2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛江苏赛区预赛

一、填空题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1．方程 $x^{\log_4 x}=\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$ 的解集为__▲__．

2．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，S_n 是其前 n 项和．已知 $a_{2025}=S_{2025}=2025$，则 $d=$__▲__．

3．设 z 为复数，i 为虚数单位．若 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部为 0，则 $|z-3-4\mathrm{i}|$ 的最大值为__▲__．

4．$2\sin 20^\circ+\cos 10^\circ+\tan 20^\circ\cdot\sin 10^\circ=$__▲__．

5．在平面直角坐标系 xOy 中，F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点，P 是双曲线右支上一点，M 是 PF_2 的中点，且 $OM\perp PF_2$．若双曲线的离心率为 5，则 $\dfrac{PF_1}{PF_2}$ 的值为__▲__．

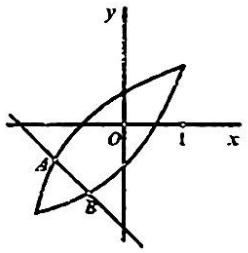
6．在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=CD=1$，$BC=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}$．沿直线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起，形成三棱锥 $D-ABC$．已知二面角 $B-AC-D$ 的大小为 120°，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为__▲__．

7．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5,BC=3,CA=4$，点 I 为 $\triangle ABC$ 内心．设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，若 $\overrightarrow{CI}=\alpha\cdot\overrightarrow{CA}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}$，则 $\alpha+\beta=$__▲__．

8．甲有 2 个白球和 1 个黑球，乙有 3 个白球．甲乙两人每次交换 1 个球，经过四次交换后，黑球仍然在甲的概率为__▲__．

9．已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2，$AB=2$，则 $\dfrac{CB}{CA}$ 的范围为__▲__．

10．如图，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+1$ 与 $g(x)=\ln(x+\mathrm{e}-1)$ 的部分图像组成封闭曲线 C．设斜率为 -1 的直线与封闭曲线 C 相交于 A,B 两点，则 AB 的最大值为__▲__．



（第 10 题图）

11．设 $\tau(d)$ 表示正整数 d 的所有正因数的个数，例如 6 有 4 个正因数：1，2，3，6，则 $\tau(6)=4$．设 $f(n)=\sum\limits_{d\mid n}\tau(d)$，其中 $\sum\limits_{d\mid n}$ 表示 d 取遍 n 的所有正因数求和．例如

$$f(6)=\sum_{d\mid 6}\tau(d)=\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\tau(6)=1+2+2+4=9.$$

则 $f(100)$ 的值为__▲__．

12. 设函数$f(x)$定义在$[0,+\infty)$上，$f(2)=0$，$f(x)\geqslant 0$，且当$0\leqslant x<2$时，$f(x)\neq 0$.

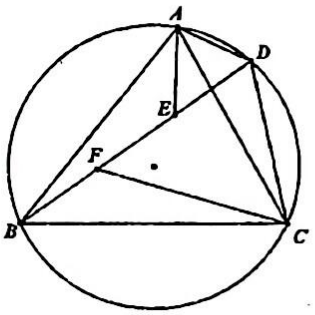
若$f(xf(y))\cdot f(y)=f(x+y)$，则$f\left(\frac{20}{11}\right)+f\left(\frac{25}{11}\right)=$__▲__.

二、解答题：本大题共4小题，每小题15分，共60分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 设A,B,C为$\triangle ABC$的三个内角，求$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$的最大值.

14. 如图，在圆内接四边形$ABCD$中，点E,F在对角线BD上，满足$DE=BF$.

若$\angle DAE=\angle CAB$，求证$\angle DCF=\angle ACB$.



（第14题图）

15. 设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

证明：当$n\geqslant 2$时，$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

16. 有9支队伍进行单循环赛（任意两队之间进行一场比赛）. 在比赛了一阶段后进行统计，发现任意3支队伍之间最多进行了两场比赛，求此时这9支队伍之间的比赛总场次的最大值，并说明理由.

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛江苏赛区预赛参考解析

一、填空题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 方程 $x^{\log_4 x}=\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$ 的解集为_____.

解：$\{2,8\}$.

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，S_n 是其前 n 项和. 已知 $a_{2025}=S_{2025}=2025$，则 $d=$____.

解：2.

3. 设 z 为复数，i 为虚数单位. 若 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部为 0，则 $|z-3-4\mathrm{i}|$ 的最大值为_____.

解：6.

4. $2\sin 20^\circ+\cos 10^\circ+\tan 20^\circ\cdot\sin 10^\circ=$_____.

解：$\sqrt{3}$.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点，P 是双曲线右支上一点，M 是 PF_2 的中点，且 $OM\perp PF_2$. 若双曲线的离心率为 5，则 $\dfrac{PF_1}{PF_2}$ 的值为_____.

解：$\dfrac{4}{3}$.

6. 四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=CD=1$，$BC=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}$. 沿直线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起，形成三棱锥 $D-ABC$. 已知二面角 $B-AC-D$ 的大小为 120°，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为_____.

解：$\dfrac{1}{8}$.

7. $\triangle ABC$ 中，$AB=5,BC=3,CA=4$，点 I 为 $\triangle ABC$ 内心. 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，若 $\overrightarrow{CI}=\alpha\cdot\overrightarrow{CA}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}$，则 $\alpha+\beta=$_____.

解：$\dfrac{11}{12}$.

8. 甲有 2 个白球和 1 个黑球，乙有 3 个白球. 甲乙两人每次交换 1 个球，经过四次交换后，黑球仍然在甲的概率为_____.

解：$\dfrac{41}{81}$.

9、已知$\triangle ABC$的面积为2，$AB=2$，则$\dfrac{CB}{CA}$的范围为_____.

解：$\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$.

10. 如图，函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+1$与$g(x)=\ln(x+\mathrm{e}-1)$的部分图像组成封闭曲线$C$. 设斜率为$-1$的直线与封闭曲线$C$相交于$A,B$两点，则$AB$的最大值为_____.

解：$\sqrt{2}(\mathrm{e}-2)$.

11. 设$\tau(d)$表示正整数d的所有正因数的个数，例如6有4个正因数：$1,2,3,6$，则$\tau(6)=4$. 设$f(n)=\sum\limits_{d\mid n}\tau(d)$，其中$\sum\limits_{d\mid n}$表示$d$取遍$n$的所有正因数求和. 例如

$$f(6)=\sum_{d\mid 6}\tau(d)=\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\tau(6)=1+2+2+4=9.$$

则$f(100)$的值为_____.

解：36.

12. 设函数$f(x)$定义在$[0,+\infty)$上，$f(2)=0$，$f(x)\geqslant 0$，且当$0\leqslant x<2$时，$f(x)\neq 0$. 若$f(xf(y))\cdot f(y)=f(x+y)$，则$f\left(\dfrac{20}{11}\right)+f\left(\dfrac{25}{11}\right)=$_____.

解：11.

二、解答题：本大题共4小题，每小题15分，共60分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 设A,B,C为$\triangle ABC$的三个内角，求$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$的最大值.

解：由$A+B+C=\pi$知$\cos^2C=\cos^2(A+B)$，于是

$$\begin{aligned}&\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\\=&\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\\=&\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\end{aligned}$$

……（5分）

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1]$$

$$=-\cos^2(A+B)-\cos(A-B)\cos(A+B)+2$$

$$=-\left[\cos(A+B)+\frac{\cos(A-B)}{2}\right]^2+2+\frac{\cos^2(A-B)}{4}$$

……（10 分）

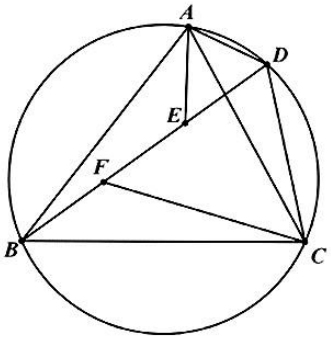
$$\leqslant 2+\frac{\cos^2(A-B)}{4}\leqslant 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.$$

当且仅当$\cos(A-B)=1$，$\cos(A+B)=-\frac{1}{2}$，即$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时原式取最大值$\frac{9}{4}$.

……（15 分）

14．如图，在圆内接四边形$ABCD$中，点E,F在对角线BD上，满足$DE=BF$.

若$\angle DAE=\angle CAB$，求证$\angle DCF=\angle ACB$.



证：由A,B,C,D共圆知$\angle ADE=\angle ADB=\angle ACB$.

由已知$\angle DAE=\angle CAB$，所以$\triangle AED\backsim\triangle ABC$.

于是$\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}$.

……（5 分）

由已知$ED=BF$，所以$\frac{AD}{AC}=\frac{BF}{BC}$.

再由A,B,C,D共圆知$\angle DAC=\angle FBC$，所以$\triangle DAC\backsim\triangle FBC$.

……（10 分）

于是$\angle DCA=\angle FCB$.

进而$\angle DCA+\angle ACF=\angle ACF+\angle FCB$，即$\angle DCF=\angle ACB$.

……（15 分）

15．设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

证明：当$n\geqslant 2$时，$\dfrac{1}{\sqrt{2n}+1}<a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

证：由题设可知$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{a_1}=1$，$a_3=\dfrac{1}{a_1+a_2}=\dfrac{1}{2}$.

当$n\geqslant 2$时，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\dfrac{1}{a_n}+a_n$.

因此$\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{1}{a_n^2}+a_n^2+2$.

……（5 分）

于是，当$n\geqslant 2$时

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}^2}&=\frac{1}{a_2^2}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2}-\frac{1}{a_k^2}\right)\\&=1+\sum_{k=2}^{n}(a_k^2+2)\\&=2n-1+\sum_{k=2}^{n}a_k^2\\&\geqslant 2n-1+a_2^2=2n.\end{aligned}$$

由此$a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

……（10 分）

另一方面，$a_3=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\sqrt{2\times 2}+1}$．当$n\geqslant 3$时

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}&=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{n}a_k\\&\leqslant 2+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\sqrt{2(k-1)}}\\&<2+\sum_{k=3}^{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k-2}}\\&=2+\sqrt{2}\left(\sqrt{n-1}-1\right)<\sqrt{2n}+1.\end{aligned}$$

于是当$n\geqslant 2$时，皆有$a_{n+1}>\dfrac{1}{\sqrt{2n}+1}$.

……（15 分）

16. 有9支队伍进行单循环赛（任意两队之间进行一场比赛）. 在比赛了一阶段后进行统计，发现任意3支队伍之间最多进行了两场比赛，求此时这9支队伍之间的比赛总场次的最大值，并说明理由.

解：最多已比赛20场.

设$n=9$. 用n个点代表n支队伍，若某两支队伍之间进行了比赛，就在这两个队伍对应的顶点之间连一条边，这样就得到了一个n个顶点的简单图G，其边数设为e.

设v是图G中度最大的顶点，与v相邻的顶点集合记为B，B中有k个元素，其他顶点的集合记为C，则C中有$n-1-k$个元素.

……（5分）

对于B中的任意两点不能连线，否则的话，它们与v构成三角形，表示它们对应的3个队伍之间进行了3场比赛，与已知矛盾. 于是B中的每个点至多连出$n-k$条边. 对于C中的任意点u，至多连出k条边，所以

$$e\leqslant\frac{1}{2}[k+k(n-k)+(n-k-1)k]=k(n-k)\leqslant\frac{n^2}{4}.$$

而e为整数，所以$e\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.（这里$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数.）

当$n=9$时，$e\leqslant 20$.

……（10分）

下面说明20可以取到：

把9个队伍分成A,B两组，$A=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$B=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$. 同组之间不安排比赛，不同组之间的两队$(v_i,u_j)$都进行一场比赛，共$4\times5=20$场比赛.

……（15分）