2025 年北京预赛
一试

前 8 题每题 8 分，第 9 题 16 分，第 10, 11 题每题 20 分

1. 若存在实数 x 使得不等式 $a^{\sin^2 x}+a^{2+\cos^2 x}\geq 3$ 成立，则正实数 a 的取值范围是_____.

解：积一定，差大和大

$\therefore a^0+a^3\geq 3\Rightarrow a\geq\sqrt[3]{2}$

2. 定义数列 $\{a_n\}:a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{x+a_n}{1-xa_n}$（$x$ 为常数）. 若 $\{a_n\}$ 的最小正周期为 3，则 $a_{2025}=$_____.

$x=\tan v, a_n=\tan u$

$\Rightarrow a_{n+1}=\tan(u+v)$

$\Rightarrow v=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow a_{2025}=a_3=\tan(\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{2\pi}{3})=\pm\sqrt{3}-2$

3. 已知正整数 m,n 满足 $m^2-n=32$，且 $\sqrt[5]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[5]{m-\sqrt{n}}$ 是方程 $x^5-10x^3+20x-40=0$ 的一个实根，则 $m+n=$_____.

$x=a+b\Rightarrow ab=2$

$x^5=(a+b)^5=a^5+b^5+5ab(a^2+ab+b^2)(a+b)$

$=2m+10(x^2-2)x$

$\Rightarrow m=20,n=368\Rightarrow m+n=388$

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=AD=2$，M 为平面 BA_1C_1 内一点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值是_____.

设AC中点T

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=TM^2-TA^2=TM^2-2$

$\geq\dfrac{4}{3}-2=-\dfrac{2}{3}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，

$$(\sin A+\sin B)\sin\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

已知 $BC=2$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为_____.

已知$\Rightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

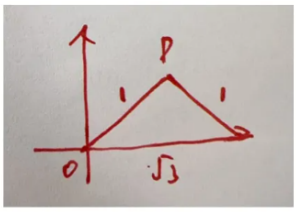
$\Rightarrow\sin(A-B)=\sin B+\sin C$

$\Rightarrow\sin(A-B)=\sin B+\sin(A+B)$

$\Rightarrow 0=\sin B+2\sin B\cos A$

$\Rightarrow A=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 关于 z 的方程 $z^{n+1}-\sqrt{3}z^n-1=0$ 存在一个模为 1 的虚根，则正整数 n 的最小值是_____.



$|z^n||z-\sqrt{3}|=1\Rightarrow|z-\sqrt{3}|=1$

几何意义 $\Rightarrow z=(1,\pm\frac{\pi}{6})$

$z-\sqrt{3}=\bar{z}^n\Rightarrow 210=30n\Rightarrow n=7$

7. 将 6 个不同的科研项目分配给 4 个不同的研究所，要求每个研究所至少负责 1 个项目，则项目 A 和项目 B 被分配到同一研究所的概率是_____.

考虑分组3111,2211

$$\frac{C_4^1+C_4^2}{C_6^3+3C_6^2}=\frac{2}{13}$$

8. 设 a,b,c 都是整数，如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根，且都在区间 $\left(\frac{2}{5},\frac{5}{6}\right)$ 内，那么正整数 a 的最小值是_____.

$$\begin{cases} f(\frac{2}{5})>0 \\ f(\frac{5}{6})>0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \frac{2}{5}<-\frac{b}{2a}<\frac{5}{6}\Rightarrow -0.8a<b<\frac{5}{3}a \end{cases}$$

从后两个得a,b带入验证得最小6

9. 正实数 a,b,c,d 满足 $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=36$，$(a+d)\sqrt{b^2+c^2}=6$. 则 a^2d 的最大值是_____.

$$36=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$$

$$\geq(a\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}d)^2=36$$

$$\Rightarrow\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{ad}\Rightarrow\sqrt{ad}(a+d)=6$$

$$(a^2d)^4=\frac{(a^2d)^4}{[\sqrt{ad}(a+d)]^6}6^6=6^6\frac{a^5d}{(a+d)^6}$$

$$=\frac{6^6}{5}(\frac{a}{a+d})^5\frac{5d}{a+d}\leq\frac{6^6}{5}(\frac{5}{6})^6=5^5$$

$$f\leq 5\sqrt[4]{5}$$

10. 等式 $[a[an]]-[an]=n-1$ 对一切正整数 n 成立，则所有满足条件的实数 a 的值为_____.

容易证明$a>1$

$n-1=[(a-1)[an]]\leq(a-1)[an]\leq(a^2-a)n$

$\Rightarrow 1\leq a^2-a$

向下放缩$1\geq a^2-a$

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

11. 已知 O 为原点，矩形 $OABC$ 的三个顶点 A,B,C 均在椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 上，则矩形 $OABC$ 的面积为_____.

仿射成单位圆

变成120度菱形，面积 $=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以原本面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

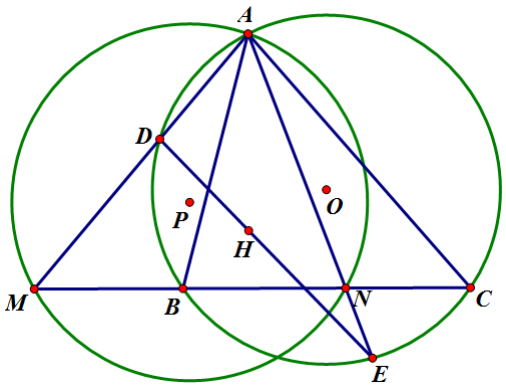
2025 年北京预赛
二试

一、（40 分）设 $a,b,c,d>0$，求证：

$$\sum \frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} \le \frac{1}{abcd}.$$

二、（40 分）已知互不相等的正整数 a,b,c 和互不相等的正整数 A,B,C，满足 $[a,b]=(A,B),[b,c]=(B,C),[c,a]=(C,A)$，求 $\dfrac{A+B+C}{a+b+c}$ 的所有可能整数值.

三、（50 分）如图，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 过 H 的动直线 l 交圆 O 于点 D,E，直线 AD 与 BC 交于点 M，直线 AE 与 BC 交于点 N. 设 $\triangle AMN$ 的外心为 P，求证：P 的轨迹为一条定直线.



四、（50 分）有 2025 张数字卡片，上面分别写有数字 1 至 45，每个数字卡恰有 45 张. 现在，有 45 位高中生参加交换卡片的游戏，每次交换由两位同学参与，他们两人各自将某一张手中的卡片交给对方. 每人最初持有 45 张卡片. 求证：至少存在一种交换方案，每个卡片至多只参加一次交换，使得最终每人手中都有 1 至 45 号卡片各一张.

2 二试

2025 年全国高中数学联赛预赛-北京赛区

解析几何钩沉　18 May 2025

题目 2.1 (代数) — 已知 $a,b,c,d>0$, 证明:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\frac{1}{a^4+b^4+d^4+abcd}+\frac{1}{a^4+c^4+d^4+abcd}+\frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd}\leqslant\frac{1}{abcd}$$

证明. 首先给出如下引理:

引理 — 若 $a,b,c,d>0$, 则

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}\leq\frac{1}{abc}\cdot\frac{1}{a+b+c+d}. \tag{2.1}$$

证明.

$$(2.1)\iff a^2bc+ab^2c+abc^2\leq a^4+b^4+c^4\iff a+b+c\leq\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \tag{2.2}$$

由排序不等式成立. □

由引理知:

$$LHS\leq\frac{1}{a+b+c+d}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right)=\frac{1}{abcd}$$ □

注释 2.1 — 实际上, (2.2) 最终要证明的是一个对称且满足 $(4,0,0)\to(2,1,1)$ 的幂和不等式, 直接由 **Muirhead** 或 **Schur**（四次）即可推出:

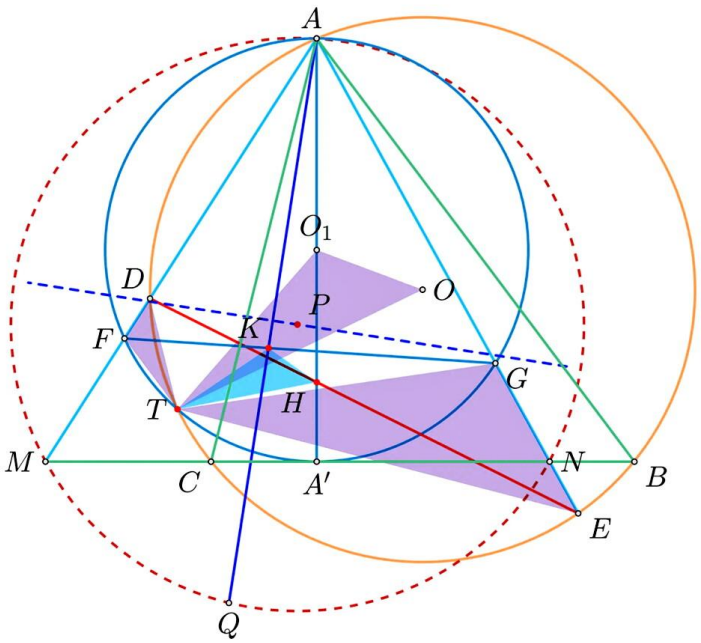
$$\sum_{\text{sym}}a^4\geq\sum_{\text{sym}}a^2bc.$$

2 二试

2025 年全国高中数学联赛预赛-北京赛区

解析几何钩沉　18 May 2025

题目 2.3 (几何) — 已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，过 H 的动直线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D, E，直线 AD, AE 与 BC 分别交于点 M, N，证明：$\triangle MAN$ 的外心在定直线上.



证明. 记 A 在 BC 的投影为 A'，AA' 的中点为 O_1，以 AA' 为直径的圆与 $\odot ABC$ 交于点 T。首先给出如下引理：

引理 — 记 AD, AE 与 $\odot(AA')$ 分别交于点 F, G，则：

$$\triangle TFD \sim \triangle TO_1O \sim \triangle TGE$$

证明.

$$\begin{cases} A,F,T,G\text{四点共圆} \Longrightarrow \angle DFT = EGT \\ A,D,T,E\text{四点共圆} \Longrightarrow \angle FDT = GET \end{cases} \Longrightarrow \triangle TFD \sim \triangle TGE$$

同理可证另一组. □

由引理知：在 D, F 变化的过程中，$\angle TFD \equiv \angle TGE \equiv \angle TO_1O$ 恒为定值，又 T, H 均为定点，故在 FG 上必定存在点 K，使得 $\triangle TKH \sim \triangle TFD$，从而 K 也是定点.

记 $AK \cap \odot AMN = Q$，则 AQ 是 $\odot AMN$ 的定弦，所以由垂径定理，$\odot AMN$ 的外心 P 恒在 AQ 的中垂线上，证毕. □

注释 2.3 — 实际上，我们熟知两圆相交必有相似，所以引理显然成立.

另外，垂心 H 换成 $\triangle ABC$ 内任意一点，结论仍然成立.