2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（决赛）

暨 2025 年全国高中数学联合竞赛试题

1.定义复数集 $\mathbf{C}$ 的子集 $A=\left\{z\in\mathbf{C}\middle|z=re^{i\theta},r\geq 0,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{41}\right]\right\}$，

$B=\left\{z\in\mathbf{C}\middle|z=x+iy,x,y\in\mathbf{R},|x-y|<2025\right\}$，

其中 i 是虚数单位，$re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

求所有的一元复系数多项式 $P(z)$，使得对任意 $z\in A$，都有 $P(z)\in B$.（说明：单项式也是多项式）。

2.设凸四边形 $ABCD$ 内接于圆心为 O、半径为 1 的圆，且满足 $\angle ABC<\angle BCD<90^\circ$.设 P 为直线 BA 与 CD 的交点。Q 为对角线 AC 与 BD 的交点。已知线段 BC 上存在一点 K，使得 P,A,K,D 四点共圆，且 $KB\cdot KC=\frac{1}{2}OP^2$.过点 Q 作 BC 的垂线，与直线 OP 交于点 T.

（1）求 OP 的所有可能值；

（2）求 $TB+TC$ 的所有可能值。

3.设n是正整数，有n张红色卡片与n张蓝色卡片，最初每张红色卡片上都写有一个实数0，每张蓝色卡片上都写有一个实数1，一次操作是指：选择一张红色卡片与一张蓝色卡片，满足红色卡片上的实数x小于蓝色卡片上的实数y，将这两个实数擦去，并在这两张卡片上都写下实数$\frac{x+y}{2}$.

求最小的正整数n，使得可以适当地进行有限次操作，让所有n张红色卡片的实数之和大于100.

4.现有七十张牌，共有三十种不同颜色，将其中五十张作为上层牌堆，其余二十张作为下层牌堆。进行如下操作：

①每次从下层二十张中挑出一张颜色下在上层五十张中出现的牌；

②将这张牌取出，并放在上层五十张中某张颜色重复出现的牌上方。

（1）证明该操作一定会停止；

（2）求操作的最大可能次数。

5.求 λ 的取值范围，使对充分大的正整数 n，存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \tag{1}$$

与 $$\left(\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \right)^2 \le \lambda \left(\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j x_k \right) - \frac{1}{n} \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 . \tag{2}$$

6.设 n 为正奇数，并满足：对任意素数 $p \mid n$，都有 $(p-1, n) = 1$.求所有 $(a, b, c) \in \mathbf{Z}_n^{\,3}$，满足 $(a, b, c, n) = 1$，且存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对任意 $1 \le i \le n$，都有 $n \mid (ax_{i+2} + bx_{i+1} + cx_i)$，其中下标按模 n 计数。

2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（决赛）

暨 2025 年全国高中数学联合竞赛试题详解

1.定义复数集 $\mathbf{C}$ 的子集 $A=\left\{z\in\mathbf{C}\middle|z=re^{i\theta},r\geq 0,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{41}\right]\right\}$，

$B=\left\{z\in\mathbf{C}\middle|z=x+iy,x,y\in\mathbf{R},|x-y|<2025\right\}$，

其中 i 是虚数单位，$re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

求所有的一元复系数多项式 $P(z)$，使得对任意 $z\in A$，都有 $P(z)\in B$.（说明：单项式也是多项式）。

【答案】所有满足要求的多项式是 $P(z)=c$，其中 c 是 B 中的复数。

常数多项式的情况显然，以下假设 $P(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ （$n\geq 1$，$a_0\neq 0$）

【解析】基本思路：当 $|z|$ 足够大时，$P(z)$ 与 a_0z^n 非常接近。

关键估计：当 $|z|>1$ 时，我们对“余项”估计：$\frac{|a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n|}{|a_0||z|^n}\leq\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|z|}$

设 a_0 的辐角为 θ_0.则一定能找到一个 $\theta_1\in\left[0,\frac{\pi}{41}\right]$ 使得 $\theta_0+n\theta_1\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

此时 $\lambda:=|\cos(\theta_0+n\theta_1)-\sin(\theta_0+n\theta_1)|$.

这样，当 z 的模长 $r>1$ 时，由前述可知 $z=re^{i\theta_1}$ 满足

$$|\mathrm{Re}\,P(z)-\mathrm{Im}\,P(z)|$$

$$\geq|\mathrm{Re}\,a_0z^n-\mathrm{Im}\,a_0z^n|-|\mathrm{Re}(a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n)|-|\mathrm{Im}(a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n)|$$

$$\geq|a_0z^n||\cos(\theta_0+n\theta_1)-\sin(\theta_0+n\theta_1)|-2|a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n|$$

$$\geq \lambda\cdot|a_0|r^n-2(|a_1|+\cdots+|a_n|)r^{n-1}$$

$$=r^n\left(\lambda\cdot|a_0|-2\cdot\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{r}\right).$$

于是当 $r>\max\left(\frac{4}{\lambda}\cdot\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{|a_0|},\left(\frac{2\cdot 2025}{\lambda|a_0|}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ **时，**

$|\mathrm{Re}\,P(z)-\mathrm{Im}\,P(z)|>2025$，**从而** $P(z)\notin B$，**矛盾!**

2.设凸四边形 $ABCD$ **内接于圆心为** O**、半径为** 1 **的圆** Ω**，**

且满足 $\angle ABC<\angle BCD<90^\circ$ **.设** P **为直线** BA **与** CD **的交点。** Q **为对角线** AC **与** BD **的交点。已知线段** BC **上存在一点** K**，使得** P,A,K,D **四点共圆，且** $KB\cdot KC=\frac{1}{2}OP^2$ **.过点** Q **作** BC **的垂线，与直线** OP **交于点** T **.**

（1）求 OP **的所有可能值；**

（2）求 $TB+TC$ **的所有可能值。**

【答案】 （1） $OP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$； （2） $(2\sqrt{2},3)$.

【解析】 （1）由 P,A,K,D 共圆和 A,B,C,D 共圆知 $\angle PKA=\angle PDA=\angle CBA=\angle KBP$，

故 $PA\cdot PB=PK^2$.由于 Ω 的半径为 1，$KB\cdot KC=\frac{1}{2}OP^2$，分别考虑点 P 和点 K 关于圆 O 的幂，有

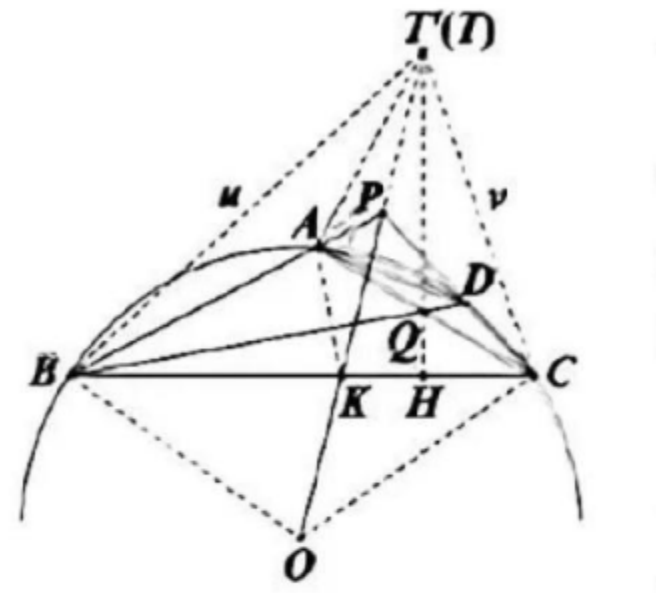
$$OP^2-1=PA\cdot PB=PK^2，\quad (*)$$

$$1-OK^2=KB\cdot KC=\frac{1}{2}OP^2.\quad (**)$$

由（*）和（**）相加得$\frac{1}{2}OP^2-OK^2=PK^2$，

$$\frac{1}{2}OP^2=PK^2+OK^2\geq\frac{1}{2}(PK+OK)^2\geq\frac{1}{2}OP^2.$$

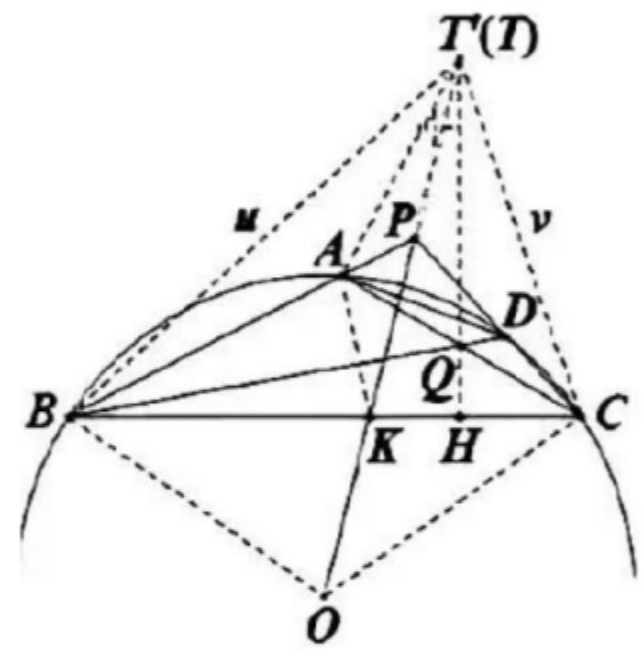
故此不等式为等式，即K为OP的中点。



进而由（**）知$1-\frac{1}{4}OP^2=\frac{1}{2}OP^2$，得$OP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

延长OK至T'使得$OT'=\sqrt{3}$，则$OK=KP=PT'=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由于$\frac{OT'}{OB}=\sqrt{3}=\frac{OB}{OK}$，故$\triangle OBT'\sim\triangle OKB$，相似比为$\sqrt{3}$.



又$PA\cdot PB=PK^2=PT'^2$，

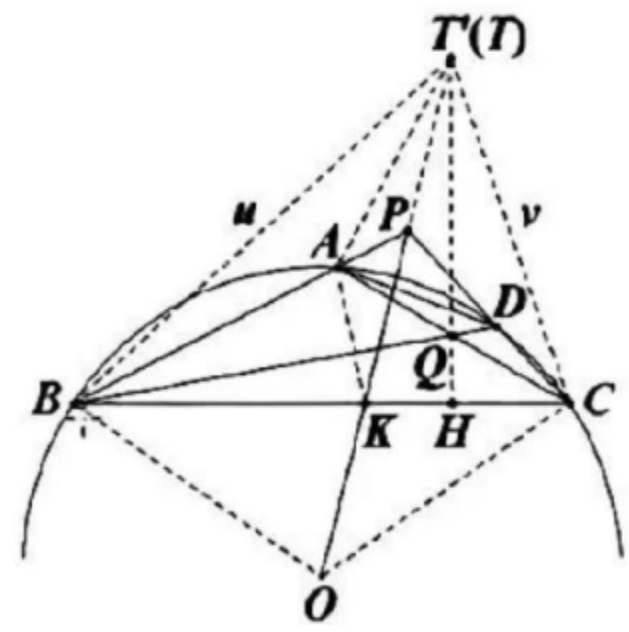
从而

$$\angle PAT'=\angle BT'P=\angle BT'O=\angle OBK=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BOC=90^\circ-\angle CAP,$$

即$\angle CAT'=90^\circ$.取T'在BC上的射影H，则T',A,H,C共圆，记该圆为ω_1.

同理可知T',B,H,D共圆，记该圆为ω_2.

对圆O,ω_1,ω_2，用根心定理知$T'H$经过AC和BD的交点Q，即T'为QH与OP的交点T.



设$TB=u$，$TC=v$，则$KB=\frac{\sqrt{3}}{3}u$，同理$KC=\frac{\sqrt{3}}{3}v$，

由$KB\cdot KC=\frac{1}{2}OP^2=\frac{2}{3}$知$uv=2$，

由 $\angle ABC<\angle BCD<90^\circ$ 易知 $PB>PC$，故显然有 $TB>TC$，于是 $u>\sqrt{2}>v$.

由 $QH\perp BC$ 知 H 在线段 BC 上，故 $\angle TCK<90^\circ$，

于是 $\frac{4}{3}=TK^2<TC^2+CK^2=\frac{4}{3}v^2$，得 $v>1$，所以 $v\in(1,\sqrt{2})$.

（反之，当 $v\in(1,\sqrt{2})$ 时，$\angle TCK<90^\circ$，CP 为 $\triangle TCK$ 的中线，

故 $PC>PK>\sqrt{PA\cdot PB}=\sqrt{PC\cdot PD}$，进而 $PB>PC>PD>PA$，符合题意。）

此时 $TB+TC=u+v=v+\frac{2}{v}$ 关于 v 连续且严格递减，

故 $TB+TC$ 的所有可能值恰为区间 $(2\sqrt{2},3)$ 中的一切值。

3.设 n 是正整数，有 n 张红色卡片与 n 张蓝色卡片，最初每张红色卡片上都写有一个实数 0，每张蓝色卡片上都写有一个实数 1，一次操作是指：选择一张红色卡片与一张蓝色卡片，满足红色卡片上的实数 x 小于蓝色卡片上的实数 y，将这两个实数擦去，并在这两张卡片上都写下实数 $\frac{x+y}{2}$.

求最小的正整数 n，使得可以适当地进行有限次操作，让所有 n 张红色卡片的实数之和大于 100.

【答案】证明见解析。

【解析】最小正整数 n 为 106.考虑有 n 张红卡片与 m 张蓝卡片的情况，初始红色数 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.蓝色数.$y_1=y_2=\cdots=y_m=1$ 考虑如下的操作方案：y_1 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依次操作，然后 y_2 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依次操作，$\cdots$，最后 y_m 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依次操作。设 y_i 与 x_j 操作之后两个数都变成 $h(i,j)$，则 $h(i,j)=\frac{h(i,j-1)+h(i-1,j)}{2}$，

因为操作之前 y_i 的值为的值为 $h(i,j-1)$，x_j 的值为 $h(i-1,j)$，默认 $h(0,j)=0$，$h(i,0)=1$，

这样归纳可得：$$h(i,j)=\frac{\binom{i+j-1}{0}+\binom{i+j-1}{1}+\cdots+\binom{i+j-1}{i-1}}{2^{i+j-1}}.$$

由上式可知，$h(i,j)+h(j,i)=1$，

并且 $h(i+1,j)-h(i,j)=\frac{h(i+1,j-1)-h(i,j)}{2}=\frac{1}{2^{i+j}}\binom{i+j-1}{i}>0$，

从而 $h(i,j)$ 关于 i 递增，关于 j 递减。

所有 mn 次操作之后，$y_i=h(i,n)$，$x_j=(m,j)$.对任意非负整数 m,n，定义 $T(m,n)$ 为上述操作中红数变大的总量，也是蓝数变小的总量，具体地

$$T(m,n)=h(m,1)+h(m,2)+\cdots+h(m,n)$$

$$m-[h(1,n)+h(2,n)+\cdots+h(m,n)].$$

易知 $T(m,n)=T(n,m)$，

下图展示了值和值的部分数值。

h值	1	1	1	1	1	1	T值	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{120}{128}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{56}{32}$	$\frac{119}{64}$	$\frac{246}{128}$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{42}{64}$	$\frac{99}{128}$	$\frac{219}{256}$	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{66}{32}$	$\frac{154}{64}$	$\frac{337}{128}$	$\frac{711}{256}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{163}{256}$	$\frac{382}{512}$	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{56}{32}$	$\frac{154}{64}$	$\frac{372}{128}$	$\frac{837}{256}$	$\frac{1804}{512}$
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{256}{512}$	$\frac{638}{1024}$	0	$\frac{31}{32}$	$\frac{119}{64}$	$\frac{337}{128}$	$\frac{837}{256}$	$\frac{1930}{512}$	$\frac{4246}{1024}$
0	$\frac{1}{64}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{37}{256}$	$\frac{130}{512}$	$\frac{386}{1024}$	$\frac{1024}{2048}$	0	$\frac{63}{64}$	$\frac{246}{128}$	$\frac{711}{256}$	$\frac{1804}{512}$	$\frac{4246}{1024}$	$\frac{9516}{2048}$

先说明 $T(106,106)>100$ 且 $T(105,105)<100$.

$$T(n,n)=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}}{2^n}+\frac{\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+1}{n-1}}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\cdots+\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}}$$

由于 $h(n,n)=\dfrac{1}{2}$，$h(n,k)-h(n,k+1)=\dfrac{h(n,k)-h(n-1,k+1)}{2}=\dfrac{\binom{n-1+k}{n-1}}{2^{n+k}}$.

$$T-n\cdot h(n,n)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\big(h(n,k)-h(n,k+1)\big)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\cdot\binom{n+k-1}{n-1}}{2^{n+k}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n\cdot\binom{n+k-1}{n}}{2^{n+k}}.$$

注意到 $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{n}2^{n-1-k}=\binom{2n-1}{n+1}+\binom{2n-1}{n+2}+\cdots+\binom{2n-1}{2n-1}=2^{2n-2}-\binom{2n-1}{n}$.

上式的组合意义是：考虑顺次排列的 $2n-1$**个位置放红球或白球，且有至少** $n+1$**个红球的所有情况。则其中第** $n+1$**个红球出现在第** $n+k$ **个位置的情况恰有** $\binom{n+k-1}{n}\cdot 2^{n-1-k}$ **种，即前** $n+k-1$**个位置中恰有** n **个红球，第** $n+k$ **个位置是红球，后面** $n-1-k$ **个位置红球白球均可。因此**

$$T-\frac{n}{2}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n\binom{n+k-1}{n}}{2^{n+k}}=n\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{n}\cdot 2^{n-1-k}}{2^{2n-1}}=n\cdot\frac{2^{2n-2}-\binom{2n-1}{n}}{2^{2n-1}}=\frac{n}{2}-n\cdot\frac{\binom{2n-1}{n}}{2^{2n-1}}$$

即 n **个红色数之和最大可能值为** $T=n-n\cdot\dfrac{\binom{2n-1}{n}}{2^{2n-1}}=n-n\cdot\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ **.记作** $f(n)$**，**

$$f(n)=n-n\cdot\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\approx n-\frac{n}{\sqrt{\pi n}}.$$

我们证明 $f(105)<100$，$f(106)>100$.

为此我们只需证 $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times209}{2\times4\times6\times\cdots\times208}>10$ **和** $\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times211}{2\times4\times6\times\cdots\times210}<12$.

首先 $\left(\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times209}{2\times4\times6\times\cdots\times208}\right)^2>\dfrac{(2\times4)\times(4\times6)\times\cdots\times(208\times210)}{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times208^2}=105>10^2$.

其次$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times211}{2\times4\times6\times\cdots\times210}=\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}\times\frac{9\times11\times\cdots\times211}{10\times12\times\cdots\times210}$，

$$\left(\frac{9\times11\times13\times\cdots\times211}{10\times12\times14\times\cdots\times210}\right)^2<\frac{9^2\times11^2\times13^2\times\cdots\times211^2}{(9\times11)\times(11\times13)\times\cdots\times(209\times211)}=9\times211.$$

$$\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times209}{2\times4\times6\times\cdots\times208}\right)^2>\frac{(2\times4)\times(4\times6)\times\cdots\times(208\times210)}{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times208^2}=105>10^2.$$

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times211}{2\times4\times6\times\cdots\times210}<\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}\times\sqrt{9\times211}=\frac{35}{128}\times\sqrt{9\times211}<12.$$

下面说明我们选取的操作方式是最优的。将红纸编号为$R_1,R_2,\cdots,R_n$，蓝纸编号为$B_1,B_2,\cdots,B_n$，我们将操作条件放宽如下：若某张红纸上写着数x，某张蓝纸上写着数y，且$x\le y$，则可以选择正数r，将红纸上的数改为$x+r$，蓝纸上的数改为$y-r$.显然红纸上的数不减，蓝纸上的数不增。

如果某张红纸R_i和某张蓝纸B_j进行了$k>1$次操作，那么可以将对R_i的前$k-1$次操作都移动到对B_j的最后一次操作之前（这样在前面的操作中，R_i上的数不变或更小，B_j上的数不变或更大，不影响操作的合法性），然后再把对R_i与B_j的所有操作“合并”为一个操作。因此，我们可以假设每一对纸最多操作一次，即操作总次数不超过n^2.注意每次操作选择的x可以认为是在$\left[0,\frac{y-x}{2}\right]$上选取（$r=0$即等价于未操作），同样我们也可以定义对$x=y$进行操作（此时$r$的只能为$0$）.

对某个状态T，设R_i上写的数是x_i，B_j上写的数是y_j（$i,j=1,2,\cdots,n$），显然x_i，y_j永远在闭区间$[0,1]$内。考虑从T开始的一系列操作的总和（称为操作组C）.记它的得分为$f(C)$为最终α的值，显然得分不会超过n，下面我们证明最大得分能够取到，易知只需证明，当每次操作选择的两张纸是固定的情形下，最大得分能够取到。这里给出两个证法。

下面我们证明最大得分能够取到。易知只需证明，当每次操作选择的两张纸是固定的情形下，最大得分能够取到。这里给出两个证法。

证法一：事实上，这要求每次操作都是合法的，即每次操作选择的r应满足一个不等式（该不等式中包含初值$x_1,\cdots,x_n$，$y_1,\cdots,y_n$，也可能包含之前的操作所使用的其它r），故所有r需满足一些可以取等的不等式，显然所有r的和存在最大值。因此最大得分能够取到。

证法二（数学分析中的严格证法）：若不然，设最大得分S只能被无限逼近，即存在操作组$C_1,C_2,\cdots$满足$f(C_i)<S$，而$\lim\limits_{i\to\infty}f(C_i)=S$.考虑这些操作的每一次操作，逐次作组，其每一步选择的r都是收敛的，现在将每个改为其极限，易知所有操作仍是合法的（因所有操作的要求都是小于等于），且最终的得分必为S，矛盾。

对任何一个状态T，定义$g(T)=h(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$为$T$从开始的操作组能得到的最大得分。

引理：若$x_i'<x_i<x_j<x_j'$且$x_i'+x_j'=x_i+x_j$，

则$h(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\le h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i',x_{i+1},\cdots,x_{j-1},\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$.

引理证明：考虑初始状态为T：$x_1,\cdots,x_n$，$y_1,\cdots,y_n$时的一系列操作，若某次操作使用了x_i或x_j所在的红色纸，则在初始状态为T'：$x_1,\cdots,x_i',\cdots,x_j',\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$，$y_1,\cdots,y_n$的对应操作，选择$x_i'$所在的红色纸并选择相同的$r$，这样每次操作之后除$x_i$，$x_j$之外的其它数不变，且只要$x_i'$还小于$\min(x_i,x_j)$，这个操作就是合法的。假设某一次操作后$x_i'>\min(x_i,x_j)$.则必有$x_j'<\max(x_i,x_j)$，因此上一次操作必然是对$x_i$和$x_j$之一操作，将这个操作拆成两部分（即选择$r_1+r_2=r$）使得两个数改变$r_1$之后刚好有$\max(x_i,x_j)=x_j'$，这样对初始状态为$T'$的对应操作，$x_i'$与一张蓝纸上的数改变$r_i$之后就与初始状态为$T$的对应状态相同。这样就证明了引理。

同理可知，若$y_i'<y_i\le y_j<y_j'$，且$y_i'+y_j'=y_i+y_j$，则将y_i，y_j换为y_i'，y_j'后，h不减。

下面我们来对操作进行调整，并使得调整后的h值不减。若某次选择写有x的红纸和写有y的蓝纸进行操作，且还有另一张纸上的数在开区间(x,y)中，不妨设这张纸是红纸，其上的

数为 x' .若此次操作的 $r \le \frac{y-x'}{2}$ ，则将操作改为对 x', y 进行操作；若此次操作的 $r > \frac{y-x'}{2}$ ，则将操作改为先对 x', y 进行操作， x' 增加 $\frac{y-x'}{2}$ ， y 减少 $\frac{y-x'}{2}$ ，然后再对 $x, y-\frac{y-x'}{2}$ 操作（各自改变 $r-\frac{y-x'}{2}$ ）.不论哪种情况，新操作与原操作之后的结果均符合引理的条件，故新操作后的 h 值不小于原操作的 h 值。因此这个调整是可行的。因此，我们可以假设每一次操作中，所操作的两张纸上的数之间没有其它纸上的数。

现在，规定若有若干张红纸上的数相同，总是优先选择角标更大的红纸进行操作，若有若干蓝纸上的数相同，则总是优先选择角标更涉的蓝纸进行操作（这不影响结论本身）。这样易知恒有 $x_1 \le \cdots \le x_n, y_1 \le \cdots \le y_n$.

对 $1 \le i \le n, 1 \le j \le n, R_i, B_j$ 可以进行操作的充要条件是 $y_{j-1} \le x_i < y_j \le x_{i+1}$ （这里定义 y_0, x_{n+1} 恒满足不等式，例如 $y_0 = 0, x_{n+1} = 1$ ），此时 R_i 不能与 B_j 之外的蓝纸操作， B_j 也不能与 R_i 之外的蓝纸操作，直到 $x_i = y_j$ 为止。因此，我们可以假设每次操作都是把 x_i, y_j 都变为 $\frac{x_i+y_j}{2}$ （即与原题中的操作相同）。注意这个操作会将 $x_i < y_j$ 变为 $x_i \ge y_j$ ，且不改变其余 x, y 的大小关系。因此，在 R_i, B_j 进行操作之前，对任意 $i' \ge i$ 及 $j' \le j$ 且两个不等号不都取等， $R_{i'}, B_{j'}$ 必然已进行过操作，而对 $i' > i$ ， $j' > j$ （ $i' < i$ 或 $j' < j$ ），$R_{i'}, B_{j'}$ 的操作与 R_i, B_j 的操作顺序无关。故我们可以认为是依 $j-i$ 从小到大的顺序来对 R_i, B_j 操作，即操作顺序如前。

4.现有七十张牌，共有三十种不同颜色，将其中五十张作为上层牌堆，其余二十张作为下层牌堆。进行如下操作：

①每次从下层二十张中挑出一张颜色下在上层五十张中出现的牌；

②将这张牌取出，并放在上层五十张中某张颜色重复出现的牌上方。

（1）证明该操作一定会停止；（2）求操作的最大可能次数。

【答案】证明见解析。

【解析】在该叠纸牌中，从上到下依次记为第1张，第2张，，第70张。称最上方的50张纸牌（即编号从1到50的纸牌）为顶部纸牌，最下方20张纸牌（即编号从51到70的纸牌）为底部纸牌，若某种颜色的纸牌仅在底部中出现，称这种颜色的特殊的，特殊的颜色操作进行会即时变动。

设初始时，共有s种特殊的颜色，$0\le s\le 20$，在顶部的纸牌中，每种颜色的纸牌除了最上边的一张，其余均贴上标签。由于顶部纸牌的颜色数不超过$30-s$，故不贴标签的纸牌至多$30-s$张，贴了标签的纸牌至少有$20+s$张。设共有l张纸牌贴了标签，$l\ge 20+s$，它们在这叠纸牌中为第$i_1>i_2>\cdots>i_l$张。

断言：可以操作的次数不超过$\sum_{j=1}^{s}(50-i_j)$，且等号可以取到。

当贴了标签的纸牌进入底部后，便将其标签去除。注意到每次操作新加入到顶部的纸牌其颜色在顶部中仅出现一次，故不会新增标签。每当减少一个贴标签的纸牌，在顶部中的颜色就增加一种，从而所有颜色的纸牌都在顶部出现当且仅当贴标签的纸牌减少了s张。

注意到每次操作，在顶部贴标签的纸牌中最下方的若干张纸牌（至少一张）在该叠纸牌中的位置向下移动一位。故初始时在顶部的纸牌中最下方的s张贴标签的纸牌会逐个进入底部去除标签。此时操作即停止。初始时，最下方的贴标签的纸牌位于第i_1张，在$51-i_1$次操作后去除其标签。此时最下方的贴标签的纸牌位于至少i_2号格(顶部贴标签的纸牌不会向上移动)，故接着进行不超过$51-i_2$次操作后去除其标记，依次类推可知，不超过$\sum_{j=1}^{n}(51-i_j)$次操作，初始时最下方的s张贴标签的纸牌必定都去除了标签。如果每次操作均选择Y为最下方的贴

标签的纸牌进行操作，则上述推导中的等式成立。

下面只需求$\sum_{j=1}^{s}(51-i_j)$的最大可能值。

在顶部，初始时至多有$30-s$张纸牌不贴标签（因为特殊颜色有s种），并且此叠第一张纸牌一定不贴标签，从而i_j张纸牌下方至多$29-s$张未贴标签的纸牌，以及$j-1$张贴了标签的纸牌，故对$1\le j\le l$，有$i_j\ge 50-(29-s)-(j-1)=22+s-j$.

于是$\sum_{j=1}^{s}(51-i_j)\le\sum_{j=1}^{s}(29-s+j)=\frac{1}{2}s(59-s)\le 390$.

若此叠纸牌中最上方的41张纸牌为同一种颜色，第42至第70张纸牌为其余29种颜色纸牌各一张，此时$s=20$，$i_j=42-j$，$1\le j\le 40$，上述推导中的等号成立。

综上所述，操作一定在有限次后结束，且操作次数可达到的最大值为390.

5.求λ的取值范围，使对充分大的正整数n，存在实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \tag{1}$$

与$$\left(\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\right)^2\le\lambda\left(\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_jx_k\right)-\frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2. \tag{2}$$

【答案】$\lambda>\frac{3}{2}$，证明见解析。

【解析】令$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$，得$\lambda\cdot\frac{C_n^3}{n^3}\ge\left(\frac{C_n^2}{n^2}\right)^2$，进而，$\lambda\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}$.故必有$\lambda>\frac{3}{2}$.

下面我们证明$\lambda>\frac{3}{2}$满足题意，我们仅需证明

$$\left(\sum_{1\le i<j\le n}x_iy_j\right)^2\le\frac{3n-3}{2n-4}\left(\sum_{1\le i\le n}x_i\right)\left(\sum_{1\le i<j<k\le n}x_ix_jx_k\right)+\frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2.$$

令 $d_i = x_i - \frac{1}{n}$，则 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$，再令 $A = \sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$，则 $\sum_{1\le i<j\le n} \left(x_i - x_j\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \left(d_i - d_j\right)^2 = nA$.

注意 $\sum_{1\le i<j\le n} x_i y_j = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} + d_i\right)^2\right) = \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}A$，

而 $\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k = \sum_{1\le i<j<k\le n}\left(\frac{1}{n} + d_i\right)\left(\frac{1}{n} + d_j\right)\left(\frac{1}{n} + d_k\right)$

$$= \frac{C_n^3}{n^3} + \frac{C_{n-1}^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i + \frac{n-2}{n}\sum_{1\le i<j\le n} d_i d_j + \sum_{1\le i<j<k\le n} d_i d_j d_k \quad (1.1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} - \frac{n-2}{2n}A + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,3}, \quad (1.2)$$

故 $\frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k = \frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{3(n-1)}{4n}A + \frac{n-1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,3}$.

我们只需证明 $\frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{3(n-1)}{4n}A + \frac{n-1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,3} + A \ge \left(\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}A\right)^2$，

即证明 $A \ge \frac{n-1}{4n}A + \frac{n-1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,3} + \left(\frac{1}{2}A\right)^2$．（*）．

注意 $A\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n} \le \frac{n-1}{n}$，

而 $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot d_i^{\,2} \ge \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{n}\right)d_i^{\,2} = -\frac{1}{n}A$，

故（*）的右边 $\le \frac{n-1}{4n}A + \frac{n-1}{2n(n-2)}A + \frac{n-1}{4n}A = \frac{(n-1)^2}{2n(n-2)}A$，因此（*）成立。

综上所述，λ 的取值范围是 $\lambda > \frac{3}{2}$.

6.设n为正奇数，并满足：对任意素数$p\mid n$，都有$(p-1,n)=1$.求所有$(a,b,c)\in\mathbf{Z}_n^{\,3}$，满足$(a,b,c,n)=1$，且存在$1,2,\cdots,n$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对任意$1\le i\le n$，都有$n\mid(ax_{i+2}+bx_{i+1}+cx_i)$，其中下标按模$n$计数。

【答案】**证明见解析。**

【解析】**对n的一个素因子p，若p整除a,b,c中的两个，则每个x_i均为p的倍数，矛盾；若p整除a但不整除b,c，则$p\mid x_{k+1}\Leftrightarrow p\mid x_k$，故$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$或者都是$p$的倍数，或者都不是$p$的倍数，但这与$0,1,\cdots,n-1$中同时有$p$的倍数和非$p$的倍数相矛盾。故$p$不整除$a$.因此，以下我们假设$a,n$互素。**

取a'使得$aa'\equiv1(\mathrm{mod}\,n)$，我们可以将$a,b,c$都乘$a'$以后再模$n$，这不影响条件，故可不妨设$a=1$（最后结果需要乘以$\varphi(n)$）.

由对称性不妨设$x_0=0$.注意如果x_1能被n的某个素因子整除，那么每个x_i均能被此素因子整除，矛盾。故x_1与n互素，同理，将所有x_i同时乘以x_1模n的数论倒数，再模n，可不妨设$x_1=1$.

取$u\in\mathbf{Z}^+$使$2u\equiv-b(\mathrm{mod}\,n)$，取$v\in\mathbf{Z}^+$使$u^2-v\equiv c(\mathrm{mod}\,n)$（由于可以模$n$选取，不妨设$v$不是平方数），则$x_{k+2}=2ux_{k+1}-(u^2-v)x_k(\mathrm{mod}\,n)$对任意$k$成立，由数学归纳法易知

$$x_k\equiv\frac{(u+\sqrt{v})^k-(u-\sqrt{v})^k}{2\sqrt{v}}(\mathrm{mod}\,n).$$

若对n的某个素因子p不整除v，

则$(u+\sqrt{v})^{p^2}-(u+\sqrt{v})=p(A+B\sqrt{v})+(u^{p^2}-u)+(v^{\frac{p^2-1}{2}}-1)\sqrt{v}=p(C+D\sqrt{v})$，

这里A,B,C,D是正整数。由共轭性质可知$(u-\sqrt{v})^{p^2}-(u-\sqrt{v})=p(C-D\sqrt{v})$，

由此易知$x_{k+p^2-1}\equiv x_k(\mathrm{mod}\,p)$对任意正整数$k$成立。故在$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$中，每个模$p$的剩余类的元素个数均为$\dfrac{n}{(n,p^2-1)}$的倍数，但这与$x_1,\cdots,x_n$中每个模$p$的剩余类的元素个数

均为$\frac{n}{p}$相矛盾。故v必须能被n的每个素因子整除。

由（*）可知$x_k \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} C_k^{k-2i-1} v^i \pmod{n}$，故对$n$的每个素因子$p$，有$x_k \equiv ku^{k-1} \pmod{p}$

（因为$p \mid v$）.取$k = n+1$可知$u^n \equiv 1 \pmod{p}$，再由$(p-1, n) = 1$知$u \equiv 1 \pmod{p}$，即$u-1$必须能被n的每个素因子整除。

现在我们假设v和$u-1$均被n的每个素因子整除，先指出一个将要重复使用的结论：若p是一个素数，对任意整数k和l，若$p^\alpha \| k-l$，则由升幂定理知$u^{k-l} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$.

先考虑n的一个不小于5的素因子p，对任意正整数i，

我们有$v_p\left((2i+1)!\right) \le \left\lfloor \frac{2i+1}{p-1} \right\rfloor \le i-1$.

于是对任意下标k, l满足$p^\alpha \| k-l$，均有

$$v_p\left((C_k^{2i+1} - C_l^{2i+1}) u^{k-2i-1} v^i\right) \ge i + v_p(C_k^{2i+1} - C_l^{2i+1})$$

$$\ge 1 + v_p\left(k(k-1)\cdots(k-2i) - l(l-1)\cdots(l-2i)\right) \ge 1+\alpha. \quad (**)$$

而$v_p\left((C_k^1 - C_l^1) u^{k-1} v^0\right) = \alpha$，这说明了$p^\alpha \| x_k - x_l$，设$p^\beta \| n$，则$x_0, x_1, \cdots, x_{p^\beta - 1}$构成模$p^\beta$的完系，且$\{x_i \bmod p^\beta\}$以$p^\beta$为周期。因此若3不整除$n$，则由中国剩余定理知$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$构成模$n$的完系，且以$n$为周期，因此这样的$b, c$符合题意，故“$v$和$u-1$均被$n$的每个素因子整除”就是充要条件。

下面考虑$3 \mid n$的情形。如果$3^1 \| n$，那么由$x_k \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} C_k^{2i+1} u^{k-2i-1} v^i \pmod{n}$仍可知$x_k \equiv ku^{k-1} \pmod{3}$，故$x_0, x_1, x_2$构成模3的完系，且$\{x_i \bmod 3\}$以3为周期，即此时“$v$和$u-1$均被$n$的每个素因子整除”仍是充要条件。

以下假设$3^\beta \| n$，$\beta \ge 2$.（在x_k的展开式中我们需要考虑前两项的贡献。）

若$9 \mid v$，则对正整数i，我们有$v_3\left((2i+1)!\right) \le \left\lfloor \frac{2i+1}{3-1} \right\rfloor = i \le 2i-1$，用类似$p \ge 5$的证明（注意到（**）仍然成立）可知这样的$b, c$符合题意。

若 $v\equiv 6(\mathrm{mod}\,9)$，则 $x_k\equiv ku^{k-1}+k(k-1)(k-2)u^{k-3}(\mathrm{mod}\,9)$.

故 $x_{9i+1}\equiv x_{9i+4}\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$.这说明 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 中至少有 $\frac{2}{9}n$ 个数模 9 余 1.不符合题意。

若 $v\equiv 3(\mathrm{mod}\,9)$.则当 3 不整除 $k-l$ 时，同 $3\|n$ 的证明可知 3 不整除 x_k-x_l，

下面假设 $3^{\alpha}\|k-l$，$\alpha\geq 1$.对正整数 i，有 $v_3\left((2i+1)!\right)\leq\left\lfloor\frac{2i+1}{3-1}\right\rfloor=i$，

则 $v_3\left((C_k^{2i+1}-C_l^{2i+1})u^{k-2i-1}v^i\right)\geq i+v_3(C_k^{2i+1}-C_l^{2i+1})$

$\geq v_3\left(k(k-1)\cdots(k-2i)-l(l-1)\cdots(l-2i)\right)\geq\alpha$.

当 $i=2,3$ 时，$v_3\left((2i+1)!\right)<i$，故上述不等式严格成立；当 $i\geq 4$ 时，若 $\alpha=0$.

则 $v_3\left(k(k-1)\cdots(k-2i)-l(l-1)\cdots(l-2i)\right)\geq 1>\alpha$.若 $\alpha\geq 1$，设 $k-l=d$，

则

$k(k-1)\cdots(k-2i)-l(l-1)\cdots(l-2i)=(l+d)(l+d-1)\cdots(l+d-2i)-l(l-1)\cdots(l-2i)$

$=d^2\cdot M+d\cdot l(l-1)\cdots(l-2i)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l-1}+\cdots+\frac{1}{l-2i}\right)$ 能被 $3^{\alpha+1}$ 整除，这里 M 是某个整数

（因为 $l,l-1,\cdots,l-2i$ 至少有两个 3 的倍数。）

由上述讨论知，x_k-x_l 的表达式中只有 $i=0,1$ 两项可能不是 $3^{\alpha+1}$ 的倍数。

设 $k-l=r\cdot 3^{\alpha}$，

则 $x_k-x_l=(C_k^1u^{k-1}+C_k^3u^{k-3}v)-(C_l^1u^{l-1}+C_l^3u^{l-3}v)$

$\equiv u^{l-1}r\cdot 3^{\alpha}+u^{l-3}(C_k^3-C_l^3)v$ （由升幂定理，$u^{k-l}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3^{\alpha+1})$）

$\equiv r\cdot 3^{\alpha}+u^{l-3}(C_k^3-C_l^3)v$ $(\mathrm{mod}\,3^{\alpha+1})$（由升幂定理，）

而 $(C_k^3-C_l^3)v=\frac{1}{2}vr\cdot 3^{\alpha-1}(k^2+kl+l^2-3k-3l+2)$，注意 $v\cdot 3^{\alpha-1}$ 是 3^{α} 的倍数，

而 k^2+kl+l^2 是 3 的倍数，故 $(C_k^3-C_l^3)v\equiv vr\cdot 3^{\alpha-1}(\mathrm{mod}\,3^{\alpha+1})$，故 $3^{\alpha}\|x_k-x_l$，同理可知

这样的 b,c 符合题意。

故当$9\mid n$时，充要条件为“v和$u-1$均被n的每个素因子整除且$v\neq 6(\mathrm{mod}\,9)$.”

综上所述，当9不整除n时，a有$\varphi(n)$种选取方式，u,v均有$\dfrac{n}{\prod_{p\mid n}p}$种选取方式，所求为$\left(\dfrac{n}{\prod_{p\mid n}p}\right)^2\cdot\varphi(n)$；当$9\mid n$时，$a$有$\varphi(n)$种选取方式。$u$有$\dfrac{n}{\prod_{p\mid n}p}$种选取方式。$v$有$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n}{\prod_{p\mid n}p}$种选取方式，所求为$\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{n}{\prod_{p\mid n}p}\right)^2\cdot\varphi(n)$.