2025年上海市高三数学竞赛试卷

2025年3月9日上午9:30~11:30

【说明】解答本试卷不得使用计算器. 解答请写在答题纸上.

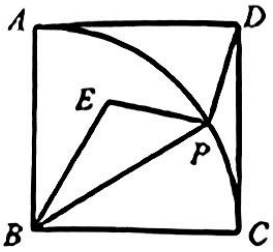
一、填空题（本大题满分60分，前4小题每小题7分，后4小题每小题8分）

1. 函数 $f(x)=x(2-x)^2, x\in(0,2)$，则 $f(x)$ 的最大值是_____.

2. 对于实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $[\lg 1]+[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 2025]=$_____.

3. 已知 α,β 是实数，$z_1=\sin 2\alpha+\mathrm{i}\sin^2\alpha, z_2=\frac{1}{2}(\sin\beta+\cos\beta+\mathrm{i}\sin 2\beta)$，其中 i 是虚数单位. 若 $z_1=z_2$，则 $\cos 2\alpha$ 的值是_____.

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，以顶点 B 为圆心，BA 长为半径作劣弧 $\overset{\frown}{AC}$，P 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上一个动点，连 PD，将 PD 绕点 P 逆时针方向旋转 90°，得到线段 PE，连 BE. 若 $\triangle BPE$ 面积的最大值为10，则正方形 $ABCD$ 的面积为_____.



5. 已知函数 $f(x)=m(x-2m)(x-m^2+2), g(x)=2^x-4$. 若对任意实数 x 均有 $f(x)<0$ 或者 $g(x)<0$，则实数 m 的取值范围是_____.

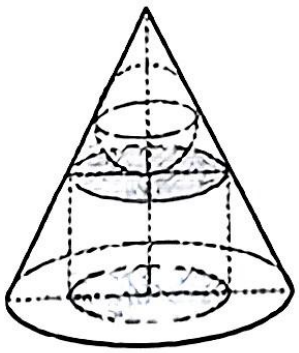
6. 从 $1,2,\cdots,30$ 这30个正整数中任取3个不同的数 a,b,c，$a<b<c$，则数列 a,b,c 能构成等比数列的概率是_____.（用最简分数表示答案）

7. 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，且满足 $|\vec{a}|=5, \cos\theta=\frac{4}{5}$. 若对任意实数 λ，均有 $|\vec{b}-\lambda\vec{a}|\geq|\vec{b}-\vec{a}|$，则 $|t\vec{b}-\vec{a}|+|t\vec{b}-2\vec{a}|(t\in\mathbf{R})$ 的最小值为_____.

8. 对于正整数 n，记 a_n 表示与 $\sqrt{n}$ 最接近的整数，例如 $a_2=1, a_3=2$. 若 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leq 1000$，则 n 的最大值为_____.

二、解答题（本大题满分60分，每小题15分）

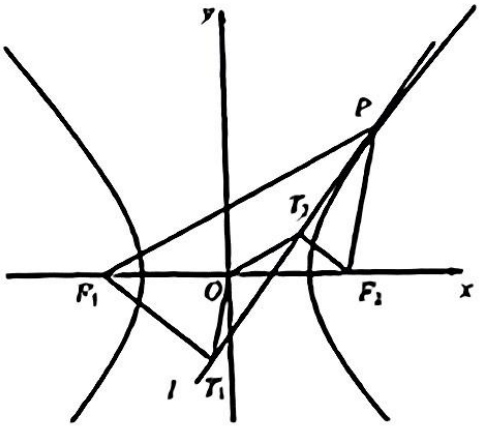
9. 如图，已知底面半径为3，高为4的圆锥内有一个内接圆柱，圆柱的上底面与圆锥的侧面所围成的小圆锥内有一个内切球，求内接圆柱与内切球的体积和的最大值.（π 可以保留在答案中）



10. 在平面直角坐标系xOy中，双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，若直线$l$是过$\Gamma$右支上点$P$的切线，且$l$不与$x$轴垂直．过点$F_1$、$F_2$分别作直线$l$的垂线，垂足为$T_1$、$T_2$，如图．

（1）求证：点T_1、T_2均在以O为圆心，a为半径的圆上，并且$OT_1 /\!/ F_2P$，$OT_2 /\!/ F_1P$；

（2）求证：$|F_1T_1|\cdot|F_2T_2|$是定值．



11. 记$\mathbf{N}^*$表示全体正整数构成的集合，已知定义在$\mathbf{N}^*$上的严格增函数$f(n)$，其值域$A\subseteq\mathbf{N}^*$，且对任意正整数n均有$f(f(n))=3n$．

（1）求$f(1),f(2)$的值；

（2）求$f(2025)$的值．

12. 在一个45×45的方格表中，取出十个矩形$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$，满足：每个矩形的四条边都重合于方格表的网格线或边界，且对每个$i=1,2,\cdots,9$，矩形Γ_i完全位于Γ_{i+1}的内部（不含边界）．设$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$的面积分别为$S_1,S_2,\cdots,S_{10}$．

（1）证明：对每个$i=1,2,\cdots,10$，都有$S_i\neq333$；

（2）将$\frac{S_2}{S_1},\frac{S_3}{S_2},\cdots,\frac{S_{10}}{S_9}$中的最小数记为$m$，求$m$的最大可能值．

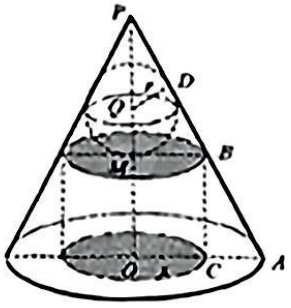
2025年上海市高三数学竞赛答案与评分标准

一、填空题（本大题满分60分，前4小题每小题7分，后4小题每小题8分）

1. $\frac{27}{16}$
2. 4968
3. $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$
4. $20\left(\sqrt{2}+1\right)$
5. $(-2,0)$
6. $\frac{19}{4060}$
7. $\sqrt{97}$
8. 130

二、解答题（本大题满分60分，每小题15分）

9. 如图，已知底面半径为3，高为4的圆锥内有一个内接圆柱，圆柱的上底面与圆锥的侧面所围成的小圆锥内有一个内切球，求内接圆柱与内切球的体积和的最大值.（π可以保留在答案中）



解：设内接圆柱的底面半径为x，高为h，内切小球的半径为r.

如图所示，由Rt△POA∽Rt△PMB可得：$\frac{MB}{OA}=\frac{PM}{PO}$，即

$$\frac{x}{3}=\frac{4-h}{4},$$

所以$h=\frac{4}{3}(3-x)$，于是圆柱体的体积为

$$V_1=\pi\cdot x^2\cdot h=\frac{4\pi}{3}(3x^2-x^3).$$ ------- 4分

由Rt△PQD∽Rt△PBM可得：$\frac{QD}{BM}=\frac{PQ}{PB}$.

因为$PM=\frac{4}{3}x, PB=\frac{5}{3}x$，所以

$$\frac{r}{x}=\frac{\frac{4}{3}x-r}{\frac{5}{3}x},$$

所以$r=\frac{x}{2}$. 故小球的体积为

$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\pi}{6}x^3.$$ ------- 8分

内接圆柱与内切球的体积和为

$$V_1+V_2=\frac{4\pi}{3}(3x^2-x^3)+\frac{\pi}{6}x^3=\frac{\pi}{6}(-7x^3+24x^2),\ 0<x<3.$$

因为

$$-7x^3+24x^2=\frac{4}{49}\cdot\frac{7}{2}x\cdot\frac{7}{2}x\cdot(24-7x)\le\frac{4}{49}\left(\frac{\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}x+(24-7x)}{3}\right)^3$$

$$=\frac{4}{49}\cdot 8^3=\frac{2048}{49},$$ ------- 13分

当$\frac{7}{2}x=24-7x$，即$x=\frac{16}{7}$时等号成立.

故$-7x^3+24x^2(0<x<3)$的最大值为$\frac{2048}{49}$，从而欲求的最大值为

$$\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2048}{49}=\frac{1024\pi}{147}.$$ ------- 15分

10. 在平面直角坐标系xOy中，双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，若直线$l$是过$\Gamma$右支上点$P$的切线，且$l$不与$x$轴垂直. 过点$F_1$、$F_2$分别作直线$l$的垂线，垂足为$T_1$、$T_2$，如图.

（1）求证：点T_1、T_2均在以O为圆心，a为半径的圆上，并且$OT_1\parallel F_2P$，$OT_2\parallel F_1P$；

（2）求证：$|F_1T_1|\cdot|F_2T_2|$是定值.

解：（1）设$P(x_0,y_0)(x_0>a),|F_1F_2|=2c$，则双曲线$\Gamma$右支上过点$P$的切线$l$的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

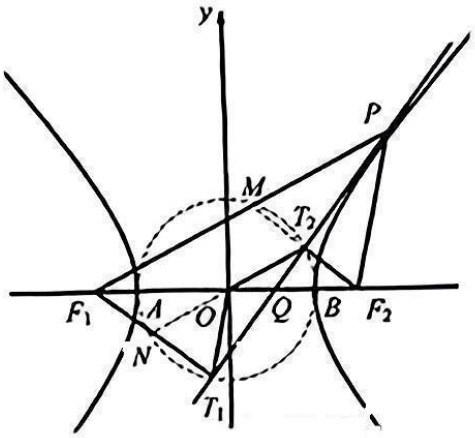
它与x轴的交点Q的坐标为$\left(\frac{a^2}{x_0},0\right)$，所以

$$|F_1Q|=\frac{a^2}{x_0}+c,|F_2Q|=c-\frac{a^2}{x_0}=\frac{cx_0-a^2}{x_0}.$$

又

$$|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=\frac{cx_0+a^2}{a},$$

$$|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{cx_0-a^2}{a},$$



于是 $$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{cx_0+a^2}{cx_0-a^2}=\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|}。$$

从而在$\triangle PF_1F_2$中，由三角形内角平分线定理的逆定理得，PQ平分$\angle F_1PF_2$，即$\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$。 ------- 4分

如图，延长F_2T_2，与PF_1相交于点M，则$|PM|=|PF_2|, |MT_2|=|F_2T_2|$，所以

$$|F_1M|=|PF_1|-|PM|=|PF_1|-|PF_2|=2a.$$

因为O, T_2分别是线段F_1F_2, F_2M的中点，所以$OT_2 /\!/ F_1M$，即$OT_2 /\!/ F_1P$.

同理可得$OT_1 /\!/ F_2P$. ------- 8分

由O, T_2分别是线段F_1F_2, F_2M的中点可得，$|OT_2|=\frac{1}{2}|MF_1|=a$，故点$T_2$在以$O$为圆心，$a$为半径的圆上．同理，点$T_1$也在以$O$为圆心，$a$为半径的圆上.

------- 10分

（2）以O为圆心，a为半径的圆为圆O．双曲线Γ的左、右顶点分别为A、B.

延长T_2O，与F_1T_1相交于点N．因为$F_1T_1 \perp l, F_2T_2 \perp l$，所以$F_1T_1 /\!/ F_2T_2$，从而$\angle NF_1O=\angle T_2F_2O$.

又$\angle NOF_1=\angle T_2OF_2, |OF_1|=|OF_2|$，所以$\triangle NF_1O \cong \triangle T_2F_2O$，故

$$|NO|=|T_2O|=a, |F_1N|=|F_2T_2|.$$

所以，点N在以O为圆心，a为半径的圆上. ------- 12分

于是由圆幂定理得

$$|F_1T_1|\cdot|F_2T_2|=|F_1T_1|\cdot|F_1N|=|F_1A|\cdot|F_1B|=(c-a)(c+a)=b^2.$$

------- 15分

11. 记$\mathbf{N}^*$表示全体正整数构成的集合，已知定义在$\mathbf{N}^*$上的严格增函数$f(n)$，其值域$A\subseteq \mathbf{N}^*$，且对任意正整数n均有$f(f(n))=3n$.

（1）求$f(1), f(2)$的值：

（2）求$f(2025)$的值.

解：（1）若$f(1)=1$，则$f(f(1))=f(1)=1$，但由题设条件知，$f(f(1))=3$，矛盾！所以$f(1)\geq 2$.

若$f(1)\geq 3$，则$f(3)>f(1)\geq 3$，进而

$$3=f(f(1))\geq f(3)>3,$$

矛盾！所以$f(1)=2$. ------- 2分

进而$f(2)=f(f(1))=3$. ------- 4分

（2）由题设条件知

$$f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n). \quad ①$$

下面用反证法证明对任意正整数n，有不等式：

$$f(n+1)\leq f(n)+3. \quad ②$$

若不然，存在正整数n_0，使得$f(n_0+1)\geq f(n_0)+4$，于是

$$\begin{aligned}3(n_0+1)&=f(f(n_0+1))\geq f(f(n_0)+4)\geq f(f(n_0)+3)+1\\&\geq f(f(n_0)+2)+2\geq f(f(n_0)+1)+3\geq f(f(n_0))+4\\&=3n_0+4,\end{aligned}$$

矛盾！从而②式得证. ------- 9分

反复利用①，②可得

$$\begin{aligned}f(2025)&=f(3^4\times 25)=3^4f(25)\geq 3^4(f(27)-6)\\&=3^4f(3^3)-3^4\times 6=3^7f(1)-3^4\times 6=3888,\end{aligned}$$

-------12分

$$\begin{aligned}f(2025)&=f(3^4\times 25)\leq 3^4(f(24)+3)=3^4f(3\times 8)+3^5\\&=3^5f(8)+3^5\leq 3^5(f(6)+6)+3^5\\&=3^6f(2)+7\times 3^5=3888.\end{aligned}$$

综上可得，$f(2025)=3888$. ------- 15分

注：我们可以得到

$$f(n)=\begin{cases}n+3^m, & 3^m\leq n\leq 2\times 3^m,\\ 3n-3^{m+1}, & 2\times 3^m<n<3^{m+1}.\end{cases}$$

事实上，因为$f(1)=2$，$f(2)=3$. 假设$f(k)=n, f(k+1)=n+1$，则

$$f(n)=f(f(k))=3k, f(n+1)=f(f(k+1))=3(k+1),$$

而

$$f(3k)=f(f(n))=3n, f(3(k+1))=f(f(n+1))=3n+3,$$

故 $$f(3k+1)=3n+1, f(3k+2)=3n+2.$$

即如果相邻两个正整数$k, k+1$的函数值也相邻，那么从$3k$到$3k+3$的4个连续正整数的函数值也是连续的正整数，且$f(3k)=3f(k)$.

假设正整数n在区间$\left[3^m, 2\times 3^m\right]$内，则由于

$$f(3^m)=3^mf(1)=2\times 3^m, f(2\times 3^m)=3^mf(2)=3^{m+1}.$$

故由f是增函数，可得$f(3^m+j)=2\times 3^m+j, j=0,1,2,\cdots,3^m$.

而当n在区间$\left(2\times 3^m, 3^{m+1}\right)$中时，有

$$\begin{aligned}f(2\times 3^m+j)&=f(f(3^m+j))=3^{m+1}+3j\\&=3n-3^{m+1}, j=1,2,\cdots,3^{m+1}-1.\end{aligned}$$

因为$2\times 3^6=1458<2025<2187=3^7$，所以

$$f(2025)=3\times 2025-3^7=3888.$$

12. 在一个45×45的方格表中，取出十个矩形$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$，满足：每个矩形的四条边都重合于方格表的网格线或边界，且对每个$i=1,2,\cdots,9$，矩形Γ_i完全位于Γ_{i+1}的内部（不含边界）. 设$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$的面积分别为$S_1,S_2,\cdots,S_{10}$.

（1）证明：对每个$i=1,2,\cdots,10$，都有$S_i\neq 333$.

（2）将$\frac{S_2}{S_1},\frac{S_3}{S_2},\cdots,\frac{S_{10}}{S_9}$中的最小数记为$m$，求$m$的最大可能值.

解：对$i=1,2,\cdots,10$，设矩形Γ_i的尺寸为$a_i\times b_i$（横向×纵向），则$S_i=a_ib_i$.

由题意知十个矩形$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$满足的充要条件为

$$a_i,b_i\in\{1,2,\cdots,45\}\,(1\le i\le 10)，且\,a_{i+1}-a_i,b_{i+1}-b_i\ge 2\,(1\le i\le 9).\qquad ①$$

（1）反证法. 假设存在某个i，使得$S_i=333$，即$a_ib_i=333=3^2\times 37$，因37为素数，而$a_i,b_i\le 45$，由对称性，不妨设$a_i=9,b_i=37$.

根据①，有$a_5\ge a_1+4\times 2\ge 9=a_i$，且$b_6\le b_{10}-4\times 2\le 37=b_i$，所以$5\ge i\ge 6$，矛盾.

从而对每个$i=1,2,\cdots,10$，都有$S_i\ne 333$. ------- 5分

（2）由①易知$a_i,b_i\ge 2i-1\,(1\le i\le 5)$. 考虑$S_5=a_5b_5$.

(i) 若$S_5\ge 99$，则

$$m^5\le\prod_5^9\frac{S_{i+1}}{S_i}=\frac{S_{10}}{S_5}\le\frac{45^2}{99},$$

即有

$$m\le\sqrt[5]{\frac{225}{11}}.\qquad ------- 8分$$

(ii) 若$S_5<99$，则(a_5,b_5)只能取$(9,9),(9,10),(10,9)$，结合$a_4,b_4\ge 7$知$m\le\frac{S_5}{S_4}\le\frac{90}{49}$.

注意到$\sqrt[5]{\frac{225}{11}}<\frac{90}{49}$（这等价于$\frac{225}{11}<\left(\frac{90}{49}\right)^5$，易验证

$$\frac{7^5}{9^2\times 20}=\frac{16807}{1620}<10.4<\sqrt{110},$$

平方整理后即得$\frac{225}{11}<\left(\frac{90}{49}\right)^5$），故由(i)、(ii)知

$$m\le\max\left\{\sqrt[5]{\frac{225}{11}},\frac{90}{49}\right\}=\frac{90}{49}.\qquad ------- 12分$$

下面构造使$m=\frac{90}{49}$的例子（例子不唯一）：取满足①的数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_{10})=(1,3,5,7,9,12,15,21,30,45),$$
$$(b_1,b_2,\cdots,b_{10})=(1,3,5,7,10,14,21,28,36,45),$$

此时直接计算$\frac{S_{i+1}}{S_i}=\frac{a_{i+1}b_{i+1}}{a_ib_i}(i=1,2,\cdots,9)$，可知

$$\left(\frac{S_2}{S_1},\frac{S_3}{S_2},\cdots,\frac{S_{10}}{S_9}\right)=\left(9,\frac{25}{9},\frac{49}{25},\frac{90}{49},\frac{28}{15},\frac{15}{8},\frac{28}{15},\frac{90}{49},\frac{15}{8}\right),$$

相应有$m=\frac{90}{49}$.

综上，m的最大可能值为$\frac{90}{49}$. ------- 15分