2025 年全国中学生奥林匹克数学竞赛（广东赛区初赛）暨广东省中学生数学奥林匹克竞赛一试试题

一、填空题：本题组共 10 小题，每题 8 分，满分 80 分.

1. 已知 $e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln xy$，则 $x+y=$_____.

2. 随机选择正八面体的三个面，这三个面的中心构成的三角形是正三角形的概率为_____.

3. 已知三角形 ABC 的外心 O 满足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=0$，则 $\sin A=$_____.

4. 已知三次多项式 $f(x)$ 满足 $f(m)=\dfrac{1}{m},(m=1,2,3,4)$，则 $f(5)=$_____.

5. 设 $ABCD$ 是一个正方形，点 E 在正方形内，满足 $AE\perp DE$，且 $\angle EBC=\angle EAB+45^\circ$. 若 $AE=1$，则 BE 的长度为_____.

6. 已知正实数 a,b 满足对任意的实数 x 均有 $a\cos 2x-b\cos x\geq -2$，则 $2a+b$ 的最大值为_____.

7. 定义在 R 上的函数 $f(x),g(x)$ 满足：

$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$，$g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$g(0)\neq\dfrac{1}{2}$

$g(x)$ 为偶函数，且 $g(x)>0$ 恒成立，已知 $f(2)+g(2)=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$，则 $f(8)-g(8)=$_____.

8. 平面上有三个同心圆 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$，半径分别为 $1,2,3$. 任取三个点 A_1,A_2,A_3，满足点 A_i 在圆 Γ_i 上 $(i=1,2,3)$，则 $|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1|^2$ 的最大值为_____.

9. 已知双曲线 $G:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 与 G 的左右两支分别交于 A,B 两点，点 $Q(-1,2)$ 不在 l 上，直线 AQ、BQ 分别交 G 于另一点 C、D. 若 $CD\parallel l$，则 G 的离心率为_____.

10. 从集合 $S=\{1,2,3,\ldots,30\}$ 中选出个位数字互不相同的 10 个数 $x_1,x_2,\ldots,x_{10}$，其中任意两个数相差不为 3 或 27. 这样的 10 元子集 $T=\{x_1,x_2,\ldots,x_{10}\}$ 共有_____种不同的取法.

二、解答题：本题组共 2 小题，每题 20 分，共 40 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

11. 已知数列满足：$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geq 1)$. 定义：

$$b_n=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2,\quad c_n=a_n^2+(-1)^n$$

（1）求 b_{2025} 的值.

（2）是否存在实数 r，使得 $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{c_k}<r$，对任意 $n\geq 2$ 恒成立？若存在，求出 r 的取值范围；若不存在，请说明理由.

12. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$，其左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 的直线 l 与双曲线右支交于 A、B 两点，P、Q 分别为 ΔAF_1F_2 和 ΔBF_1F_2 的内心，设直线 AP、BQ 分别与 x 轴交于 D、E.

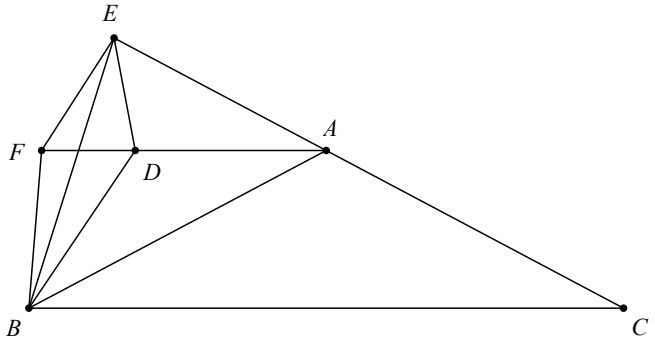
（1）求四边形 PF_1QF_2 面积 S 的取值范围；

（2）求 DE 的取值范围.

2025 年全国中学生奥林匹克数学竞赛(广东赛区初赛)
暨广东省中学生数学奥林匹克竞赛
加试试题

三、加试题：本题组共 2 题，每题 40 分，共 80 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 如图，ΔABC 与 ΔDBA 是等腰三角形，其中 $AB=AC$，$DA=DB$，$AD \parallel BC$．E 在 CA 延长线上，满足 $\angle DEB=\angle DAE$．在 AD 延长线上取一点 F，使得 $AF=BE$，求证：$EFBC$ 四点共圆.



14. 已知非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=4$．求下列表达式的最大值：

$$S=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}\sum_{i=1}^{5}x_i.$$

2025年全国中学生奥林匹克数学竞赛(广东赛区初赛)
一试答案及评分标准

一、填空题：本题组共10小题，每题8分，满分80分.

1. 已知$e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln xy$，则$x+y=$_____

【答案】2

2. 随机选择正八面体的三个面，这三个面的中心构成的三角形是正三角形的概率为_____。

【答案】$\frac{1}{7}$

3. 已知三角形ABC的外心O满足$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=0$，则$\sin A=$_____

【答案】$\frac{\sqrt{15}}{4}$

4. 已知三次多项式$f(x)$满足$f(m)=\frac{1}{m},(m=1,2,3,4)$，则$f(5)=$_____

【答案】0

5. 设$ABCD$是一个正方形，点E在正方形内，满足$AE\perp DE$，且$\angle EBC=\angle EAB+45^\circ$。若$AE=1$，则$BE$的长度为_____。

【答案】$\sqrt{2}$

6.已知正实数a,b满足对任意的实数x均有$a\cos 2x-b\cos x\geq -2$，则$2a+b$的最大值为_____。

【答案】$2\sqrt{3}+2$

7. 定义在R上的函数$f(x),g(x)$满足：

$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$，$g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$g(0)\neq\frac{1}{2}$

$g(x)$为偶函数，且$g(x)>0$恒成立，已知$f(2)+g(2)=\frac{\sqrt{5}}{15}$，则$f(8)-g(8)=$_____.

【答案】-2025

8. 平面上有三个同心圆$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$，半径分别为$1,2,3$。任取三个点$A_1,A_2,A_3$，满足点$A_i$在圆$\Gamma_i$上$(i=1,2,3)$，则$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1|^2$的最大值为_____。

【答案】42

9. 已知双曲线 $G:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与 G 的左右两支分别交于 A,B 两点，点 $Q(-1,2)$ 不在 l 上，直线 AQ、BQ 分别交 G 于另一点 C、D，.若 $CD/\!/l$，则 G 的离心率为_____.

【答案】$\sqrt{2}$

10. 从集合 $S=\{1,2,3,\ldots,30\}$ 中选出个位数字互不相同的10个数 $x_1,x_2,\ldots,x_{10}$，其中任意两个数相差不为 3 或 27。这样的10元子集 $T=\{x_1,x_2,\ldots,x_{10}\}$ 共有_____种不同的取法.

【答案】1026

二、解答题：本题组共 2 小题，每题 20 分，共 40 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

11. 已知数列满足：$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geq 1)$. 定义：$b_n=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2$，$c_n=a_n^2+(-1)^n$.

（1）求 b_{2025} 的值.

（2）是否存在实数 r，使得 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{c_k}<r$，对任意 $n\geq 2$ 恒成立？若存在，求出 r 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【解答】（每问 10 分）

（1）

方法一：数学归纳法

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3a_1-a_2^2=2\times 1-1^2=1,\\ b_2 &= a_4a_2-a_3^2=3\times 1-2^2=-1,\\ b_3 &= a_5a_3-a_4^2=5\times 2-3^2=1. \end{aligned}$$

猜想：$b_n=(-1)^{n+1}$.

假设 $n=k$ 时结论成立，即 $b_k=(-1)^{k+1}$,

当 $n=k+1$ 时，

$$b_{k+1}=a_{k+3}a_{k+1}-a_{k+2}^2=(a_{k+2}+a_{k+1})a_{k+1}-a_{k+2}^2$$

$$=-a_{k+2}(a_{k+2}-a_{k+1})+a_{k+1}^2=-a_{k+2}a_k+a_{k+1}^2=-b_k=(-1)^{k+2}$$ .....5 分

由数学归纳法知：$b_n=(-1)^{n+1}$，故 $b_{2025}=1$. .....10 分

注：写 $b_n=(-1)^{n-1}$ 也可.

方法二：递推法

$$b_{n+1} = a_{n+3}a_{n+1} - a_{n+2}^2 = (a_{n+2} + a_{n+1})a_{n+1} - a_{n+2}^2$$

$$= -a_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_{n+1}^2 = -a_{n+2}a_n + a_{n+1}^2 = -b_n$$ .....5 分

因此$\{b_n\}$ 是公比为 -1 的等比数列.由初始值 $b_1 = 1$，得通项：$b_n = (-1)^{n+1}$.

$b_{2025} = (-1)^{2025+1} = 1$. .....10 分

方法三：通项公式法

用特征根法可得数列$\{a_n\}$通项公式为：

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\alpha\beta = -1, \alpha + \beta = 1$.....5 分

代入 $b_n = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2$，逐项化简：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5}[(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2] \\ &= \frac{1}{5}[\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^n\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n - \alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}] \\ &= \frac{1}{5}[-(\alpha\beta)^n(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha\beta)^{n+1}] \\ &= \frac{1}{5}[-(-1)^n \cdot 3 + 2(-1)^{n+1}] \quad (\because \alpha\beta = -1, \alpha^2 + \beta^2 = 3) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

所以$b_{2025} = 1$. .....10 分

（2）由（1）知：$b_{k-1} = a_{k+1}a_{k-1} - a_k^2 = (-1)^k \Rightarrow c_k = a_k^2 + (-1)^k = a_{k-1}a_{k+1}$.

$$\therefore \frac{1}{c_k} = \frac{1}{a_{k-1}a_{k+1}} = \frac{a_k}{a_{k-1}a_ka_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_{k-1}}{a_{k-1}a_ka_{k+1}} = \frac{1}{a_{k-1}a_k} - \frac{1}{a_ka_{k+1}}.$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{c_k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}a_k} - \frac{1}{a_ka_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_na_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_na_{n+1}}.$$

因数列 $\{a_n\}$ 严格递增且无界（$a_n \geq n$ 对 $n \geq 5$），故：

$$\frac{1}{a_na_{n+1}} > 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{c_k} = 1 - \frac{1}{a_na_{n+1}} < 1.$$ .....15 分

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{a_na_{n+1}} \to 0$，故 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{c_k} = 1$.

综上：存在实数 r 使得 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{c_k} < r$ 对所有 $n \geq 2$ 恒成立，且 r 取值范围是$[1, +\infty]$

.....20 分

【评分建议】

第 1 问满分 10 分：

证到：$b_{k+1}-b_k$得5分，或准确写出通项公式也给5分；

得到$b_{2025}=1$，且理由充分，给 10 分；

如果只是猜到$b_{2025}=1$，没有说理由不给分.

第 2 问满分 10 分：

证到$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{c_k}=1-\frac{1}{a_n a_{n+1}}$给5分，

得到r取值范围是$[1,+\infty)$且理由充分给10分；

没有说理由只是猜到结果不给分.

12. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$，其左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_2$的直线$l$与双曲线右支交于$A$、$B$两点，$P$、$Q$分别为$\Delta AF_1F_2$和$\Delta BF_1F_2$的内心，设直线$AP$、$BQ$分别与$x$轴交于$D$、$E$.

（1）求四边形PF_1QF_2面积S的取值范围；

（2）求DE的取值范围.

【解答】（每问 10 分）——每问均给出三种解法：

第（1）问解答：

方法一：

焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=2$

$|AF_1|=ex_A+a=2x_A+\sqrt{3}$，$|AF_2|=ex_A-a=2x_A-\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$.

$\triangle AF_1F_2$ 的内心为：$P\left(\frac{|AF_2|\cdot x_{F_1}+|AF_1|\cdot x_{F_2}+|F_1F_2|\cdot x_A}{|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|},\frac{|AF_2|\cdot y_{F_1}+|AF_1|\cdot y_{F_2}+|F_1F_2|\cdot y_A}{|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|}\right)$.

代入计算：$x_p=\frac{(2x_A-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})+(2x_A+\sqrt{3})(2\sqrt{3})+4\sqrt{3}x_A}{(2x_A+\sqrt{3})+(2x_A-\sqrt{3})+4\sqrt{3}}=\frac{12+4\sqrt{3}x_A}{4x_A+4\sqrt{3}.}=\sqrt{3}.$……5 分

同理：Q 的横坐标也为 $\sqrt{3}$，故直线 PQ 的方程为 $x=\sqrt{3}$.

∴四边形PF_1QF_2面积 $S=\frac{1}{2}|F_1F_2||PQ|=2\sqrt{3}|PQ|$，只需求$|PQ|$范围.

1° 当直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$. 代入双曲线方程得：

$$(3-k^2)x^2+4\sqrt{3}k^2x-(12k^2+9)=0.$$

利用韦达定理，交点 A 和 B 的横坐标满足：

$$x_A+x_B=\frac{-4\sqrt{3}k^2}{3-k^2}>0,\quad x_Ax_B=\frac{-(12k^2+9)}{3-k^2}>0,\text{得}k^2>3.$$

由于 F_1 和 F_2 在 x 轴上，$y_{F_1}=y_{F_2}=0$，内心 P 纵坐标简化为：

$$y_p=\frac{4\sqrt{3}\cdot y_A}{4x_A+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}y_A}{x_A+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot k(x_A-2\sqrt{3})}{x_A+\sqrt{3}}.$$

同理：$y_Q=\frac{\sqrt{3}k(x_B-2\sqrt{3})}{x_B+\sqrt{3}}$.

$$\therefore|PQ|=|y_p-y_Q|=\left|\frac{\sqrt{3}k(x_A-2\sqrt{3})}{x_A+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}k(x_B-2\sqrt{3})}{x_B+\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{9k(x_A-x_B)}{(x_A+\sqrt{3})(x_B+\sqrt{3})}\right|=\left|\frac{9k(x_A-x_B)}{x_Ax_B+\sqrt{3}(x_A+x_B)+3}\right|.$$

把$x_A+x_B=\frac{-4\sqrt{3}k^2}{3-k^2}$，$x_Ax_B=\frac{-(12k^2+9)}{3-k^2}$代入，化简后为：$|PQ|=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$.

结合$k^2>3$得：线段 $|PQ|$ 的取值范围为 $(2\sqrt{3},4)$

2° 当直线 l 的斜率不存在，直线 l 的方程为 $x=2\sqrt{3}$，可求得 $A(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$，得$y_p=\frac{\sqrt{3}\cdot y_A}{x_A+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

同理得$y_Q=-\sqrt{3}$，此时$|PQ|=2\sqrt{3}$

综上：$|PQ|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{3},4)$，S 的取值范围$[12,8\sqrt{3})$. ……10 分

说明：

① 设直线 l 的方程为$x=my+2\sqrt{3}$，可求得$m^2<\frac{1}{3}$，$|PQ|=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+m^2}\in[2\sqrt{3},4)$，也正确.

② 可以证明：对曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\triangle AF_1F_2$内切圆与 x 轴的切点为 $T(a,0)$.

方法二：

对 $\triangle AF_1F_2$，设内切圆与 x 轴的切点为 T，其横坐标为 x_T. 根据双曲线定义和内切圆性质：

$$|F_1T| - |F_2T| = |AF_1| - |AF_2| = 2a = 2\sqrt{3}$$

$$|F_1T| + |F_2T| = |F_1F_2| = 4\sqrt{3}$$

联立解得：$|F_1T| = 3\sqrt{3}$，$|F_2T| = \sqrt{3}$，

$\therefore$T 的横坐标为：$x_T = x_{F_1} + |F_1T| = -2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$. ……5 分

同理，$\triangle BF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴的切点横坐标也为 $\sqrt{3}$，

故直线 PQ 的方程为 $x = \sqrt{3}$，恒过定点$(\sqrt{3}, 0)$.

对 $\triangle AF_1F_2$，由面积公式得：$\frac{1}{2}(|AF_1| + |AF_2| + |F_1F_2|)r_p = \frac{1}{2}|F_1F_2||y_A|$

可得内切圆半径 $r_p = \frac{4\sqrt{3}|y_A|}{4x_A+4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}|y_A|}{x_A+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}y_A}{x_A+\sqrt{3}} (y_A > 0)$.

同理：对 $\triangle BF_1F_2$，内切圆半径 $r_Q = \frac{\sqrt{3}|y_B|}{x_B+\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}y_B}{x_B+\sqrt{3}} (y_B < 0)$.

$$\therefore |PQ| = r_P + r_Q = \left|\frac{\sqrt{3}y_A}{x_A+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}y_B}{x_B+\sqrt{3}}\right|.$$

下同解法一……10 分

方法三：用解法一或解法二得$x_P = x_Q = \sqrt{3}$……5 分

记 PQ 与 x 轴交于点 $T(\sqrt{3}, 0)$, 则$|F_2T|$ $=2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

连接 PF_2和 QF_2，F_2P 和 F_2Q 均为角平分线，设直线 l 倾斜角为 θ，通过几何关系得：

$|PQ| = |PT| + |QT| = |F_2T| \cdot \tan\angle PF_2T + |F_2T| \cdot \tan\angle QF_2T = \sqrt{3} \cdot \left(\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) + \tan\frac{\theta}{2}\right) =$

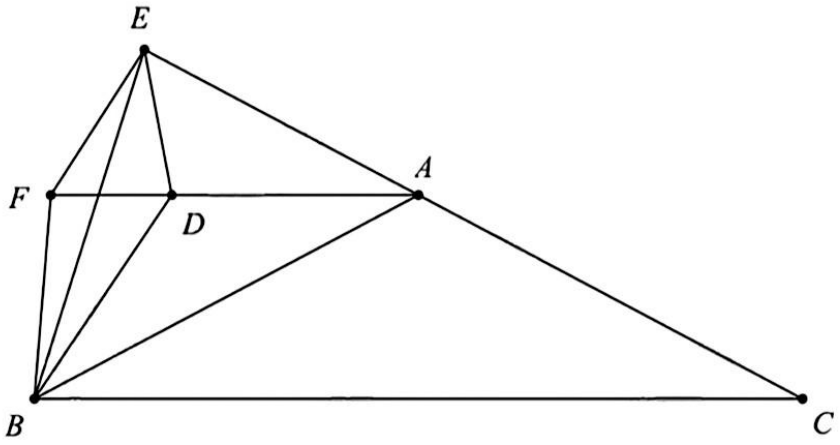
$\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$,

A、B 均在右支上，可知 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$，从而$\sin\theta \in (\sqrt{3}/2, 1]$，

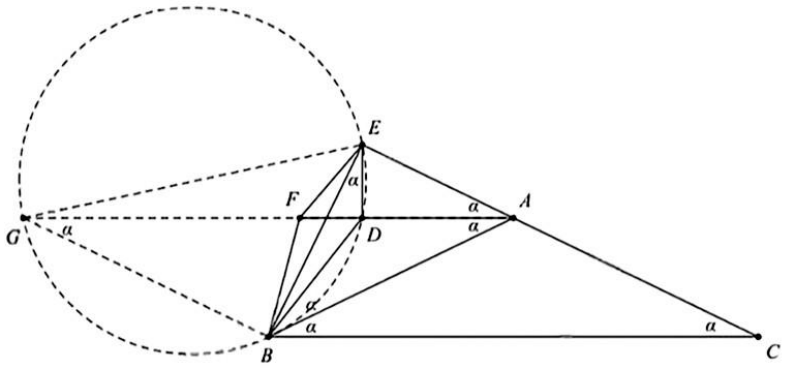
综上：$|PQ|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{3}, 4)$，S 取值范围$[12, 8\sqrt{3})$. ……10 分

2025 年全国中学生奥林匹克数学竞赛(广东赛区初赛)
加试答案及评分标准

1. 如图，ΔABC 与 ΔDBA 是等腰三角形，其中 $AB=AC$，$DA=DB$，$AD\ /\!/\ BC$．E 在 CA 延长线上，满足 $\angle DEB=\angle DAE$．在 AD 延长线上取一点 F，使得 $AF=BE$，求证：$EFBC$ 四点共圆.



【详解】



【第一部分】

如图，延长 AD 到 G，使得 $\angle BGA=\angle BAG$，连接 GB,GE

$\because AD\ /\!/\ BC$

$\therefore \angle DAB=\angle ABC$

$\therefore \angle DAB=\angle DBA=\angle ABC=\angle ACB=\angle BGA=\angle BED$,设为 α

$\Rightarrow EGBD$ 四点共圆，$EA\ /\!/\ GB$

$\therefore \angle GEB=\angle GDB=2\alpha=\angle EAB$

又 $EA\ /\!/\ GB$

$\therefore \angle AEB=\angle GBE$

$\Rightarrow \Delta EAB\backsim\Delta BEG$

$\therefore EB^2=EA\cdot GB=EA\cdot AB$ ……（20 分）

注：用其他方法得到这个结论也可以得到 20 分

【第二部分——法 1】

$\because EB^2=EA\cdot AB$

$\therefore FA^2=EB^2=EA\cdot BA$

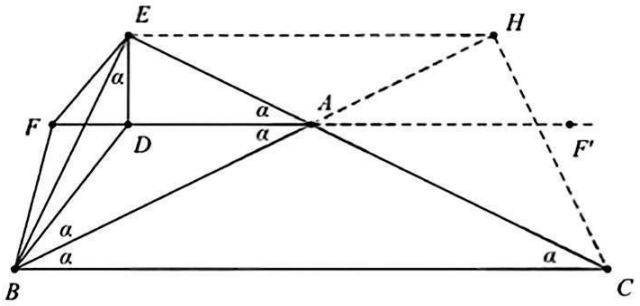
又 $\angle EAF = \angle FAB$

$\therefore \Delta EAF \backsim \Delta FAB$

$\therefore \angle FEA = \angle BFA = \pi - \angle FBC$

$\therefore EFBC$ 四点共圆 ……（40 分）

【第二部分——法 2】



过 E 做 $EH \parallel BC$ 交 AB 于 H 连接 HC，作 F 关于 A 的对称点 F'

$\because \angle AEH = \angle AHE = \angle ABC = \angle ACB$

$\therefore EHCB$ 为等腰梯形

$\because FF' \parallel EH$，知 $EHF'F$，$FF'CB$ 为等腰梯形

由于 $AF^2 = AF \cdot AF' = AE \cdot AB = AE \cdot AC$

$\therefore EFCF'$ 四点共圆，同理 $FBF'H$ 四点共圆

因此 $EFBCF'H$ 六点共圆

所以 $ECBF$ 四点共圆，证毕！……（40 分）

注：其他合适的方法从 $EA \cdot GB = EB^2$ 得到 $EFBC$ 四点共圆也可得到 40 分

2. 已知非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=4$. 求下列表达式的最大值：

$$S=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}\sum_{i=1}^{5}x_i.$$

【详解】

当 $x_1=x_2=x_3=x_4=1,x_5=0$ 时，$S=12$. ……（10 分）

下面证明 $S\le 12$.

注意到 $\frac{x(x-1)^2}{(x+1)}\ge 0$，对 $x\ge 0$ 成立，由此可得：$\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i(x_i-1)^2}{x_i+1}\ge 0$. ……（20 分）

展开可知：$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i^2-3x_i+4-\frac{4}{x_i+1}\right)\ge 0$.

由条件整理得到：$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+1}\le 6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i$. ……（30 分）

由上式及均值不等式可知：$S\le\frac{4}{3}\left(6-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\left(\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)\le\frac{4}{3}\times 3^2=12$. ……（40 分）