2025年全国中学生数学联赛山东赛区初赛

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 在递增的等差数列$\{a_n\}$中，若a_2,a_3,a_5,a_k依次成等比数列，则整数k的值为_____.

2. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=1$，$BC=2$，$CC_1=3$，则四面体$A-B_1CD_1$的体积为_____.

3. 设实数x,y满足$\sin x+\cos y=1$，则$\cos x+\sin y$的最大值为_____.

4. 已知正数a,b,c满足$abc>1$，则$\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$的最小值为_____.

5. 在平面直角坐标系xOy中，已知函数$y=f(x)$的图像既关于点$(2,2)$中心对称，又关于直线$x+y=0$对称．若$f(x)=\sqrt{4-x^2}\,(0<x<2)$，则$f\left(\dfrac{80}{13}\right)$的值为_____.

6. 已知z为复数，则满足方程$\left(z-z^2\right)\left(1-z+z^2\right)^2=\dfrac{1}{7}$的全部根为_____.

7. 在3×3的方格棋盘中，一枚棋子占据一个方格，且两枚棋子不能占据同一方格．小明随机放入5枚棋子，其中任两枚棋子所在方格不能恰好共用一个方格顶点的概率为_____.

8. 对任意实数x，分别用记号$\lfloor x\rfloor$和$\lceil x\rceil$表示不超过x的最大整数和不小于x的最小整数．若$|x|\le2025$，则满足方程$x^3+1=\lfloor x\rfloor\cdot x\cdot\lceil x\rceil$的不同实数$x$的个数为_____.

二、解答题：本大题共5小题，满分136分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分） 已知关于x的三次方程$x^3-20x^2+25x-2=0$.

(1) 证明：该方程有三个互不相同的实数解$\alpha<\beta<\gamma$；

(2) 试求$P=\left(\log_{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right)\cdot\left(\log_{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}(\alpha\beta\gamma)\right)\cdot\left(\log_{\alpha\beta\gamma}(\alpha+\beta+\gamma)\right)$的值.

10.（本题满分20分） 给定正实数p．在平面直角坐标系xOy中，已知抛物线

$$\Gamma:y^2+2px+2my=2m+5$$

上的两个不同点$A(0,a),B(0,b)$．设m为任意实数，点C的坐标为$(1,2)$.

(1) 写出Γ的开口朝向．请直接回答“x轴”或“y轴”的“正”或“负”方向即可，无需理由；

(2) 判断ΔABC的外接圆是否经过异于C的定点D．请求出D点坐标或证明D点不存在.

11.（本题满分20分） 考虑一个四面体，

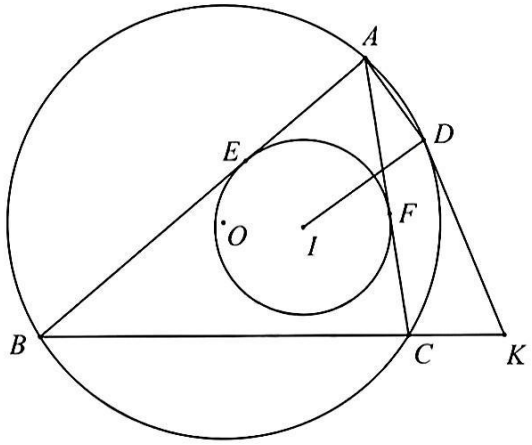
（1）若该四面体各棱长均为1或2，但不是正四面体，求该四面体体积的所有可能值；

（2）给定两正实数 a 和 b $(0<a<b)$，若存在一个四面体，它恰有两条棱长为 a，且该两棱共点，其余各棱长均为 b，试用 a 和 b 表示该四面体的体积，并求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

12.（本题满分40分） 如图所示，已知 ΔABC 内接于 $\odot O$，$\odot I$ 与 AB, AC 分别相切于点 E, F，点 D 在 $\odot O$ 上且满足 $\angle ADI=90°$，$\odot O$ 在点 D 处的切线交 BC 于点 K.

求证：点 K 对 $\odot I$ 与 $\odot O$ 等幂.

注：点到圆的幂是指该点到圆心的距离与半径的平方差.



13.（本题满分40分） 记 $[2025]=\{1,2,\cdots,2025\}$. 设集合族 $\mathcal{F}$ 由 $[2025]$ 的若干个元素个数不超过2的子集构成，且满足 $\varnothing\in\mathcal{F}$. 记 $\mathcal{F}_j=\{F\in\mathcal{F}\,|\,|F|=j\}(j=0,1,2)$. 对 $i=0,1$，已知：若集合 $X\in\mathcal{F}_i$，则 $\mathcal{F}_{i+1}$ 中至少有13个不同集合 Y 满足 $X\subseteq Y$.

（1）求 $\mathcal{F}$ 所含子集个数 $|\mathcal{F}|$ 的最小可能值 f；

（2）当 $|\mathcal{F}|=f$ 时，求不同集合族 $\mathcal{F}$ 的个数.

2025年全国中学生数学联赛山东赛区初赛

参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11题5分为一个档次，12、13题10分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1.在递增的等差数列$\{a_n\}$中，若a_2,a_3,a_5,a_k依次成等比数列，则整数k的值为_____.

【答案】9.

解：设$a_3=a$且公差是$d>0$，则由a_2,a_3,a_5依次成等比数列可知：

$$a_3^2=a_2a_5\Rightarrow a^2=(a-d)(a+2d)\Rightarrow ad=2d^2\Rightarrow a=2d\Rightarrow a_n=(n-1)d.$$

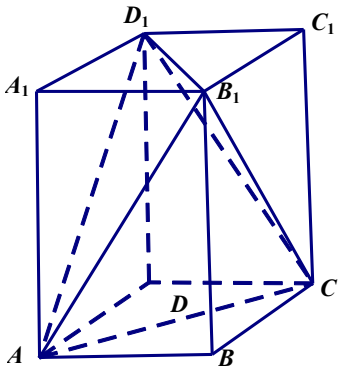
又因为a_3，a_5，a_k依次成等比数列，从而$2d\times(k-1)d=16d^2$，所以故$k=9$.

2.在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=1$，$BC=2$，$CC_1=3$，则四面体$A-B_1CD_1$的体积为_____.

【答案】2.

解：对长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$进行割补可知：

$$V_{A-B_1CD_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{A_1-AB_1D_1}-V_{B-AB_1C}-V_{C_1-B_1CD_1}-V_{D-ACD_1}=6-1-1-1-1=2.$$



3.设实数x,y满足$\sin x+\cos y=1$，则$\cos x+\sin y$的最大值为_____.

【答案】$\sqrt{3}$.

解：注意到

$$(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2=2+2\sin(x+y)\le 4,$$

则由$\sin x+\cos y=1$可知$\cos x+\sin y\le\sqrt{3}$，当$(x,y)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$时$\cos x+\sin y$取到最大值$\sqrt{3}$.

4. 已知正数a,b,c满足$abc>1$，则$\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$的最小值为_____.

【答案】16.

解： 设$\lambda=\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}>0$，整理可得：$a+b+c+8=\lambda-\dfrac{\lambda}{abc}$，

即$a+b+c+\dfrac{\lambda}{abc}=\lambda-8$，由均值不等式可得：

$$a+b+c+\frac{\lambda}{abc}\geq 4\cdot\sqrt[4]{abc\cdot\frac{\lambda}{abc}}=4\sqrt[4]{\lambda},$$

从而$\lambda-8\geq 4\cdot\sqrt[4]{\lambda}$，令$k=\sqrt[4]{\lambda}>0$，则不等式变为$k^4-4k-8\geq 0$，由于$f(k)=k^4-4k-8=(k-2)\left(k^3+2k^2+4k+4\right)\geq 0$，从而$k\geq 2$，即$\sqrt[4]{\lambda}\geq 2$，$\lambda\geq 2^4=16$.

综上所述，$\dfrac{abc(a+b+c+8)}{abc-1}$的最小值为16，当$a=b=c=2$时取到.

5.在平面直角坐标系xOy中，已知函数$y=f(x)$的图像既关于点$(2,2)$中心对称，又关于直线$x+y=0$对称．若$f(x)=\sqrt{4-x^2}(0<x<2)$，则$f\left(\dfrac{80}{13}\right)$的值为_____.

【答案】$\dfrac{94}{13}$.

解： 反复利用已知的两种对称性可得

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-(x-4k)^2}+4k, & \text{若}4k<x<4k+2(k\in\mathbb{Z})\\ -\sqrt{4-(x-4k)^2}+4k, & \text{若}4k-2<x<4k(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

又因为$\dfrac{80}{13}\in(4\times 2-2,4\times 2)$，所以$f\left(\dfrac{80}{13}\right)=-\sqrt{4-\left(\dfrac{80}{13}-8\right)^2}+8=\dfrac{94}{13}$.

6.已知z为复数，则满足方程$\left(z-z^2\right)\left(1-z+z^2\right)^2=\dfrac{1}{7}$的全部根为_____.

【答案】$z_k=\dfrac{1}{-2i\sin\dfrac{k\pi}{7}\left(\cos\dfrac{k\pi}{7}-i\sin\dfrac{k\pi}{7}\right)}$，$k=1,2\cdots,6$.

解： 由二项式定理展开可知：$(x+y)^7=x^7+y^7+7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2$，

从而$(1-z)^7=1^7-z^7-7z(1-z)\left(1-z+z^2\right)^2$，故原方程等价于$(1-z)^7=-z^7$，

即$\left(-\dfrac{1}{z}+1\right)^7=1$，进而可知$-\dfrac{1}{z_k}+1=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7},k=1,\cdots,6$，

因此，$\dfrac{1}{z_k}=1-\cos\dfrac{2k\pi}{7}-i\sin\dfrac{2k\pi}{7}=2\sin^2\dfrac{k\pi}{7}-2i\sin\dfrac{k\pi}{7}\cos\dfrac{k\pi}{7}$，

从而，$z_k=\dfrac{1}{-2i\sin\dfrac{k\pi}{7}\left(\cos\dfrac{k\pi}{7}-i\sin\dfrac{k\pi}{7}\right)}$，$k=1,2\cdots,6$.

7. 在3×3的方格棋盘中，一枚棋子占据一个方格，且两枚棋子不能占据同一方格．小明随机放入5枚棋子，其中任两枚棋子所在方格不能恰好共用一个方格顶点的概率为_____.

【答案】$\frac{2}{21}$.

解： 如下图所示将9个方格分类，一个A类和一个B类方格不会恰好共用一个顶点.

A	B	A
B	A	B
A	B	A

不难看出棋子至多占据4个A类方格和2个B类方格. 由于

⑴若棋子占据3个A类方格和2个B类方格，则有$4\times2=8$种摆放方式；

⑵若棋子占据4个A类方格和1个B类方格，则有$1\times4=4$种摆放方式.

因此小明随机放入的5枚棋子中，任两枚棋子所在方格不能恰好共用一个顶点的概率为$\frac{8+4}{C_9^5}=\frac{2}{21}$.

8. 对任意实数x，分别用记号$\lfloor x\rfloor$和$\lceil x\rceil$表示不超过x的最大整数和不小于x的最小整数. 若$|x|\le 2025$，则满足方程$x^3+1=\lfloor x\rfloor\cdot x\cdot\lceil x\rceil$的不同实数$x$的个数为_____.

【答案】4047.

解： 不难看出任何整数x均不满足要求. 构造函数$f(x)=x^3+1-\lfloor x\rfloor\cdot x\cdot\lceil x\rceil(x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$，则对任意整数$k$，均有$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f(k-\varepsilon)=1+k^2$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f(k+\varepsilon)=1-k^2$.

又因为函数$f(x)$在定义域的每个区间内分别单调递增，所以对任意整数k：

⑴ 若$k\in\{0,\pm1\}$，则区间$(k,k+1)$内没有满足要求的x；

⑵ 若$|k|\ge2$，则区间$(k,k+1)$内恰有一个满足要求的x.

综上所述，当$|x|\le2025$时，满足要求的不同实数x的个数为4047.

二、解答题：本大题共5小题，满分136分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

9. (本题满分16分) 已知关于x的三次方程$x^3-20x^2+25x-2=0$.

⑴ 证明：该方程有三个互不相同的实数解$\alpha<\beta<\gamma$；

⑵ 求$P=\left(\log_{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right)\cdot\left(\log_{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}(\alpha\beta\gamma)\right)\cdot\left(\log_{\alpha\beta\gamma}(\alpha+\beta+\gamma)\right)$的值.

⑴ **证明：** 构造函数$f(x)=x^3-20x^2+25x-2(x\in\mathbb{R})$. 注意到：

$$f(0)=-2<0,\quad f(1)=4>0,\quad f(2)=-24<0,\quad f(20)=498>0,$$

根据零点存在（介值）定理可知：方程有三个互不相同的实数解α，β，γ使得

$$0<\alpha<1<\beta<2<\gamma<20,\text{ 满足要求.}$$

……8分

⑵ **解：** 由韦达定理得$\alpha+\beta+\gamma=20$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=25$，$\alpha\beta\gamma=2$. 又因为$\alpha,\beta,\gamma>0$，所以

$$\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\quad \alpha\beta\gamma\text{都是不等于1的正实数.}$$

……12分

因此表达式P有定义，故由换底公式可得

$$P=\frac{\ln(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\ln(\alpha+\beta+\gamma)}\cdot\frac{\ln(\alpha\beta\gamma)}{\ln(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\cdot\frac{\ln(\alpha+\beta+\gamma)}{\ln(\alpha\beta\gamma)}=1.$$

……16分

10. (本题满分20分) 给定正实数 p. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线

$$\Gamma: y^2+2px+2my=2m+5$$

上的两个不同点 $A(0,a)$， $B(0,b)$. 设 m 为任意实数，点 C 的坐标为 $(1,2)$.

(1) 写出 Γ 的开口朝向.请直接回答“x 轴”或“y 轴”的“正”或“负”方向即可，无需理由；

(2) 判断 ΔABC 的外接圆是否经过异于 C 的定点 D.请求出 D 点坐标或证明 D 点不存在.

(1) **解**：抛物线 Γ 的开口朝向是 x 轴的负方向.

……5分

(2) **解**：圆 (ABC) 经过异于 C 的定点 $D(-2,-1)$.

……10分

设圆 $\Omega=(ABC)$ 的标准方程为 $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$. 因为 $C(1,2)$ 在 Ω 上，所以

$$5+\alpha+2\beta+\gamma=0. \qquad (*)$$

分别联立 Γ， Ω 与 y 轴可知 a,b 同时满足二次方程

$$\begin{cases}y^2+2my-(2m+5)=0\\ y^2+\beta y+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2m\\ \gamma=-(2m+5)\end{cases}\overset{(*)}{\Rightarrow}\alpha=-2m.$$

……15分

因此圆 Ω 有标准方程 $x^2+y^2-2mx+2my-(2m+5)=0$. 按主元 m 整理得

$$2m(y-x-1)+(x^2+y^2-5)=0.$$

这表明 Ω 经过的定点 (x,y) 满足

$$\begin{cases}y-x-1=0\\ x^2+y^2-5=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(1,2)\text{ 或 }(-2,-1)\Rightarrow D(-2,-1).$$

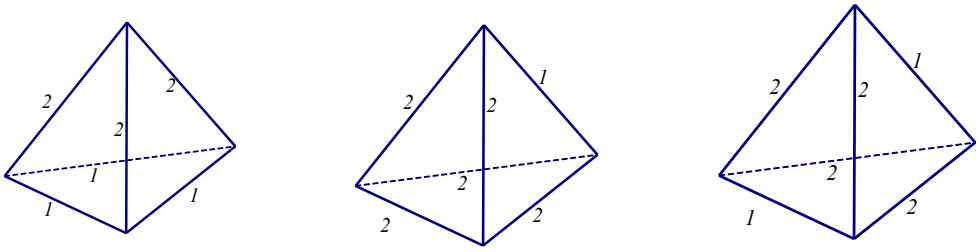
……20分

11.(本题满分20分) 考虑一个四面体，

(1) 若该四面体各棱长均为1或2，但不是正四面体，求该四面体体积的所有可能值；

(2) 给定两正实数 a 和 b $(0<a<b)$，若存在一个四面体，它恰有两条棱长为 a，且该两棱共点，其余各棱长均为 b，试用 a 和 b 表示该四面体的体积，并求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

解： (1)若一个非正四面体仅有两种棱长，由于1,1,2 不能构成三角形，所以一共有3种可能性：



① 三条棱长为2，即以1,1,1为底面，其余三条棱为2,2,2，则此时 四面体的体积为 $\frac{\sqrt{11}}{12}$；　　……5分

② 五条棱长为2，即以2,2,2为底面，其余三条棱为2,2,1，则此时四面体体积为$\frac{\sqrt{11}}{6}$；

③ 四条棱长为2，即四个面都是等腰三角形，底面2为腰，1为底边，则此时四面体体积为$\frac{\sqrt{14}}{12}$.　　……10分

⑵不妨设$PA=PB=a, PC=AB=BC=AC=b$，作$CD\perp AB$于点D，则$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，且$PD^2=PB^2-DB^2=a^2-\frac{b^2}{4}$，在$\Delta PCD$中,由余弦定理可得:

$$\cos\angle PCD=\frac{PC^2+CD^2-PD^2}{2\cdot PC\cdot CD}=\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}b^2},$$

所以$PO=PC\cdot\sin\angle PCD=b\sqrt{1-\cos^2\angle PCD}=\frac{1}{\sqrt{3}b}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$，

因此,此时四面体的体积为$V=\frac{b}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$，　　……15分

根据题意，四面体存在，因此$4a^2b^2-a^4-b^4>0$，设$r=\frac{a}{b}$,则不等式转化为:

$r^4-4r^2+1<0$，解得:$r>\sqrt{2-\sqrt{3}}$，又$r=\frac{a}{b}<1$，从而$\sqrt{2-\sqrt{3}}<r<1$.

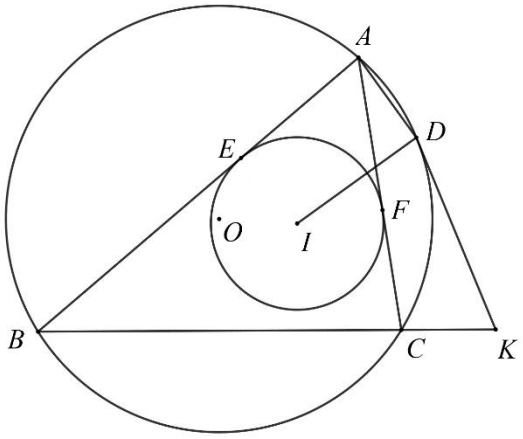
综上所述,$\frac{a}{b}$的取值范围是$\sqrt{2-\sqrt{3}}<r<1$.　　……20分

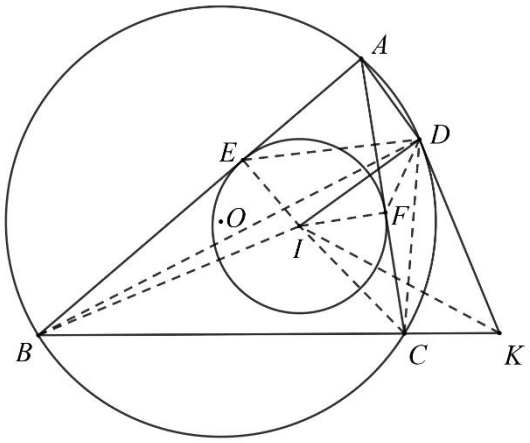
注: 第一问中仅给出任意一种情况均可得5分，完整给出三种得10分.

12.(本题满分40分) 如图所示，已知ΔABC内接于$\odot O$，$\odot I$与AB, AC分别相切于点E, F，点D在$\odot O$上且满足$\angle ADI=90°$，$\odot O$在点D处的切线交BC于点K.

求证：点K对$\odot I$与$\odot O$等幂.

注：点到圆的幂是指该点到圆心的距离与半径的平方差.





证明： 连结 IK, IC, IB, IF, IE 以及 BD, ED, FD, CD . 由 *Stewart* 定理可知,

$$IK^2 \cdot BC + IB^2 \cdot CK - IC^2 \cdot BK = BC \cdot CK \cdot BK \qquad (1)$$

而 $\odot I$ 与 AB 和 AC 分别相切于点 E 和点 F ，故有 $IF = IE$ 以及 $IF \perp AC, IE \perp AB$ ，因此由勾股定理得

$$IC^2 = IF^2 + FC^2, IB^2 = IE^2 + EB^2.$$

将这些结论代入 (1) 并化简，得到

$$\left(IK^2 - IF^2\right) \cdot BC + BE^2 \cdot CK - FC^2 \cdot BK = BC \cdot CK \cdot BK .$$

……10 分

两边同除以 BC，得

$$\left(IK^2 - IF^2\right) + BE^2 \cdot \frac{CK}{BC} - FC^2 \cdot \frac{BK}{BC} = CK \cdot BK .$$

注意到 $\left(IK^2 - IF^2\right)$ 和 $CK \cdot BK$ 分别是点 K 到 $\odot I$ 和 $\odot O$ 的幂，因此只需证明

$$BE^2 \cdot \frac{CK}{BC} - FC^2 \cdot \frac{BK}{BC} = 0 .$$

即

$$\frac{BK}{CK} = \frac{BE^2}{CF^2}, \qquad (2)$$

……20 分

而由于 $AD \perp DI$ 以及 $IE \perp AB, IF \perp AC$ ，我们分别得到点 A, D, E, I 和点 A, D, F, I 四点共圆，进而有点 A, D, E, F 四点共圆，因此有 $\angle AED = \angle AFD$ ，而在 $\odot O$ 中，有 $\angle ABD = \angle ACD$ ，由此得到 $\triangle DEB \backsim \triangle DFC$ ，因此有

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD},$$

因此(2)等价于

$$\frac{BK}{CK} = \frac{BD^2}{CD^2}, \qquad (3)$$

……30 分

从而只需证明(3). 由于 DK 是 $\odot O$ 的切线，所以由弦切角定理有 $\angle KDC=\angle KBD$，由此以及公共角 $\angle DKC=\angle BKD$ 知 $\triangle KDC\backsim\triangle KBD$，因此有

$$\frac{BK}{DK}=\frac{BD}{CD}=\frac{DK}{CK},$$

进而

$$\frac{BK}{CK}=\frac{BK}{DK}\cdot\frac{DK}{CK}=\frac{BD^2}{CD^2},$$

此即为(3)，命题得证.

……40分

13.(本题满分40分) 记 $[2025]=\{1,2,\cdots,2025\}$. 设集合族 F 由 $[2025]$ 的若干个元素个数不超过2的子集构成，且满足 $\varnothing\in\mathsf{F}$. 记 $\mathsf{F}_j=\{F\in\mathsf{F}\mid |F|=j\}(j=0,1,2)$. 对 $i=0,1$，已知：若集合 $X\in\mathsf{F}_i$，则 F_{i+1} 中至少有13个不同集合 Y 满足 $X\subseteq Y$.

(1) 求 F 所含子集个数 $|\mathsf{F}|$ 的最小可能值 f；

(2) 当 $|\mathsf{F}|=f$ 时，求不同集合族 F 的个数.

(1) **解**：所求 $|\mathsf{F}|$ 的最小值 $f=105$.

一方面，当集合族 $\mathsf{F}_0=\{\varnothing\}$，$\mathsf{F}_1=\{[13]$ 的全体一元子集$\}$，$\mathsf{F}_2=\{[14]$ 的全体二元子集$\}$ 时，不难验证集合族 $\mathsf{F}=\mathsf{F}_0\cup\mathsf{F}_1\cup\mathsf{F}_2$ 满足要求，且

$$|\mathsf{F}|=|\mathsf{F}_0|+|\mathsf{F}_1|+|\mathsf{F}_2|=1+\mathrm{C}_{13}^1+\mathrm{C}_{14}^2=105.$$

……10分

另一方面，我们说明 $|\mathsf{F}|\geq 105$. 题设条件蕴含了 $|\mathsf{F}_0|=1$，$|\mathsf{F}_1|\geq 13$，于是只需证明 $|\mathsf{F}_2|\geq 91$. 考虑集合 $\mathsf{K}=\{(X,Y)\in\mathsf{F}_1\times\mathsf{F}_2\mid X\subseteq Y\}$. 题设条件表明

$$|\mathsf{K}|\geq 13|\mathsf{F}_1|. \tag{1}$$

因为 F_2 由二元集合组成，且每个二元集合恰有2个不同一元子集，所以

$$|\mathsf{K}|\leq 2|\mathsf{F}_2|. \tag{2}$$

由（1），（2）可知：若 $|\mathsf{F}_1|\geq 14$，则 $|\mathsf{F}_2|\geq 91$.

以下假设 $|\mathsf{F}_1|=13$，不妨设 $\mathsf{F}_1=\{\{1\},\{2\},\cdots,\{13\}\}$. 对任意 $k\in[13]$，在 F_2 中必定有一个不包含于 $[13]$ 的二元集合 Y_k 包含 $\{k\}$. 这些 Y_k 互不相同，每个只包含 F_1 中的一个一元集合，于是

$$|\mathsf{K}|\leq 2\cdot|\mathsf{F}_2\setminus\{Y_1,\cdots,Y_{13}\}|+1\cdot|\{Y_1,\cdots,Y_{13}\}|=2|\mathsf{F}_2|-13. \tag{3}$$

由（1），（3）以及 $|\mathsf{F}_1|=13$ 可知 $|\mathsf{F}_2|\geq 91$. 这表明 $|\mathsf{F}|\geq 105$.

综上所述，$|\mathsf{F}|$ 的最小可能值 $f=105$.

……30分

注：证明 $|\mathsf{F}_2|\geq 91$ 时，也可构造二部图，其顶点集分别为 F_1 和 F_2，可由类似于 K 定义中的包含关系构造边集. 利用构造二部图的思路也可完成证明.

(2) **解**：根据（1）的推导过程可知：当 $|\mathsf{F}|=f=105$ 时，必有 $\mathsf{F}_0=\{\varnothing\}$，且

- F_1 由 [2025] 的 13 个一元子集 $\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_{13}\}$ 构成；
- F_2 由 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{13}\}$ 的全体二元子集以及 $\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},\cdots,\{a_{13},b_{13}\}$ 构成，其中 $b_1,b_2,\cdots,b_{13}$ 可以相同但不能来自 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{13}\}$，

从而，先确定 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$，一共有 C_{2025}^{13} 种选取方式．再确定 $b_1,b_2,\cdots,b_{13}$，其选取方式的个数恰好是不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{2012}=13$ 的非负整数解个数 C_{2012}^{13}．因此不同 F 的个数是 $C_{2025}^{13}\times C_{2012}^{13}$．

……40 分