ 上 $f(x)\le 0$，故 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值 $b$ 即为 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上的最大值，从而 $b=ea$. 再注意 $f(x)$ 在区间 $\left[e,e^{\frac{5}{4}}\right]$ 上单调递增且 $[e,3]\subseteq\left[e,e^{\frac{5}{4}}\right]$，故 $c=f(3)=3\sin(2\pi\ln 3)$，所以 $\frac{bc}{a}=3e\sin(2\pi\ln 3)$.

**8.** 小明在注册账号时想到一个问题. 他将这个问题简化如下：可以使用字符 $1,2,3,a,b,c,A,B,C$ 来组成五位密码，要求必须包含数字、小写字母和大写字母，且不可以出现两个相同的字符相邻. 例如密码可以设置为 $123aA$ 或 $1aA12$，但不能设置为 $123ab$ 或 $112aA$，则可以设置不同的密码的个数为_____.

【答案】 25758

【解析】我们先只考虑相邻字符不同的密码，共有 $9\times 8^4=36864$ 种. 这里面不满足要求的有两类：第一类是仅包含单一字符类型（如全数字），这类共有 $3\times(3\times 2^4)=144$ 种；第二类是仅包含两种字符类型（如数字和小写字母），共有 $6$ 个不同的字符可选，只满足相邻不同的密码有 $6\times 5^4=3750$ 种，其中单一字符类型的有 $2\times(3\times 2^4)=96$ 种，故第二类共有 $3\times(3750-96)=10962$ 种. 所以不同密码的总个数为 $36864-144-10962=25758$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

**9.（本题满分 16 分）**

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x+1, x>0\end{cases}$，设 $a,b,c$ 是三个不同的实数，满足 $f\left[f(a)\right]=f\left[f(b)\right]=f\left[f(c)\right]$，求 $a+b+c$ 的取值范围.

【解析】设 $f\left[f(a)\right]=f\left[f(b)\right]=f\left[f(c)\right]=t$，即方程 $f\left[f(x)\right]=t$ 有三个不同的实根 $a,b,c$. 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递增，且该部分值域为 $(0,1]$；在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且该部分值域为 $R$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(1)=1$. 结合图像可知，方程 $f\left[f(x)\right]=t$ 有三个不同的实根，当且仅当方程 $f(x)=t$ 有两个不同的实根 $x_1<x_2$，即当且仅当 $t\in(0,1]$，且 $2^{x_1}=t\Rightarrow x_1=\log_2 t\in(-\infty,0]$，$\log_2 x_2+1=t\Rightarrow x_2=2^{t-1}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ ……8 分

再考虑方程 $f(x)=x_1$ 和 $f(x)=x_2$. 注意 $f(x)=x_1\Leftrightarrow\log_2 x+1=x_1\Leftrightarrow x=2^{x_1-1}=\frac{t}{2}$，$f(x)=x_2\Leftrightarrow 2^x=x_2$ 或 $\log_2 x+1=x_2\Leftrightarrow x=\log_2 x_2=t-1$ 或 $x=2^{x_2-1}=2^{2^{t-1}-1}$. 故

$$a+b+c=\frac{t}{2}+t-1+2^{2^{t-1}-1}=2^{2^{t-1}-1}+\frac{3t}{2}-1.$$

由于 $t\in(0,1]$，且 $a+b+c$ 为关于 $t$ 的增函数，所以 $a+b+c\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{3}{2}\right]$. ……16 分

**10.（本题满分 20 分）**

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{1}{2^n}\left(n\in N^*\right)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$，$b_i\in\{a_i,-a_i\}\ (i\ge 2)$，$S_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 前 $n$ 项和.

（1）若 $S_{4n}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）对于给定的 $n\in N^*$，求所有可能的 $S_n$.

【解析】（1）若 $S_{4n}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)$，则 $b_{4n-3}+b_{4n-2}+b_{4n-1}+b_{4n}=S_{4n}-S_{4n-4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{4n-4}}-\frac{1}{2^{4n}}\right)=\frac{3}{2^{4n}}$.

设 $b_n=k_n a_n$，其中 $k_n\in\{1,-1\}$，则 $\frac{8k_{4n-3}+4k_{4n-2}+2k_{4n-1}+k_{4n}}{2^{4n}}=\frac{3}{2^{4n}}\Rightarrow 8k_{4n-3}+4k_{4n-2}+2k_{4n-1}+k_{4n}=3$，故只能是 $k_{4n-3}=1,k_{4n-2}=k_{4n-1}=-1,k_{4n}=1$，所以 $b_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, n\equiv 0,1\pmod 4\\ -\frac{1}{2^n}, n\equiv 2,3\pmod 4\end{cases}$ ……10 分

（2）我们归纳证明，所有可能的 $S_n=\frac{2m-1}{2^n}, m=1,2,\cdots,2^{n-1}$.

$n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{2}$，命题成立；

假设 $n=k(k\in N^*)$ 时命题成立，即 $S_k=\frac{2m-1}{2^k}, m=1,2,\cdots,2^{k-1}$，则当 $n=k+1$ 时，

$S_{k+1}=S_k\pm\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}S_k\pm 1}{2^{k+1}}=\frac{2(2m-1)\pm 1}{2^{k+1}}$，即 $S_{k+1}=\frac{2\times(2m-1)-1}{2^{k+1}}$ 或 $\frac{2\times(2m)-1}{2^{k+1}}$，$m=1,2,\cdots,2^{k-1}$，

即 $S_{k+1}=\frac{2m-1}{2^{k+1}}, m=1,2,\cdots,2^k$. 故 $n=k+1$ 时，命题也成立. ……20 分

**11.（本题满分 20 分）**

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的右焦点为 $F$，已知椭圆上有三个点 $A$、$B$、$C$ 满足四边形 $OACB$ 为平行四边形，$C$ 关于 $O$ 的对称点为 $D$. 若 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆，且直线 $AB$ 过 $F$，求实数 $a$ 的值.

【解析】若 $AB$ 上轴，则由四边形 $OACB$ 为平行四边形及椭圆的对称性知，$C,D$ 为椭圆长轴两端点，故若 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆，则圆心必为 $O$，即圆以 $CD$ 为直径，而 $A,B$ 又在椭圆上，显然矛盾！

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $C(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$D(-x_1-x_2,-y_1-y_2)$. 设 $F(c,0)$（其中 $c=\sqrt{a^2-1}$），并设 $AB:y=k_1(x-c)$，$CD:y=k_2x$.

由 $A,B$ 在椭圆上可得 $\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=\frac{x_2^2}{a^2}+y_2^2=1\Rightarrow\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=-\frac{1}{a^2}$，从而 $k_1k_2=-\frac{1}{a^2}$. ……5 分

**法一：**

设 $AB$ 中点为 $E$. 由相交弦定理和平行四边形性质有 $|EA|\cdot|EB|=|EC|\cdot|ED|$ 和 $|ED|=3|EC|$，故 $AB=\sqrt{3}OC$. 于是可得 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=3(x_1+x_2)^2+3(y_1+y_2)^2$ ① 及 $(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2=3(1+k_2^2)(x_1+x_2)^2$ ②

由 $A,B,C$ 在椭圆上可得 $\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+y_2^2=1$，$\frac{(x_1+x_2)^2}{a^2}+(y_1+y_2)^2=1$ ③，于是有 $\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}+(y_1-y_2)^2=3$ ④，结合①③④可得 $\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left[(x_1-x_2)^2-3(x_1+x_2)^2\right]=0\Rightarrow(x_1-x_2)^2=3(x_1+x_2)^2$，代入②可得 $k_1^2=k_2^2$，结合 $k_1k_2=-\frac{1}{a^2}$ 可得 $k_1=-k_2=\pm\frac{1}{a}$. ……15 分

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\\ y=\pm\frac{1}{a}(x-c)\end{cases}$ 得 $2x^2-2cx-1=0$，由韦达定理知 $x_1+x_2=c$，进而 $y_1+y_2=\pm\frac{1}{a}(x_1+x_2-2c)=\pm\frac{c}{a}$. 注意 $C$ 在椭圆上，于是有 $\frac{(x_1+x_2)^2}{a^2}+(y_1+y_2)^2=1$，即 $\frac{c^2}{a^2}+\left(\pm\frac{c}{a}\right)^2=1$，即 $2(a^2-1)=a^2$，解得 $a=\sqrt{2}$.

……20 分

**法二：**

由于 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点均满足 $(k_1x-k_1c-y)(k_2x-y)=0$ 和 $\frac{x^2}{a^2}+y^2-1=0$，故过 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点的圆的方程为 $(k_1x-k_1c-y)(k_2x-y)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+y^2-1\right)=0$，考察 $xy$ 项的系数可知 $k_1+k_2=0$，结合 $k_1k_2=-\frac{1}{a^2}$ 可得 $k_1=-k_2=\pm\frac{1}{a}$. ……15 分

**（下同法一）**