2025 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛
暨 2025 年吉林省高中数学联赛试题

（2025 年 5 月 18 日 星期日 上午 8:30——11：00）

题号	一	二	三（13）	三（14）	三（15）	三（16）	总　分
得分							
评卷人							
复核人							

考生注意：本试卷共计 4 页，16 道题，满分 120 分

得分

一、选择题（本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分）

本题共有 6 个小题，每小题均给出 A、B、C、D 四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内. 每小题选对得 5 分；不选、选错或多选一律得 0 分.

1. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使一条棱的两端异色，若只有五种颜色可使用，则不同的染色方法的总数为（　　）

A. 120　　B. 260　　C. 340　　D. 420

2. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，若 $AD=DB=BC=CD=1$，$\angle ADB=120°$，则该三棱锥的外接球的表面积为（　　）

A. $\frac{7}{3}\pi$　　B. $\frac{10}{3}\pi$　　C. $\frac{13}{3}\pi$　　D. $\frac{20}{3}\pi$

3. 已知函数 $f(x)=ln\left(\sqrt{\sin^2 x+1}+\sin x\right)(x\in R)$，则存在非零实数 x_0，使得（　　）

A. $f(x_0)=-1$　　B. $f(x_0)-f(-x_0)=2$

C. $f(f(x_0))=ln(\sqrt{2}+1)$　　D. $f(\pi+x_0)-f(x_0)=\frac{3}{2}$

4. 函数 $f(x)=x^2+\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 的值域是（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(2\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

市（区、县）＿＿＿＿学校＿＿＿＿姓名＿＿＿＿性别＿＿＿＿准考证号＿＿＿＿

（密封装订线内不要答题）

5. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为2，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{6}$. 过$F_2$作直线$l$交双曲线$C$的右支于$A,B$两点，若$H,G$分别为$\triangle AF_1F_2$与$\triangle BF_1F_2$的内心，则$|HG|$的取值范围为（　　）

A. $\left[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$　　B. $\left[\sqrt{3},2\right)$　　C. $\left[2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$　　D. $\left[2\sqrt{2},4\right]$

6. 已知$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则$x^2+2y-2z+3$　取值范围是（　　）

A. $[1,4]$　　B. $\left[0,\sqrt{5}\right]$　　C. $\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\sqrt{2},5+\sqrt{2}\right)$

得分

二、填空题（本题共6个小题，每小题5分，满分30分）

请将答案写在题中横线上，各小题只要求直接写出结果.

7. 若复数z满足$|z+\mathrm{i}|+|z-2-\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$，则$|z|$的最小值为_____.

8. 设a,b,c是正整数，且成等比数列，$b-a$是一个完全平方数，$\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=6$，则$a+b+c=$_____.

9. 设$a<-1$，变量x满足$x^2+ax\leq -x$，且x^2+ax的最小值为$-\frac{1}{2}$，则$a=$_____.

10. 设P为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$　棱AB上的动点，则平面PDB_1与平面ADD_1A_1夹角的正切值的最小值为_____.

11. 6名男生和x名女生随机站成一排，每名男生都至少与另一男生相邻，至少有4名男生站在一起的概率为p，若$p\leq\frac{1}{100}$，则x的最小值为_____.

12. 已知A,B,C为$\triangle ABC$三内角，向量$\vec{\alpha}=(\cos\frac{A-B}{2},\sqrt{3}\sin\frac{A+B}{2})$，$|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$. 如果当$C$最大时，存在动点$M$，使得$|\overrightarrow{MA}|,|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{MB}|$成等差数列，则$\frac{|\overrightarrow{MC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$最大值是_____.

得分

三、解答题

（本题共 4 道大题，每题 15 分，满分 60 分）

13. 已知 x 为一实数，$0<x<\pi$，证明：对于所有的自然数 n，

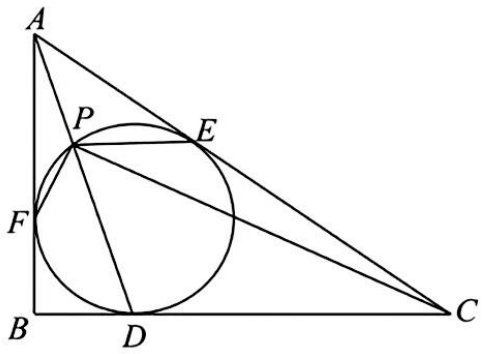
$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 的值为正数.

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，P 是直线 $l:x=\frac{a}{2}$ 上一点，且 P 不在 x 轴上，以点 P 为圆心，线段 PF 的长为半径的圆弧 AF 交 C 的右支于点 N.

(1) 证明：$\angle APN=2\angle NPF$；

(2) 取 $a=1$，若直线 PF 与 C 的左、右两支分别交于 E，D 两点，过 E 作 l 的垂线，垂足为 R，试判断直线 DR 是否过定点，若是，求出定点的坐标；若不是，请说明理由.

15. 在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，它的内切圆分别与边 BC，CA，AB 相切与点 D，E，F，连结 AD，与内切圆相交于另一点 P，连结 PC，PE，PF．已知 $PC\perp PF$，求证：$PE/\!/BC$．



16. 对于每项均是正整数的数列 P：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 T_1，T_1 将数列 P 变换成数列 $T_1(P)$：$n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$．对于每项均是非负整数的数列 $Q:b_1,b_2,\cdots,b_m$，定义 $S(Q)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$，定义变换 T_2，T_2 将数列 Q 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(Q)$．

(1)若数列 P_0 为 2，4，3，7，求 $S(T_1(P_0))$ 的值；

(2)对于每项均是正整数的有穷数列 P_0，令 $P_{k+1}=T_2(T_1(P_k))$，$k\in\mathrm{N}$．

（i）探究 $S(T_1(P_0))$ 与 $S(P_0)$ 的关系；

（ii）证明：$S(P_{k+1})\le S(P_k)$．

准考证号 性别 姓名 学校 市（区、县）
（密封装订线内不要答题）

2025年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛

暨2025年吉林省高中数学联赛试题

参考答案

一、选择题（本题共6个小题，每小题5分，满分30分）

1.将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使一条棱的两端异色，若只有五种颜色可使用，则不同的染色方法的总数为（　　）

A. 120　　B.260　　C. 340　　D. 420

解：若用五种颜色，则共有 $A_5^5=120$（种方法；若用四种颜色，如图 15.1 所示，A，C 同色，或B，D同色，共有 $C_5^4A_4^4\cdot 2=240$（种）方法；若用三种颜色，对角线上的顶点必同色，由于四个侧面中任一个面确定下来，其余也随之确定，故共有 $A_5^3=60$（种）方法.

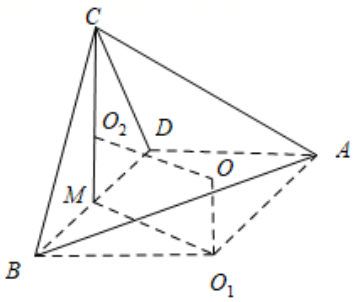
综上，不同染色方法共有120+240+60=420（种）.　　**选D.**

2.已知三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，若 $AD=DB=BC=CD=1$，$\angle ADB=120°$，则该三棱锥的外接球的表面积为（　　）

A. $\frac{7}{3}\pi$　　B. $\frac{10}{3}\pi$　　C. $\frac{13}{3}\pi$　　D. $\frac{20}{3}\pi$

解：如图所示，因为 $DB=BC=CD=1$，

所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形，取 BD 中点 M，连接 CM，则 $\triangle BCD$ 外接圆圆心在 CM 上，且设为 O_2，由正三角形性质可得，$\triangle BCD$ 外接圆半径 $r=CO_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则



$O_2M=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=120°$，$AD=BD=1$，

所以 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos 120°=3$，即 $AB=\sqrt{3}$，

由正弦定理得 $\triangle ABD$ 外接圆半径 $r'=\dfrac{AB}{2\sin\angle ADB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$，

设 $\triangle ABD$ 外接圆圆心为 O_1，则 $O_1A=O_1B=O_1D=r'=1$，所以四边形 $ADBO_1$ 为菱形，

过 O_2 作平面 BCD 的垂线，过 O_1 作平面 $ADBO_1$ 的垂线，两线交于点 O，

则 O 为三棱锥的外接球的球心，连接 O_1M ，

因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，且平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$CM\perp BD, O_1M\perp BD$，所以四边形 OO_1MO_2 为矩形，则 $OO_1=MO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥的外接球半径 $R=BO=\sqrt{OO_1^{\,2}+BO_1^{\,2}}=\sqrt{\dfrac{13}{12}}$，

所以三棱锥的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{13\pi}{3}$.　　**选：C**

3. 已知函数 $f(x)=ln\left(\sqrt{\sin^2x+1}+\sin x\right)(x\in R)$，则存在非零实数 x_0，使得（　　）

A．$f(x_0)=-1$　　B．$f(x_0)-f(-x_0)=2$

C．$f(f(x_0))=ln\left(\sqrt{2}+1\right)$　　D．$f(\pi+x_0)-f(x_0)=\dfrac{3}{2}$

解：$\because f(x)=\ln\left(\sqrt{\sin^2x+1}+\sin x\right)=\ln(\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2x+1}-\sin x})=-\ln\left(\sqrt{\sin^2x+1}-\sin x\right)$，

$f(-x)=\ln\left(\sqrt{\sin^2x+1}-\sin x\right)$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，令

$t=\sin x\in[-1,1]$，$f(t)=\ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)=-f(-t)$，当 $t\in[0,1]$ 时，$f(t)$ 单调递增，

$\therefore 0=f(0)\le f(t)\le f(1)=\ln(\sqrt{2}+1)$，

又函数 $f(t)$ 为奇函数，$\therefore -\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\le f(t)\le\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ln\left(\sqrt{2}+1\right)]$，

$\because -1<-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$，$\therefore$ 不存在 x_0 使得 $f(x_0)=-1$ 成立，A 错误；

$\because f(x_0)-f(-x_0)=f(x_0)$，$\therefore$ 若 $f(x_0)-f(-x_0)=2$ 成立，则 $f(x_0)=1$，又函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ln\left(\sqrt{2}+1\right)]$，

所以 $f(x_0)-f(-x_0)=2$ 不成立，B 错误；

$\because$ 若 $f(f(x_0))=1n(\sqrt{2}+1)$ 成立，则 $f(x_0)=1$， $f(x_0)=1$ 不成立，C 错误；

$\because f(\pi+x_0)=\ln\left(\sqrt{\sin^2 x_0+1}-\sin x_0\right)=f(-x_0)$，$\therefore f(\pi+x_0)-f(x_0)$

$=2f(-x_0)=-2f(x_0)=\dfrac{3}{2}$

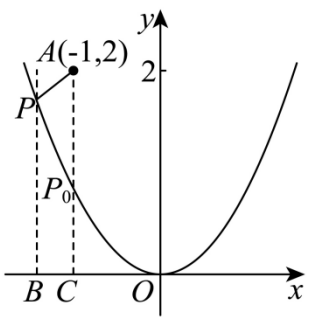
则 $f(x_0)=-\dfrac{3}{4}$ 成立，故 D 正确. **故选：D**

4. 函数 $f(x)=x^2+\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 的值域是（　　）.

A. $[1,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(2\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

解：将 $f(x)=x^2+\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 变形可得 $f(x)=x^2+\sqrt{(x^2-2)^2+(x+1)^2}$，

设 $P(x,x^2)$，则 $P(x,x^2)$ 的轨迹方程为 $y=x^2$，设 $A(-1,2)$，



则 $f(x)$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上的点到点 A 和 x 轴的距离之和，

过 P 点作 $PB\perp x$ 轴于 B，过 A 点作 $AC\perp x$ 轴于 C，

交抛物线 $y=x^2$ 于点 P_0，

故用 $|PA|+|PB|\geq|P_0A|+|P_0C|=|AC|=2$

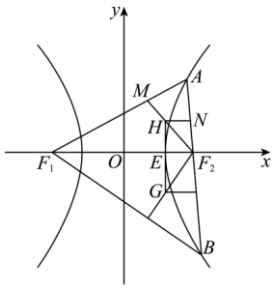
所以 $f(x)\in[2,+\infty)$. **故答案为 B.**

5. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 2，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{6}$.过 F_2 作直线 l 交双曲线 C 的右支于 A,B 两点，若 H,G 分别为 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内心，则 $|HG|$ 的取值范围为（　）

A. $\left[2\sqrt{2},\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$　　B. $\left[\sqrt{3},2\right)$　　C. $\left[2,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$　　D. $\left[2\sqrt{2},4\right]$

解：由题意，在 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中，根据焦点到渐近线的距可得 $b=\sqrt{6}$，离心率

为 2，$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{6}{a^2}}=2$，解得：$a=\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{b^2+a^2}=2\sqrt{2}$ ∴双曲线的方程为$C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1.$



记$\triangle AF_1F_2$的内切圆在边AF_1，AF_2，F_1F_2上的切点分别为M,N,E，

则H，E横坐标相等$|AM|=|AN|$，$|F_1M|=|F_1E|$，$|F_2N|=|F_2E|$，

由$|AF_1|-|AF_2|=2a$，即$|AM|+|MF_1|-(|AN|+|NF_2|)=2a$，得$|MF_1|-|NF_2|=2a$，即$|F_1E|-|F_2E|=2a$，

记H的横坐标为x_0，则$E(x_0,0)$，于是$x_0+c-(c-x_0)=2a$，得$x_0=a$，

同理内心G的横坐标也为a，故$HG\perp x$轴.设直线AB的倾斜角为θ，则$\angle OF_2G=\frac{\theta}{2}$，

$\angle HF_2O=90^\circ-\frac{\theta}{2}$（Q 为坐标原点），在$\triangle HF_2G$中，

$$|HG|=(c-a)\left[\tan\frac{\theta}{2}+\tan\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\right]=(c-a)\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)=(c-a)\cdot\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta},$$

由于直线l与C的右支交于两点，且C的一条渐近线的斜率为$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，倾斜角为60°，∴$60^\circ<\theta<120^\circ$，即$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\le 1$，$\therefore|HG|$的范围是$\left[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.　　**故选：A.**

6. 已知$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则$x^2+2y-2z+3$　取值范围是（　）

A．$[1,4]$　　B．$\lfloor 0,\sqrt{5}\rfloor$　　C．$\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$　　D．$\left(\sqrt{2},5+\sqrt{2}\right)$

解：因为$\left[y+(-z)\right]^2\le(1+1)\left[y^2+(-z)^2\right]\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 2$，

则$y-z\ge-\sqrt{2}$，且$x^2\ge 0$，可得$x^2+2y-2z+3\ge 0+2\left(-\sqrt{2}\right)+3=3-2\sqrt{2}$，

当且仅当$x=0$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立；

又因为$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则$x^2\le 1-y^2-z^2$，

可得$x^2+2y-2z+3\le 4-\left(y^2+z^2-2y+2z\right)$.

且 $y^2+z^2-2y+2z=(y-1)^2+(z+1)^2-2$，

设点 $A(-1,1)$ 和标准单位圆面内点 $P(y,z)$，则 $(y-1)^2+(z+1)^2-2=|PA|^2-2$，

又因为 $|PA|^2\geq(|OA|-1)^2=3-2\sqrt{2}$，可得 $(y-1)^2+(z+1)^2-2\geq 1-2\sqrt{2}$，

则 $x^2+2y-2z+3\leq 4-(y^2+z^2-2y+2z)\leq 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=0, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立；

综上所述：所求　取值范围是 $\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$.　　**故选 C**

二、填空题（本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分）

7.若复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|+|z-2-\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$，则 $|z|$ 的最小值为_____.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解：由复数减法的几何意义可知最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 设 a,b,c 是正整数，且成等比数列，$b-a$ 是一个完全平方数，$\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=6$，则 $a+b+c=$_____.

答案：111 或 108

解：由题意，$b^2=ac$，$\log_6 abc=6$，所以，$abc=6^6$，故 $b=6^2=36$，$ac=36^2$.

于是，$36-a$ 是平方数，所以，a 只可能为 11，20，27，32，35，36 而 a 是 36^2 的约数，

故 $a=27$ 或 $a=36$．进而 $c=48$，或 $c=36$．$a=27,b=36,c=48$，或 $a=b=c=36$

即所以 $a+b+c=111$，或 $a+b+c=108$

9.设 $a<-1$，变量 x 满足 $x^2+ax\leq -x$，且 x^2+ax 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 $a=$_____.

答案：$-\frac{3}{2}$

解：由 $a<-1$ 及 x^2+ax 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ 知 $x\geq 0$，故由 $x^2+ax\leq -x$ 得 $0\leq x\leq -(a+1)$，

设 $f(x)=x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$.

若 $-(a+1)<-\frac{a}{2}$，即 $-2<a<-1$，则 $f(x)$ 在 $x=-(a+1)$ 处取最小值 $f(-a-1)=a+1$，

因此 $a+1=-\frac{1}{2}$，$a=-\frac{3}{2}$.

若 $-(a+1)\geq-\frac{a}{2}$，即 $a\leq-2$，则 $f(x)$ 在 $x=-\frac{a}{2}$ 处取最小值 $-\frac{a^2}{4}$，

因此 $-\frac{a^2}{4}=-\frac{1}{2}$，$a=\pm\sqrt{2}$（舍去）

10. 设 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 AB 上的动点，则平面 PDB_1 与平面 ADD_1A_1 夹角的正切值的最小值为_____.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解：延长 B_1P 和 A_1A 交于点 Q，则 Q 为平面 PDB_1 与平面 ADD_1A_1 的公共点，

从而 DQ 为平面 PDB_1 与平面 ADD_1A_1 的交线；

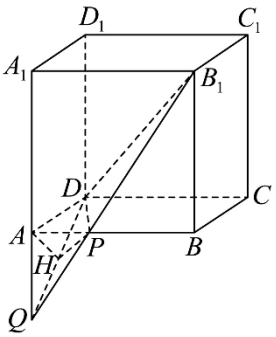
在平面 ADD_1A_1 内做 $AH\perp DQ$ 于点 H，连 PH，

由正方体性质易知 $PA\perp$ 平面 ADD_1A_1，$DQ\subset$ 面 ADD_1A_1，则 $PA\perp DQ$，

又 $AH\cap PA=A, AH, PA\subset$ 平面 AHP，故 $DQ\perp$ 平面 AHP，又 $HP\subset$ 平面 AHP，

故 $DQ\perp HP$，故 $\angle PHA$ 为二面角 B_1-DQ-A 的平面角，

设正方体棱长为 1，$PA=x, x\in[0,1]$，易知 $\triangle QAP\sim\triangle QB_1A_1$，故 $\frac{AP}{A_1B_1}=\frac{AQ}{A_1Q}$，



即 $\frac{x}{1}=\frac{AQ}{AQ+1}$，则 $AQ=\frac{x}{1-x}$，

由 $\triangle AQD$ 的面积得：$AH=\frac{AD\cdot AQ}{DQ}=\frac{x}{\sqrt{1-2x+2x^2}}$

故 $\tan\angle PHA=\dfrac{AP}{AH}=\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当点 P 为 AB 中点时等号成立，

故二面角 B_1-DQ-A 正切值最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则平面 PDB_1 与平面 ADD_1A_1 夹角的正切值的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. 6 名男生和 x 名女生随机站成一排，每名男生都至少与另一男生相邻. 至少有 4 名男生站在一起的概率为 p，若 $p\leq\dfrac{1}{100}$，则 x 的最小值为_____.

答案：594

解：若每名男生都至少与另一男生相邻，则必有如下站法之一：

$MM—MM—MM, MMMM—MM$，

$MM—MMMM, MMM—MMM, MMMMMM$.

(1) 考虑站法 $MM—MM—MM$. 在每两名男生组成的空档之间安排一名女生，进而，在 4 个位置安排余下的 $x-2$ 名女生. 因此，这样的排法有 C_{x+1}^3 种.

(2) 考虑站法 $MMMM—MM$，$MM—MMMM$，$MMM—MMM$. 这样将男生分成两个小组，空档之间安排一名女生，进而，在 3 个位置安排余下的 $x-1$ 名女生. 因此，这样的排法有 C_{x+1}^2 种.

(3) 考虑站法 $MMMMMM$. 将 6 名男生视为一个整体，与 x 名女生排列站队，有 $x+1$ 种排法.

综上所述，

$p=\dfrac{2C_{x+1}^2+(x+1)}{C_{x+1}^3+3C_{x+1}^2+(x+1)}=\dfrac{6x+6}{x^2+8x+6}\leq\dfrac{1}{100}$. 故 $f(x)=x^2-592x-594\geq 0$. 注意到，

$f(0)<0$，故所求 x 的最小值应满足 $\begin{cases} f(x-1)<0, \\ f(x)>0. \end{cases}$

易知，

$f(593)=593^2-592\times593-594=-1<0$，

$f(594)=594^2-592\times594-594=594>0$. 从而 $x_{\min}=594$.

12. 已知 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 三内角，向量 $\vec{\alpha}=(\cos\dfrac{A-B}{2},\sqrt{3}\sin\dfrac{A+B}{2})$，$|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$. 如

果当C最大时,存在动点M,使得$|\overrightarrow{MA}|,|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{MB}|$成等差数列,则$\frac{|\overrightarrow{MC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$最大值是____

答案：$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos^2\frac{A-B}{2}+3\sin^2\frac{A+B}{2}=2+\frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{3}{2}\cos(A+B)=2$$

$$\Leftrightarrow\cos(A-B)=3\cos(A+B)\Leftrightarrow 2\sin A\sin B=\cos A\cos B\Leftrightarrow\tan A\tan B=\frac{1}{2},$$

$$\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=-2(\tan A+\tan B)\le -4\sqrt{\tan A\tan B}=-2\sqrt{2}$$

等号成立仅当$\tan A=\tan B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 令|AB|=2c,因$|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|=4c$,

所以， M 是椭圆$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$上的动点. 故点$C$ （0, $\frac{\sqrt{2}}{2}c$），

设$M(x,y)$，则$|MC|^2=x^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{2}c)^2$

$$=4c^2-\frac{4}{3}y^2+y^2-\sqrt{2}cy+\frac{c^2}{2}=-\frac{1}{3}y^2-\sqrt{2}cy+\frac{9c^2}{2},|y|\le\sqrt{3}c.$$

当$y=-\sqrt{3}c$时， $|MC|^2_{\max}=\frac{7+2\sqrt{6}}{2}c^2$, $|MC|_{\max}=\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}}c$.

即$\frac{|\overrightarrow{MC}|}{|\overrightarrow{AB}|}_{\max}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.

三、解答题（本题共4道大题，每题15分，满分60分）

13.已知x为一实数， $0<x<\pi$，证明：对于所有的自然数n

$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$的值为正数.

解： 令$f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$， 利用

$2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos 2kx$，

得

$$2f(x)\sin x=1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\frac{\cos 4x-\cos 6x}{5}+\cdots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cos 6x-\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)-\frac{\cos 2nx}{2n-1}$$

$$\geqslant 1-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n-1}\right]=0.$$

如果等号成立。则有 $\cos 2kx=1(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，但因 $0<x<\pi$，故 $\cos 2x\neq 1$．于是得 $f(x)\sin x>0$．又因 $\sin x>0$，所以 $f(x)>0$．

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，P 是直线 $l:x=\frac{a}{2}$ 上一点，且 P 不在 x 轴上，以点 P 为圆心，线段 PF 的长为半径的圆弧 AF 交 C 的右支于点 N.

(1)证明：$\angle APN=2\angle NPF$；

(2)取 $a=1$，若直线 PF 与 C 的左、右两支分别交于 E，D 两点，过 E 作 l 的垂线，垂足为 R，试判断直线 DR 是否过定点若是，求出定点的坐标；若不是，请说明理由.

解：（1）证明：过 N 作 l 的垂线，垂足为 H，且与圆弧 AF 交于点 M，则 $MN\ /\!/\ AF$，

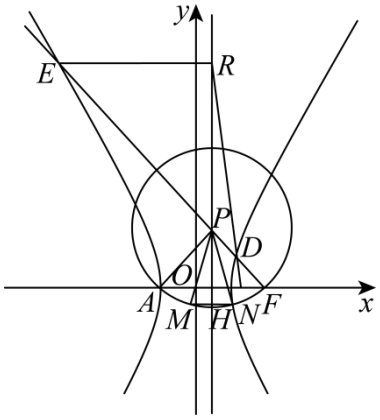
连接 AM，PM，NF．因为在圆 P 中，$PH\perp AF$，$PH\perp MN$，所以

$|AM|=|NF|,|MH|=|HN|$.

由题易知右焦点 $F(2a,0)$，设点 $N(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{3a^2}=1$，整理得 $y_0^2=3x_0^2-3a^2$．

因为 $\frac{|NF|}{|HN|}=\frac{\sqrt{(x_0-2a)^2+y_0^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{\sqrt{(x_0-2a)^2+3x_0^2-3a^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{\sqrt{(2x_0-a)^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{|2x_0-a|}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=2$，

所以 $|NF|=2|HN|$，所以 $|AM|=|NF|=|MN|$.



因为直线 $l:x=\frac{a}{2}$ 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$ 的准线，

根据双曲线的第二定义，可知 $\frac{|NF|}{|HN|}=\frac{c}{a}=2$，

即 $|NF|=2|HN|$，即得 $|AM|=|NF|=|MN|$.

在圆 P 中，由相等弦长所对的圆心角相等，得

$\angle APM=\angle MPN=\angle NPF$，

所以 $\angle APN=2\angle NPE$.

（2）由题知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，渐近线为：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

右焦点为 $F(2,0)$，直线 PF 的斜率不为 0，设直线 PF 的方程为 $x=my+2$

因为直线 PF 与 C 的左，右两支分别交于 E，D 两点，则 $m\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，$R\left(\frac{1}{2},y_2\right)(y_1\neq y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+2\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{12m}{3m^2-1},y_1y_2=-\frac{9}{3m^2-1}$.

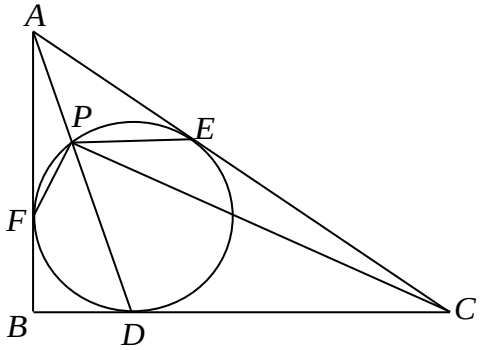
由题知，直线 DR 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2-y_1}{\frac{1}{2}-x_1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_1y_2-\frac{1}{2}y_1}{y_2-y_1}=\frac{(my_1+2)y_2-\frac{1}{2}y_1}{y_2-y_1}=\frac{my_1y_2+2y_2-\frac{1}{2}y_1}{y_2-y_1}=\frac{-\frac{3}{4}(y_1+y_2)+2y_2-\frac{1}{2}y_1}{y_2-y_1}$

$=\frac{\frac{5}{4}(y_2-y_1)}{y_2-y_1}=\frac{5}{4}$，

所以直线 DR 过定点 $\left(\frac{5}{4},0\right)$.

15. 在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，它的内切圆分别与边 BC，CA，AB 相切与点 D，E，F，连结 AD，与内切圆相交于另一点 P，连结 PC，PE，PF．已知 $PC\perp PF$，求证：$PE//BC$.



证明：连结 DE，DF，则 ΔBDF 是等腰直角三角形.

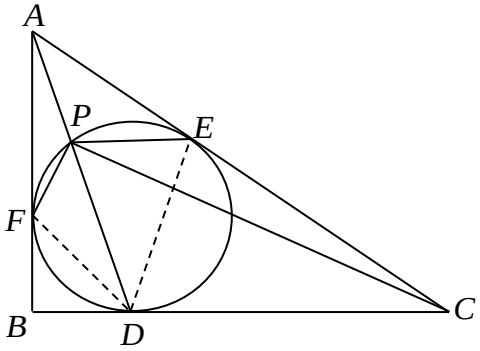
于是 $\angle FPD=\angle FDB=45°$，

故 $\angle DPC=45°$.

又 $\angle PDC=\angle PFD$，所以 $\Delta PFD\backsim\Delta PDC$，

所以 $\frac{PF}{FD}=\frac{PD}{DC}$.　①

又由 $\angle AFP=\angle ADF$，$\angle AEP=\angle ADE$，



所以，$\Delta AFP \backsim \Delta ADF$，$\Delta AEP \backsim \Delta ADE$，

于是 $\frac{EP}{DE}=\frac{AP}{AE}=\frac{AP}{AF}=\frac{FP}{DF}$，

故由①得 $\frac{EP}{DE}=\frac{PD}{DC}$．　②

因为 $\angle EPD=\angle EDC$，结合②得，$\Delta EPD \backsim \Delta EDC$，

所以，ΔEPD 也是等腰三角形，于是 $\angle PED=\angle EPD=\angle EDC$，所以 $PE // BC$．

16. 对于每项均是正整数的数列 P：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 T_1，T_1 将数列 P 变换成数列 $T_1(P)$：$n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$．对于每项均是非负整数的数列 $Q:b_1,b_2,\cdots,b_m$，定义 $S(Q)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$，定义变换 T_2，T_2 将数列 Q 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(Q)$．

(1)若数列 P_0 为 2，4，3，7，求 $S(T_1(P_0))$ 的值；

(2)对于每项均是正整数的有穷数列 P_0，令 $P_{k+1}=T_2(T_1(P_k))$，$k\in \mathrm{N}$．

（i）探究 $S(T_1(P_0))$ 与 $S(P_0)$ 的关系；

（ii）证明：$S(P_{k+1})\le S(P_k)$．

解：（1）依题意，$P_0:2,4,3,7$，$T_1(P_0):4,1,3,2,6$，

$S(T_1(P_0))=2(4+2\times1+3\times3+4\times2+5\times6)+16+1+9+4+36=172$．

（2）（i）记 $P_0:a_1,a_2,\cdots,a_n,(a_1,a_2,\cdots,a_n\in \mathbf{N}^*)$，

$T_1(P_0):n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$，

$S(T_1(P_0))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$，

$S(P_0)=2(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

$S(T_1(P_0))-S(P_0)=2n+2a_1+2a_2+\cdots+2a_n-4-6-\cdots-2(n+1)+n^2-2a_1-2a_2-\cdots-2a_n+n$

$=n^2+3n-\frac{(2n+6)\cdot n}{2}=0$，所以 $S(T_1(P_0))=S(P_0)$．

（ii）设 A 是每项均为非负整数的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，

当存在 $1\le i<j\le n$，使得 $a_i\le a_j$ 时，交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列 B，

则 $S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-ja_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\le 0$，

当存在$1\le m<n$，使得$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$时，若记数列$a_1,a_2,\cdots,a_m$为$C$，则

$S(C)=S(A)$，

因此$S\left(T_2(A)\right)\le S(A)$，从而对于任意给定的数列$P_0$，

由$P_{k+1}=T_2\left(T_1\left(P_k\right)\right)(k=0,1,2,\cdots)$，$S\left(P_{k+1}\right)\le S\left(T_1\left(P_k\right)\right)$，由（i）知$S\left(T_1\left(P_k\right)\right)=S\left(P_k\right)$，

所以$S\left(P_{k+1}\right)\le S\left(P_k\right)$.