2025年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

（考试时间：2025年5月18日 9:00~11:00）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1.已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-3a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{2025}=$_____.

2.已知实数m,n满足：$3m+3^m=9$，$n+\log_3(n-1)=3$，则$m+n$的值为_____.

3.已知$\odot O:x^2+y^2=4$，点F为椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$的右焦点，过点$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$作$\odot O$的切线与椭圆$\Gamma$交于$A$、$B$两点. 则△$ABF$的周长为_____.

4.化简$\sin^3 20^\circ+\sin^3 40^\circ-\sin^3 80^\circ$，则其值为_____.

5.正四面体$ABCD$的棱长为4，空间动点P满足$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|=4$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$的最大值与最小值之差为_____.

6.设复数z满足$|z|=1$，则$|z^7+\bar{z}^5-3z^3-3\bar{z}|$的最大值为_____.

7.记$X=\{1,2,\cdots,80\}$，$Y=\{(a,b)\,|\,a,b\in X,$且$a+b$在三进制加法下不进位$\}$，则集合Y中的元素个数为_____.

8.称正整数n为“好数”，是指平面上存在10条直线，这些直线满足：无任何3条交于一点，且它们一共出现n个交点. 则所有“好数”n的和为_____.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）已知抛物线$\Gamma:y=x^2$上三个不同点$A(1,1)$、B、C满足：$AB\perp AC$，过B、C分别作抛物线Γ的切线交于点P，求点P的轨迹方程.

10.（本题满分20分）设四面体$ABCD$满足：AD、BD、CD两两垂直，点O、H分别是△ABC的外心和垂心.

求证：$\dfrac{|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2}{|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2}$是定值.

11.（本题满分20分）给定奇质数p，设数列$\{f_n\}$满足：

$$f_1=f_2=1,\text{且}f_{n+2}=f_{n+1}+f_n(n\in\mathbf{N}^*).$$

求证：$p\,|\,(p-1)!\cdot\sum_{n=1}^{p-1}\dfrac{f_n}{n}$.

2025年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、本试卷满分120，其中填空题64分，解答题56分.

2、评阅试卷时，请依据评分标准.填空题只设8分和0分两档；第9题4分一个档次、第10题和第11题均为5分一个档次.请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

3、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1、0　2、4　3、$2\sqrt{5}$　4、$-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　5、8　6、$4\sqrt{2}$　7、1135　8、819.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9、（本题满分 16 分）已知抛物线$\Gamma: y=x^2$上三个不同点$A(1,1)$、B、C满足：$AB\perp AC$，过B、C分别作抛物线Γ的切线交于点P，求点P的轨迹方程.

解：设点$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$,直线BC的方程为：$y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=x^2\\y=kx+m\end{cases}$，消去$y$，

得$x^2-kx-m=0$，

由韦达定理知：$x_1+x_2=k$，$x_1x_2=-m$，

∴$y_1+y_2=k^2+2m$，$y_1y_2=m^2$.　--------4 分

由$AB\perp AC$知：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

∴$(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

即$x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=0$.

∴ $-m-k+1+m^2-(k^2+2m)+1=0$，即$m^2-3m-k^2-k+2=0$.

∴ $m=k+2$或$m=-k+1$.　--------8 分

若$m=-k+1$，此时直线BC的方程为：$y=k(x-1)+1$，过点$A(1,1)$，舍去；

∴$m=k+2$.此时直线BC的方程为：$y=k(x+1)+2$，过定点$(-1,2)$.--------12 分

∵过点 B 的切线方程为：$y-y_1=2x_1(x-x_1)$ ①

过点 C 的切线方程为：$y-y_2=2x_2(x-x_1)$ ②

联立①、②解得：$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{2}$，$y=x_1x_2=-m$，即 $P(\dfrac{k}{2},-m)$.

结合 $m=k+2$ 知，点 P 的轨迹方程为 $2x+y+2=0$.　　-------16 分

10、（本题满分 20 分）设四面体 $ABCD$ 满足：AD、BD、CD 两两垂直，点 O、H 分别是△ ABC 的外心和垂心.

求证：$\dfrac{|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2}{|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2}$ 是定值.

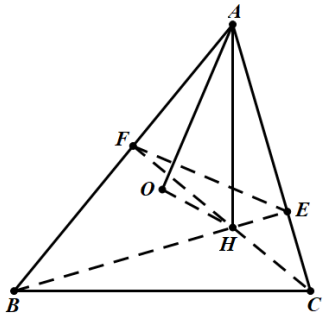
证法一：设 R 为 ΔABC 的外接圆半径，则 $|OA|=|OB|=|OC|=R$.

（1）先证明：$|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2=3R^2$.

记 $|BC|=a,|CA|=b,|AB|=c$.

如图，作 $BE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F，

则 A,F,H,E 四点共圆；B,F,E,C 四点共圆.



于是，$\angle AHF=\angle AEF=\angle B$.

故 $|AH|=\dfrac{|AF|}{\sin\angle AHF}=\dfrac{b\cdot|\cos A|}{\sin B}=2R\cdot|\cos A|$.

同理，$|BH|=2R\cdot|\cos B|$，$|CH|=2R\cdot|\cos C|$.

接下来证明:$|OH|^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$.

不妨设 $A<90^\circ$（当 $A\geq 90^\circ$ 时类似可证得上式）.

熟知：H,O 为一对等角共轭点，即 $\angle BAO=\angle CAH$，

据此易知 $\angle HAO=|B-C|$. 在 ΔHAO 中利用余弦定理知，

$$|OH|^2=R^2+(2R\cdot\cos A)^2-2\cdot R\cdot 2R\cos A\cdot\cos(B-C)$$

$$=R^2(1+4\cos^2 A-4\cos A\cos(B-C))$$

$$=R^2(1-4\cos A(\cos(B+C)+\cos(B-C)))$$

$$=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C).$$　　-------5 分

注意到恒等式：$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$，

$\therefore\ |AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2$

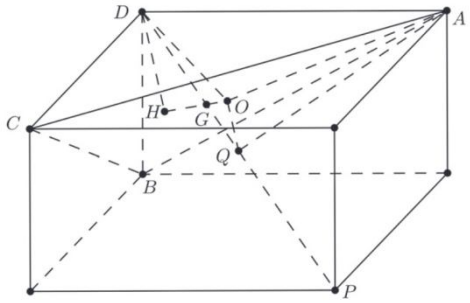
$=4R^2\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)-R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$

$=4R^2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C-\frac{1}{4})$

$=4R^2(1-\frac{1}{4})=3R^2.$ -------10 分

（2）再证明：$|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2=5R^2.$

如图，将四面体 $ABCD$ 补成一个立方体，设 Q 是四面体 $ABCD$ 的外接球球心，点 P 使得 Q 是 DP 的中点，且设 G 是 ΔABC 的重心.



因为 $|OA|=|OB|=|OC|$， $|QA|=|QB|=|QC|$，

所以 $OQ\perp$ 平面 ABC.

因为 G 是 ΔABC 的重心，

所以 $3\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DP}=2\overrightarrow{DQ}$，

则 D,G,Q 共线，且 $|GD|=2|GQ|$.

根据平面几何中的欧拉定理， H,G,O 三点共线，且 $|GH|=2|GO|$.

所以 ΔDHG 和 ΔQOG 相似，且 $|HD|=2|OQ|$.

因此， $HD//OQ$，进而 $HD\perp$ 平面 ABC. -------15 分

故 $|OD|^2=|OH|^2+|HD|^2=(3|OG|)^2+(2|OQ|)^2=9(|OG|^2+|OQ|^2)-5|OQ|^2$

$=9|QG|^2-5|OQ|^2=|QD|^2-5|OQ|^2.$

因为 $|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2=|PD|^2=4|QD|^2$，

所以 $|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2=5(|QD|^2-|OQ|^2)$

$=5(|QA|^2-|OQ|^2)=5|OA|^2=5R^2.$

由（1）、（2）知 $\frac{|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2}{|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2}=\frac{5R^2}{3R^2}=\frac{5}{3}.$ -------20 分

证法二：由于DA,DB,DC两两垂直，以D为原点，DA,DB,DC分别为x轴、y轴和z轴建立空间直角坐标系.则$D(0,0,0)$，设$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$.

则平面ABC的方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

设H点的坐标为(x,y,z)，由$AH\perp BC$，得$-by+cz=0$，

由$BH\perp AC$，得$-ax+cz=0$，即$ax=by=cz$，结合$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，

得H点的坐标为：

$$(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}).$$ -------5 分

设O点坐标为(x_0,y_0,z_0)，则

$(x_0-a)^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+(y_0-b)^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+(z_0-c)^2$，

故$2by_0=2ax_0+b^2-a^2$，$2cz_0=2ax_0+c^2-a^2$，代入平面方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，

解得O点坐标为：

$$(\frac{a^3(b^2+c^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)},\frac{b^3(a^2+c^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)},\frac{c^3(a^2+b^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}).$$ -------10 分

$$\therefore\ R^2=|OA|^2=(x_0-a)^2+y_0^2+z_0^2=\frac{\sum_{cyc}a^6b^4+\sum_{cyc}a^6c^4+2\sum_{cyc}a^6b^2c^2+4\sum_{cyc}a^4b^4c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}.$$

$$\therefore |AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2$$

$$=\sum_{cyc}a^2+\frac{\sum_{cyc}a^6b^4+\sum_{cyc}a^6c^4+2\sum_{cyc}a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$=\frac{4\sum_{cyc}a^2\cdot(\sum_{cyc}a^4b^4+2\sum_{cyc}a^4b^2c^2)+\sum_{cyc}a^6b^4+\sum_{cyc}a^6c^4+2\sum_{cyc}a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$=\frac{4\sum_{cyc}a^6b^4+4\sum_{cyc}a^2b^4c^4+4\sum_{cyc}a^6c^4+8\sum_{cyc}a^6b^2c^2+16\sum_{cyc}a^4b^4c^2+\sum_{cyc}a^6b^4+\sum_{cyc}a^6c^4+2\sum_{cyc}a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$=\frac{5\sum_{cyc}a^6b^4+5\sum_{cyc}a^6c^4+10\sum_{cyc}a^6b^2c^2+20\sum_{cyc}a^4b^4c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}=5R^2.$$ -------15 分

又$\because |AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2$

$$=\frac{\sum_{cyc}a^6(b^2+c^2)^2+2\sum_{cyc}a^4b^4c^2}{(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}-\frac{\sum_{cyc}(a^3b^2+a^3c^2-2ab^2c^2)^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$=\frac{4\sum_{cyc}a^6b^4+8\sum_{cyc}a^6b^2c^2+4\sum_{cyc}a^6c^4+8\sum_{cyc}a^4b^4c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$-\frac{\sum_{cyc}a^6b^4+\sum_{cyc}a^6c^4+4\sum_{cyc}a^4b^4c^2+2\sum_{cyc}a^6b^2c^2-4\sum_{cyc}a^4b^4c^2-4\sum_{cyc}a^4b^2c^4}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}$$

$$=\frac{3\sum_{cyc}a^6b^4+3\sum_{cyc}a^6c^4+6\sum_{cyc}a^6b^2c^2+12\sum_{cyc}a^4b^4c^2}{4(\sum_{cyc}a^2b^2)^2}=3R^2 .$$

$$\therefore \frac{|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2+|OD|^2}{|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2-|OH|^2}=\frac{5R^2}{3R^2}=\frac{5}{3}.$$ -------20 分

注：如果猜测出定值为$\frac{5}{3}$，可以给 5 分.

11、（本题满分 20 分）给定奇质数 p，设数列$\{f_n\}$满足：

$$f_1=f_2=1，且 f_{n+2}=f_{n+1}+f_n(n\in\mathbf{N}^*).$$

求证：$p|(p-1)!\sum_{n=1}^{p-1}\frac{f_n}{n}$.

证明：先证一个引理.

引理：已知$a,x,y\in\mathbf{R}$，且$x+y=1$.若对任意正整数n，$t_n=a(x^n-y^n)$均为整数，

则对任意奇质数 p，有$(p-1)!\sum_{n=1}^{p-1}\frac{a(x^n-y^n)}{n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. -------5 分

引理的证明：

注意到$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{y^n}{n}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{(1-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1+\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-x)^k}{n}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-x)^k$.

注意到$\frac{1}{n}C_n^k=\frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1}$（$k\geq 1$），$\sum_{n=k}^{p-1}C_{n-1}^{k-1}=C_{p-1}^k$，

所以，$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{y^n-1}{n}=\sum_{n=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1}(-x)^k=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}(-x)^k\sum_{n=k}^{p-1}C_{n-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}(-x)^kC_{p-1}^k$.

从而$a\sum_{n=1}^{p-1}\frac{x^n-y^n}{n}=a\sum_{n=1}^{p-1}\frac{x^n-(-x)^nC_{p-1}^n-1}{n}$.

同理，$a\sum_{n=1}^{p-1}\frac{x^n-y^n}{n}=a\sum_{n=1}^{p-1}\frac{(-y)^nC_{p-1}^n+1-y^n}{n}$.

$$\therefore 2\sum_{n=1}^{p-1}\frac{ax^n-ay^n}{n}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{ax^n-ay^n-a[(-x)^n-(-y)^n]C_{p-1}^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n}(ax^n-ay^n)-\sum_{n=1}^{p-1}\frac{C_{p-1}^n(-1)^n}{n}(ax^n-ay^n)$$

$$=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n}t_n[1-C_{p-1}^n(-1)^n].$$ -------10 分

熟知$C_{p-1}^n=\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!}\equiv(-1)^n(\mathrm{mod}\,p)$,

$\therefore p\,|\,[1-C_{p-1}^n(-1)^n]$,

$\therefore p\,|\,(p-1)!\cdot 2\sum_{n=1}^{p-1}\frac{a(x^n-y^n)}{n}$,

$\therefore\ (p-1)!\cdot\sum_{n=1}^{p-1}\frac{a(x^n-y^n)}{n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

引理得证. -------15 分

回到原题：

注意到：$f_n=\frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$，记$a=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

则$x+y=1$，且对任意正整数n，f_n均为整数，

由引理知：$(p-1)!\sum_{n=1}^{p-1}\frac{f_n}{n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

$\therefore\ p\,|\,(p-1)!\cdot\sum_{n=1}^{p-1}\frac{f_n}{n}$. -------20 分