2025年全国中学生奥林匹克数学竞赛浙江赛区初赛试题

本卷共15道题目，12道填空题，3道解答题，所有答案填写在答题纸上，满分150分

一、填空题（每小题8分，共计96分）

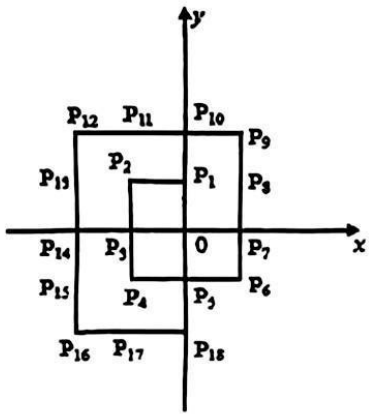
1. 设$x\in\mathbb{R}$，集合$\{x,\sqrt{2x},x^2\}=\{x-4,x^2-12x+40,8x\}$，则$x=$_____.

2. 设n为正整数，定义$P_n(\cos x)=\cos nx$，则

$P_{2025}(\cos 5^\circ)+2\cos 185^\circ P_{2024}(\cos 5^\circ)+P_{2023}(\sin 85^\circ)=$_____.

3. 若等差数列$\{a_n\}$满足：$a_1>0, S_7+a_4=0$，其中S_7为数列前7项的和，则使得$2S_n\geq a_n$的n的最大值为_____.

4. 如图，在平面直角坐标系上有一动点P，每次平行坐标轴移动一个单位。设动点P从$P_1(0,1)$点出发，向左移动一个单位到达$P_2(-1,1)$，向下移动一个单位到达$P_3(-1,0)$，再向下移动一个单位到达$P_4(-1,-1)$，接着向右移动一个单位到达$P_5(0,-1)$，再向右移动一个单位达到$P_6(1,-1)$，又向上移动一个单位到达$P_7(1,0)$……依次进行得到一个逆时针螺旋线。问P_{1000}的坐标为_____.



5. 设非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\forall x,y\in\mathbb{R},|3x\boldsymbol{a}+4y\boldsymbol{b}|\geq 2|\boldsymbol{a}|x$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的最小值为_____.

6. 已知实数x,y满足$x^2+y^2=1,(x\neq 1)$，则$\dfrac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}$的最小值为_____.

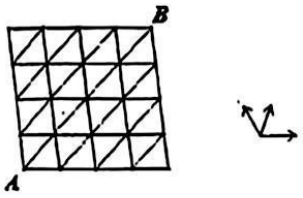
7. 设$x,y,z\in\mathbb{R}$，且$5x^2+6y^2+6z^2-8yz\leq 1$，则$x+y+z$的最大值为_____.

8. 设$P-ABCD$为四棱锥，面$PAB\perp$底面$ABCD$，且$PA=PB=\sqrt{5}, AB=BC=AD=2$，则四棱锥$P-ABCD$体积的最大值为_____.

9. 动点 M 从原点出发，每次沿数轴向正方向移动一个单位或两个单位长度. 现每次用掷一枚非均匀硬币的方式决定 M 如何移动：若掷得正面，M 移动两个单位；若掷得反面，则 M 移动一个单位。设掷得正面的概率为 P，则 M 恰好移动到 2025 点的概率为_____.

10. 记组合数 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，数列 $\{a_k\}$ 满足，a_k 为 C_{2025}^k 除以 3 的余数，$a_k\in\{0,1,2\},k=0,1,2,\cdots,2025$，则数列 $\{a_k\}$ 中数字为 0，1，2 的数目比为_____.

11. 如图，在 $k\times k$ 的平行四边形中，A,B 为一条对角的两个顶点。一个动点从 A 出发按照以下规则运动到 B 点：动点沿着图中箭头方向（往右或往上）移动，每次移动一步（一步或是图中最小平行四边形的两条邻边之一，或是最小平行四边形对角线），到达最小四边形的一个顶点。则动点从 A 移动到 B 点有_____种不同的移动方法.



12. 设 A,B 为集合，满足 $|A|=3$ 且 $A\cup B=\{1,2,\cdots,9\}$. 若 A 中所有元素的乘积等于 B 中所有元素的和，则这样的 A 有_____个.

二、解答题（13 题满分 14 分，14、15 题满分各 20 分，合计 54 分）

13. 已知抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，$P(m,n)$（$m\neq0$）是 E 的动点，过 P 点作 E 的切线 l，直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A,B 两个不同的点，记 AB 的中点为 D. 设直线 OD（O 为原点）与直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 交于 Q.

（1）证明直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 与直线 PQ 垂直；

（2）若 l 与 FQ 交于 G，且 $a=2b$，证明 $1<\dfrac{S_{\Delta FPG}}{S_{\Delta PGQ}}<2$.

14. 将平面用水平和竖直的直线分成由 1×1 的正方形构成的网格，设 P 是由 2025 个小正方形构成的连通图形（连通是指从其中任何一格可以经过若干有公共边的方格走到另一格），记 $|\partial P|$ 为边界折线的长度。求 $|\partial P|$ 的最大可能值和最小可能值.

15. 设复系数多项式 $f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 的根为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，且对某个正整数 $k\le n$ 有

$$|z_1|\ge|z_2|\ge\cdots\ge|z_k|>1\ge|z_{k+1}|\ge\cdots\ge|z_n|.$$

证明：存在实数 $x\in[-1,1]$ 使得

$$|f(x)|\ge\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{k}|z_i|$$

2025年全国中学生奥林匹克数学竞赛浙江赛区初赛试题

参考答案和评分标准

一、 填空题（每小题8分，共计96分）

1. 8	2. 0	3. 7	4. （-16，8）	5. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$ （$\arctan\frac{2\sqrt{5}}{5}$）
6. -4	7. $\frac{\sqrt{30}}{5}$	8. $2\sqrt{3}$	9. $\frac{1-p^{2026}}{1+p}$	10. 1004：5：4
11. $C_{2k}^{k}C_{2k+1}^{k}2^{k}$	12. 7			

1. 设$x\in\mathrm{R}$，集合$\{x,\sqrt{2x},x^2\}=\{x-4,x^2-12x+40,8x\}$，则$x=$_____.

答案 8

解 因为$x\neq x-4$，且$x\neq 8x$，否则$x=0\Rightarrow x=\sqrt{2x}=x^2=0$，矛盾.

所以$x=x^2-12x+40\Rightarrow x=5,$或$x=8$。当$x=5\Rightarrow\sqrt{2x}=\sqrt{10}\notin\{1,5,40\}$，矛盾；

而$x=8$满足题设。此时$x^2=8x$，又$x^2>x-4$，所以$x=8$是唯一解.

2. 设n为正整数，定义$P_n(\cos x)=\cos nx$，则

$P_{2025}(\cos 5^\circ)+2\cos 185^\circ P_{2024}(\cos 5^\circ)+P_{2023}(\sin 85^\circ)=$_____.

答案 0

解 因为

$\cos nx=\cos(n-1)x\cos x-\sin(n-1)x\sin x,\cos(n-2)x=\cos(n-1)x\cos x+\sin(n-1)x\sin x$，

所以，$\cos nx+\cos(n-2)x=2\cos(n-1)x\cos x$，即$P_n(\cos x)=2\cos xP_{n-1}(\cos x)-P_{n-2}(\cos x)$。

所以$P_{2025}(\cos 5^\circ)+2\cos 185^\circ P_{2024}(\cos 5^\circ)+P_{2023}(\sin 85^\circ)$

$=P_{2025}(\cos 5^\circ)-2\cos 5^\circ P_{2024}(\cos 5^\circ)+P_{2023}(\cos 5^\circ)=0$.

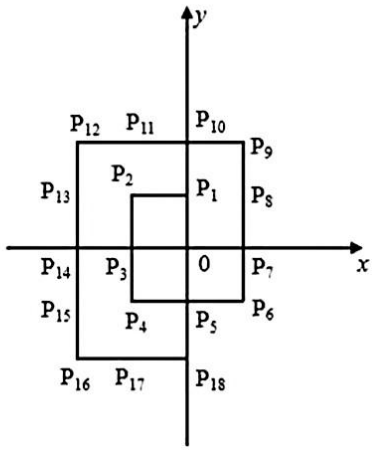
3. 若等差数列$\{a_n\}$满足：$a_1>0,S_7+a_4=0$，其中S_7为数列前7项的和，则使得$2S_n\geq a_n$的n的最大值为_____.

答案 7

解 设等差数列的公差为d，由$S_7+a_4=0$，得$a_1=-3d,d<0$。由$2S_n\geq a_n$得

$(2n-1)a_1+(n-1)^2d\geq 0$，将$a_1=-3d$代入得，$-3(2n-1)+(n-1)^2\leq 0$，故n的最大值为7.

4. 如图，在平面直角坐标系上有一动点P，每次平行坐标轴移动一个单位. 设动点P从$P_1(0,1)$点出发，向左移动一个单位到达$P_2(-1,1)$，向下移动一个单位到达$P_3(-1,0)$，再向下移动一个单位到达$P_4(-1,-1)$，接着向右移动一个单位到达$P_5(0,-1)$，再向右移动一个单位达到$P_6(1,-1)$，又向上移动一个单位到达$P_7(1,0)$……依次进行得到一个逆时针螺旋线. 问P_{1000}的坐标为_____.



答案（-16, 8）

解答 考虑直线$y=x(x<0)$上的点的下标，它们都是偶数的平方数。$31^2<1000<32^2=1024$，而P_{1024}的坐标为$(-16,-16)$。又P_{1024}和P_{1000}横坐标相等，纵坐标相差24个单位. $1024-1000=24$，因此P_{1000}的坐标为$(-16, 8)$.

5. 设非零向量a,b满足$\forall x,y\in\mathbb{R},|3xa+4yb|\geq 2|a|x$，则$a,b$夹角的最小值为_____。

答案：$\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\arctan\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

解法1 当$x\leq 0$时，题中不等式自然满足，所以只要考虑$x>0$的情形.

将不等式两边同时除以$3|a|x$，得$\forall x,y\in\mathbb{R},\left|a^0+\frac{4y}{3|a|x}b\right|\geq\frac{2}{3}$，因此题设不等式等价为

$\forall t\in\mathbb{R},|a^0+tb|\geq\frac{2}{3}$，其中$a^0=\frac{a}{|a|}$为单位向量. 记$a,b$夹角为$\alpha$，那么，

$\left|\boldsymbol{a}^0+t\boldsymbol{b}\right|^2=\left|\boldsymbol{a}^0\right|^2+2t\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}+t^2\left|\boldsymbol{b}\right|^2=1+2t\left|\boldsymbol{b}\right|\cos\alpha+t^2\left|\boldsymbol{b}\right|^2\geq\frac{4}{9}$，即

$9\left|\boldsymbol{b}\right|^2t^2+18\left|\boldsymbol{b}\right|\cos\alpha t+5\geq0$，从而$\Delta=324\left|\boldsymbol{b}\right|^2\cos^2\alpha-180\left|\boldsymbol{b}\right|^2\leq0$，得$\left|\cos\alpha\right|\leq\frac{\sqrt{5}}{3}$.

解法 2 将已知条件两边平方得$5x^2\left|a\right|^2+24xy\left|a\right|\left|b\right|\cos\theta+16y^2\left|b\right|^2\geq0$，令$t=\frac{\left|a\right|}{\left|b\right|}$，变形得

$5x^2t^2+24\cos\theta xyt+16y^2\geq0$，所以$\Delta=(24xy\cos\theta)^2-4\times5x^2\times16y^2\leq0$（以下略）.

6. 已知实数x,y满足$x^2+y^2=1,x\neq1$，则$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}$的最小值为_____.

答案 -4

解法 1 当$2x-1\geq3y-1$时，则$x-1\geq\frac{3}{2}y$，在区域$\{(x,y)\left|x^2+y^2=1,x-1\geq\frac{3}{2}y\right.\}$上考虑目标函数最值

此时$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}=\frac{2x-3}{\frac{3}{2}y}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\frac{y}{x-\frac{3}{2}}}\geq\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$；

当$2x-1<3y-1$时，则$x-1<\frac{3}{2}y$，在区域$\{(x,y)\left|x^2+y^2=1,x-1<\frac{3}{2}y\right.\}$上考虑目标函数最值.

此时$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}=\frac{3y-1}{x-1}=3\times\frac{y-\frac{1}{3}}{x-1}\geq3\times(-\frac{4}{3})=-4$，$x=\frac{4}{5},y=\frac{1}{5}$时取等号.

所以，$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}$的最小值为$-4$.

解法 2 利用$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+\left|a-b\right|),\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-\left|a-b\right|)$得

$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}=2\times\frac{2x+3y-4+\left|2x-3y-2\right|}{2x+3y-2-\left|2x-3y-2\right|}$.

当$x-1\geq\frac{3}{2}y$时，$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}=\frac{2x-3}{\frac{3}{2}y}$（以下略）；

当$x-1<\frac{3}{2}y$时，$\frac{\max\{2x-3,3y-1\}}{\min\{x-1,\frac{3}{2}y\}}=\frac{3y-1}{x-1}$（以下略）.

7. 设$x,y,z\in\mathrm{R}$，且$5x^2+6y^2+6z^2-8yz\leq1$，则$x+y+z$的最大值为_____.

答案 $\frac{\sqrt{30}}{5}$

解法1 令$u=x+2y-2z,v=x-y,w=x+z$，则条件变形为$u^2+2v^2+2w^2\le 1$.

于是$x+y+z=\frac{1}{5}u-\frac{3}{5}v+\frac{7}{5}w\le\sqrt{(\frac{1}{25}+\frac{9}{50}+\frac{49}{50})(u^2+2v^2+2w^2)}\le\frac{\sqrt{30}}{5}$，当

$x=\frac{\sqrt{30}}{30},y=\frac{\sqrt{30}}{12},z=\frac{\sqrt{30}}{12}$ 取到等号.

解法2 由对称性，不妨设$y=z$，则题设条件变形为$5x^2+4y^2\le 1$.

又$(x+2y)^2=(\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}x+2y)^2\le(\frac{1}{5}+1)(5x^2+4y^2)\le\frac{6}{5}$（以下略）.

8. 设$P-ABCD$为四棱锥，面$PAB\perp$底面$ABCD$，且$PA=PB=\sqrt{5},AB=BC=AD=2$，则四棱锥$P-ABCD$体积的最大值为_____.

答案 $2\sqrt{3}$

解 由已知得四棱锥的高为2，因此只需要求出底面四边形$ABCD$面积的最大值.
将四边形$ABCD$分为$\triangle ABD$和$\triangle BCD$.

设$\angle BAD=\alpha$中，则$BD=4\sin\frac{\alpha}{2},S_{\triangle ABD}=2\sin\alpha$.

要使四边形$ABCD$的面积最大，则$BC\perp BD$，则$S_{\triangle BDC}=4\sin\frac{\alpha}{2}$.

所以四边形$ABCD$的面积为$S=2\sin\alpha+4\sin\frac{\alpha}{2}$. 令$\sin\frac{\alpha}{2}=x(0<x<1)$，

则$S=4(x+x\sqrt{1-x^2})$，求导得$S'=4(1+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})$.

由$S'=0$，解得S的唯一极值点$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$S_{\max}=3\sqrt{3}$.

所以，四棱锥$P-ABCD$体积的最大值为$2\sqrt{3}$.

9. 动点M从原点出发，每次沿数轴向正方向移动一个单位或两个单位长度. 现每次用掷一枚非均匀硬币的方式决定M如何移动：若掷得正面，M移动两个单位；若掷得反面，则M移动一个单位. 设掷得正面的概率为p，则M恰好移动到2025点的概率为_____.

答案 $\frac{1-p^{2026}}{1+p}$

解 设动点到达n点的概率为$P_n,n\in\mathrm{N}^*$，动点不能到达2025的情况只有一种，就是动点到达2024点，且接下来掷硬币得正面，所以有：$1-P_{2025}=P_{2024}\times p$，即

$P_{2025}=1-p\cdot P_{2024}=1-p+p^2P_{2023}=1-p+p^2-p^3P_{2022}=\cdots$

$$=1-p+p^2-p^3+\cdots-p^{2023}+p^{2024}P_1=1-p+p^2-p^3+\cdots-p^{2023}+p^{2024}(1-p)$$

$$=\frac{1-(-p)^{2024}}{1+p}+p^{2024}(1-p)=\frac{1-p^{2026}}{1+p}.$$

10. 记组合数 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，数列 $\{a_k\}$ 满足，a_k 为 C_{2025}^k 除以 3 的余数，$a_k\in\{0,1,2\},k=0,1,2,\cdots,2025$，则数列 $\{a_k\}$ 中数字为 0，1，2 的数目比为_____.

答案 1004:5:4

解法 1 $C_n^k,k=0,1,2,\cdots,n$ 是 $(1+x)^n$ 的二项式展开系数，即 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n$。

注意到 $(1+x)^3\equiv1+x(\mathrm{mod}3),(1+x)^{3^k}\equiv1+x^{3^k}(\mathrm{mod}3)$，而 $2025=2\times3^6+2\times3^5+1\times3^4$，

于是 $(1+x)^{2025}\equiv(1+x^{729})^2(1+x^{243})^2(1+x^{81})(\mathrm{mod}3)$

$$\equiv(1+2x^{729}+x^{1458})(1+2x^{243}+x^{486})(1+x^{81})(\mathrm{mod}3)$$

$$\equiv(1+2x^{729}+x^{1458})(1+2x^{243}+x^{486}+x^{81}+x^{324}+x^{567})(\mathrm{mod}3)$$

计算系数模 3 等于 1 的项有：$4+4+2=10$；
系数模 3 等于 2 的项有：$4+2\times2=8$；
所以，系数模 3 等于 0 的项有：$2026-18=2008$.

解法 2 将 2025 写成 3 进制数 $\overline{2210000}_3$，由 Kummer 定理，$C_{2025}^k,k=0,1,2,\cdots,2025$ 模 3 余 0 等价于在 3 进制下 $(n-k)_3$ 有借位，所以 C_{2025}^k 除以 3 的余数0 的项数共有

$$2026-C_2^1C_3^1C_3^1=2008.$$

在 $C_{2025}^k,k=0,1,2,\cdots,2025$ 中，模 3 不等于 0 的 k 有 18 个，在 3 进制下它们是

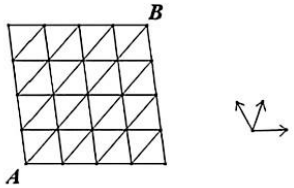
0,10000,100000,110000, 200000,210000, 1000000, 1010000, 1100000, 1110000, 1200000, 1210000, 2000000, 2010000, 210000, 2110000, 2200000, 2210000

由卢卡斯定理，$C_n^k\equiv C_{n_0}^{k_0}C_{n_1}^{k_1}\cdots C_{n_d}^{k_d}(\mathrm{mod}\,p)$,

其中 $n=n_0+n_1p+\cdots+n_dp^d,k=k_0+k_1p+\cdots+k_dp^d$

计算得系数模 3 等于 1 的项有 10 项；系数模 3 等于 2 的项有 8 项.

11. 如图，在 $k\times k$ 的平行四边形中，A,B 为一条对角的两个顶点。一个动点从 A 出发按照以下规则运动到 B 点：动点沿着图中箭头方向（往右或往上）移动，每次移动一步（一步或是图中最小平行四边形的两条邻边之一，或是最小平行四边形对角线），到达最小四边形的一个顶点。则动点从 A 移动到 B 点有_____种不同的移动方法.



答案 $C_{2k}^{k}C_{2k+1}^{k}2^{k}$

解 把平行四边形看成一个正方形，动点在每个点有三种选择，动点要从A点移动到B点，横向和纵向恰好各移动k步，而沿对角线方向可选择也可以不选择，但最多移动k步. 设对角线方向移动$s(0\le s\le k)$，所以，对固定的s移动的方法数为$\dfrac{(2k+s)!}{k!k!s!}$.所以由A到B的移动方法数为$\sum_{s=0}^{k}\dfrac{(2k+s)!}{k!k!s!}=C_{2k}^{k}\sum_{s=0}^{k}C_{2k+s}^{s}=C_{2k}^{k}C_{2k+1}^{k}2^{k}$.

12. 设A,B为集合，满足$|A|=3$且$A\cup B=\{1,2,\cdots,9\}$. 若A中所有元素的乘积等于B中所有元素的和，则这样的A有_____个.

答案 7

解法1

令 $A=\{x,y,z\}$ 且 $x<y<z$，注意到B中元素和小于等于45。为了方便描述B，我们令$C=\{1,2,\ldots,9\}$ 下面开始分情况讨论:

(1) 若 $x=2$ 则 $y<5$，否则 $xyz\le 2\times5\times6=60$.下面分情况讨论$y$:

若 $y=3$，则$z\le 7$，逐一验证知，$A=\{2,3,7\},B=C\{3\}$ 和 $A=\{2,3,6\},B=C\{3,6\}$ 满足条件； 若$z\le 5$，则B中元素和大于等于35，而A中元素乘积小于等于$2\times3\times5=30$. 所以此时共两种符合条件的集合对。

若 $y=4$，则 $z\le 5$，所以$z=5$，此时 $A=\{2,4,5\}$，$B=C\{5\}$ 满足条件.

(2) 若$x=1$，则 $44-z-y\le yz\le 45$，所以 $(y+1)(z+1)\ge 45$ 且 $yz\le 45$. 由 $y+1\le z\le 9$ 知 $4\le y\le 6$. 下面分情况讨论y:

若$y=6$,则 $z=7$; 此时B中元素和为42,所以$B=C\backslash\{3\}$或 $B=C\backslash\{1,2\}$ 不符合条件.

若$y=5$，则$z\ge 7$； 此时，$A=\{1,5,8\},B=C\backslash\{5\}$ 和 $A=\{1,5,9\},B=C$ 满足条件;

若$z=7$,则$B=C\backslash\{3\}$或$B=C\{1,2\}$ 不符合条件.

若$y=4$，则$z>=8$; 此时，$A=\{1,4,8\},B=C\backslash\{1,4,8\}$ 和 $A=\{1,4,9\},B=C\backslash\{9\}$ 满足条件.

综上， A有7种可能，分别为 $\{2,3,7\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{1,5,8\},\{1,5,9\},\{1,4,8\},\{1,4,9\}$.

解法2 设$A=\{a,b,c\},1\le a\ne b\ne c\le 9$.

(1) 若$A\cap B=\{a,b,c\}$，则有$abc=45\Rightarrow A=\{1,5,9\}$.

(2) 若$A\cap B=\{a,b\}$，则有$abc=45-c\Rightarrow(ab+1)c=45$.

若$c=5\Rightarrow A=\{2,4,5\}$,或$A=\{1,5,8\}$； 若$c=9\Rightarrow A=\{1,4,9\}$;若$c=3\Rightarrow A=\{2,3,7\}$.

(3) 若$A\cap B=\{a\}$，则有$abc=45-(b+c)\Rightarrow(ab+1)(ac+1)=45a+1$.

当$a=2\Rightarrow A=\{2,3,6\}$； $a=1,3,4,\cdots,9$无正整数解.

（4）若 $A\cap B=\varnothing$，则有 $abc=45-(a+b+c)\Rightarrow(ab+1)(ac+1)=45a+1-a^2$.

若 $a=1$,或$4\Rightarrow A=\{1,4,8\}$； $a=2,3,5,\cdots,9$ 无正整数解.

综上， A有 7 种可能，分别为 $\{2,3,7\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{1,5,8\},\{1,5,9\},\{1,4,8\},\{1,4,9\}$.

二、解答题（13 题满分 14 分，14、15 题满分各 20 分，合计 54）

13. 已知抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F， $P(m,n)$ $(m\neq0)$ 是 E 的动点，过 P 点作 E 的切线 l，直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A,B 两个不同的点，记 AB 的中点为 D. 设直线 OD(O 为原点）与直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 交于 Q.

（1）证明直线 $y=-\dfrac{pb^2}{a^2}$ 与直线 PQ 垂直；

（2）若 l 与 FQ 交于 G，且 $a=2b$，证明 $1<\dfrac{S_{\Delta FPG}}{S_{\Delta PGQ}}<2$.

解 （1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$。由于 P 在抛物线上，所以 $n=\dfrac{m^2}{2p}$. 由 $x^2=2py$ 两边关于 x 求导数得， $y'=\dfrac{x}{p}$，所以切线 l 的斜率 $k=\dfrac{m}{p}$，其方程为 $y=\dfrac{m}{p}x-\dfrac{m^2}{2p}$。……（3 分）

联立方程 $\begin{cases}y=\dfrac{m}{p}x-\dfrac{m^2}{2p}\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 变形得

$4(a^2m^2+b^2p^2)x^2-4a^2m^3x+a^2(m^4-4p^2b^2)=0$ ……①

显然 x_1,x_2 为方程①的两根，则 $x_1+x_2=\dfrac{a^2m^3}{a^2m^2+p^2b^2}$, $y_1+y_2=-\dfrac{m^2b^2p}{a^2m^2+p^2b^2}$，

所以 D 点坐标为 $(\dfrac{a^2m^3}{2(a^2m^2+p^2b^2)},-\dfrac{m^2b^2p}{2(a^2m^2+p^2b^2)})$.

因此，直线 OD 的方程为 $y=-\dfrac{b^2p}{a^2m}x$， ……（6 分）

联立方程 $\begin{cases}y=-\dfrac{b^2p}{a^2m}x\\ y=-\dfrac{b^2p}{a^2}\end{cases}$ 得 Q 的横坐标 $x=m$ ，

所以直线 $y=-\frac{pb^2}{a^2}$ 与 PQ 垂直。 ……（8 分）

（2）当 $a=2b$ 时，直线 $y=-\frac{pb^2}{a^2}$，即 $y=-\frac{p}{4}$ 介于 x 轴与抛物线准线之间的平行线。延长 PQ 交抛物线的准线 $y=-\frac{p}{2}$ 于 H 点，则 H 点的坐标为 $(m,-\frac{p}{2})$； F 点的坐标为 $(0,\frac{p}{2})$，则直线 HF 的斜率为 $k_{HF}=-\frac{p}{m}$。又直线 l 的斜率为 $k=\frac{m}{p}$，所以 $l\perp PF$.

由抛物线的定义，$PF=PH=\frac{m^2}{2p}+\frac{p}{2}, PQ=PH-\frac{p}{4}=\frac{m^2}{2p}+\frac{p}{4}$. 所以，$\triangle PFH$ 为等腰三角形，由此得直线 l 平分 $\angle FPH$. ……（11 分）

由角平分线性质可知

$\frac{S_{\triangle FPG}}{S_{\triangle PGQ}}=\frac{FG}{GQ}=\frac{PF}{PQ}=\frac{2m^2+2p^2}{2m^2+p^2}$，所以 $1<\frac{S_{\triangle FPG}}{S_{\triangle PGQ}}<2$. ……（14 分）

说明：第一问只给结果（垂直）没有过程不给分，取特殊值做，过程正确的给 3 分；第二问两个得分点，每个 3 分，用其他方法做的参照给分.

14. 将平面用水平和竖直的直线分成由 1×1 的正方形构成的网格。设 P 是由 2025 个小正方形构成的连通图形（连通是指从其中任何一格可以经过若干有公共边的方格走到另一格），记 $|\partial P|$ 为边界折线的长度。求 $|\partial P|$ 的最大可能值和最小可能值.

解 先考虑最大值。2025 个方格共 8100 条边，其中有些边重复计算了.

以 2025 个小正方形为顶点，若两个小正方形相邻则连边，得到一个 2025 个顶点的连通图，从而边数至少为 2024.

每条边对应一条重复计数的非边界的格边，因此边数至多为 8100−2024×2=4052. （5 分）

当这 2025 个正方形排成长条矩形时达到。 ……（10 分）

再考虑最小值。取包含 P 的最小矩形，记其长和宽分别为 s,t，则 $|\partial P|\geq 2(s+t)$

……（15 分）

而 $st\geq 2025$，所以 $|\partial P|\geq 2(s+t)\geq 4\sqrt{st}\geq 180$.

当这 2025 个正方形排成 45× 45 的正方形时达到. ……（20 分）

15. 设复系数多项式 $f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ 的根为 $z_1,z_2,\ldots,z_n$，且对某个正整数 $k\leq n$ 有

$$|z_1|\geq|z_2|\geq\ldots\geq|z_k|>1\geq|z_{k+1}|\geq\ldots\geq|z_n|.$$

证明：存在实数 $x\in[-1,1]$ 使得 $|f(x)|\geq\frac{1}{2^{n-1}}\Pi_{l=1}^{k}|z_l|$.

证明： 令

$$g(z)=f(z)\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}\right)^{-1},$$

则g也为n次多项式，且首项系数为$(-1)^k\prod_{i=1}^{k}\bar{z}_i$.

…… (5 分)

由切比雪夫不等式，存在$x\in[-1,1]$使得$|g(x)|\geq\frac{\prod_{i=1}^{k}|z_i|}{2^{n-1}}$. …… (10 分)

而对任意$|z|\leq 1$都有$\left|\frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}\right|\geq 1$，特别地，$\left|\frac{x-z_i}{1-\bar{z}_i x}\right|\geq 1$. …… (15 分)

所以$|f(x)|\geq|g(x)|\geq\frac{\prod_{i=1}^{k}|z_i|}{2^{n-1}}$. …… (20 分)