2024CMO 试题

第一天

考试时间：270 分钟　　满分：63 分

一、（本题满分 21 分）

设无理数 $\alpha>1$，正整数 $L>\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$．正整数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>L$，$x_{n+1}=\begin{cases}\lfloor \alpha x_n\rfloor, x_n\le L\\ \left\lfloor \dfrac{x_n}{\alpha}\right\rfloor, x_n>L\end{cases}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中 $\lfloor t\rfloor$ 表示不大于实数 t 的最大整数．证明：

（1）$\{x_n\}$ 是最终周期数列；

（2）$\{x_n\}$ 最终的最小正周期是一个与 x_1 无关的奇数．

二、（本题满分 21 分）

在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，L,M,N 分别为 AI,AC,CI 的中点．点 D 在线段 AM 上，满足 $BC=BD$，$\triangle ABD$ 的内切圆分别切 AD,BD 于点 E,F．J 为 $\triangle AIC$ 的外心，ω 为 $\triangle JMD$ 的外接圆，直线 MN 另交圆 ω 于点 P，JL 另交圆 ω 于点 Q．证明：PQ,LN,EF 三线共点.温州百优教育

三、（本题满分 21 分）

设整数 $a_1>a_2>\cdots>a_n>1$，$M=\operatorname{lcm}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$．对非空的有限正整数集 X，记 $f(X)=\min\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}$，其中 $\{t\}$ 表示实数 t 与不大于 t 的最大整数之差．称 X 是“极小的”，如果对任意 X 的真子集 Y，均有 $f(Y)<f(X)$．设 X 极小，且 $f(X)\ge\dfrac{2}{a_n}$，证明：$|X|\le M\cdot f(X)$．

2024CMO 试题

第二天

考试时间：270 分钟　　满分：63 分

一、（本题满分 21 分）

对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，我们定义该两点之间的小数距离为 $\sqrt{\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2}$，其中 $\|t\|$ 表示实数 t 离最近整数的距离．求最大的实数 r，使得存在平面上的四个点，满足两两之间的小数距离均不小于 r．

二、（本题满分 21 分）

对于素数 p，设 f 为 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 到自身的一个双射，满足对于 $p\mid a^2-b$，有 $|f(a)-f(b)|\le 2024$．

证明：有无穷多个 p 使得 f 存在，也有无穷多个 p 使得 f 不存在．温州百优教育

三、（本题满分 21 分）

设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=2n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^3=3n$．对所有整数 $n\ge 4$，

（1）求最大的常数 C_1，使得 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\ge C_1$；

（2）证明：存在常数 $C_2>0$，使得 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\ge C_1+C_2n^{-\frac{3}{2}}$，其中 C_1 为第（1）问所求值．

一、（本题满分21分）

设无理数$\alpha>1$，正整数$L>\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$．正整数列$\{x_n\}$满足：$x_1>L$，$x_{n+1}=\begin{cases}\lfloor \alpha x_n\rfloor, x_n\le L\\ \left\lfloor \dfrac{x_n}{\alpha}\right\rfloor, x_n>L\end{cases}\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，其中$\lfloor t\rfloor$表示不大于实数$t$的最大整数．证明：

（1）$\{x_n\}$是最终周期数列；

（2）$\{x_n\}$最终的最小正周期是一个与x_1无关的奇数．

证明：

（1）假设存在正整数n使得$x_n\le\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor-1$，取最小的这样的正整数$n_0$，

由于$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor-1\le\lfloor L+1\rfloor-1=L$，知$n_0\neq 1$，即$n_0>1$，

由于$\lfloor\alpha x_{n_0-1}\rfloor\ge\lfloor x_{n_0-1}\rfloor=x_{n_0-1}$，知$x_{n_0}=\left\lfloor\dfrac{x_{n_0-1}}{\alpha}\right\rfloor$，否则与$n_0$最小性矛盾，

则$x_{n_0-1}\ge L+1$，有$x_{n_0}\ge\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$，亦矛盾！故对任意正整数$n$，均有$x_n\ge\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$．

对于$x_n\ge L+1$，$x_{n+1}=\left\lfloor\dfrac{x_n}{\alpha}\right\rfloor\le\dfrac{x_n}{\alpha}<x_n$，则必然存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$x_m\le\lfloor\alpha L\rfloor$，

对于$n\ge m$，归纳易证$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\le x_n\le\lfloor\alpha L\rfloor$，有抽屉原理知$\{x_n\}$为最终周期数列；

（2）由于$\alpha\in Q$，对任意正整数k，有$\alpha k,\dfrac{k}{\alpha}\in\mathbf{Z}$，则$\lfloor\alpha k\rfloor<\alpha k$，$\left\lfloor\dfrac{k}{\alpha}\right\rfloor<\dfrac{k}{\alpha}$．

以下仅考虑$n\ge m$，设最小正周期为T，一个周期内数列依次为$y_1,y_2,\cdots,y_T$．

假设周期内没有$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$，由于$L>\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}>\dfrac{1}{\alpha-1}$，知$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor<\dfrac{L+1}{\alpha}<L$，即$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor+1\le L$，

由（1）可知存在n使得$x_n\le L$，即$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor+1\le x_n\le L$，

此时$x_{n+1}=\lfloor\alpha x_n\rfloor\ge\left\lfloor\alpha\left(\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\right\rfloor\ge\left\lfloor\alpha\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor=L+1$，知$x_{n+2}=\left\lfloor\dfrac{\lfloor\alpha x_n\rfloor}{\alpha}\right\rfloor$，

有$\left\lfloor\dfrac{\lfloor\alpha x_n\rfloor}{\alpha}\right\rfloor<\dfrac{\lfloor\alpha x_n\rfloor}{\alpha}<\dfrac{\alpha x_n}{\alpha}=x_n$，$\left\lfloor\dfrac{\lfloor\alpha x_n\rfloor}{\alpha}\right\rfloor\ge\left\lfloor\dfrac{\alpha x_n-1}{\alpha}\right\rfloor\ge\left\lfloor\dfrac{\alpha x_n-\alpha}{\alpha}\right\rfloor=\lfloor x_n-1\rfloor=x_n-1$，知$x_{n+2}=x_n-1$，

以此类推，$x_{n+4}=x_n-2$，…，这与$x_n\neq\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$矛盾！故每个周期中必有$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$．

假设周期内仅有$\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$不大于$L$，有下一项$\left\lfloor\alpha\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor<\alpha\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor<\alpha\left(\dfrac{L+1}{\alpha}\right)=L+1$，

则$\left\lfloor \alpha\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor=\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$，知$\alpha\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor<\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor+1$，即$\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor<\frac{1}{\alpha-1}$，

有$\frac{L+1}{\alpha}-1<\frac{1}{\alpha-1}$，即$L<\frac{\alpha^2}{\alpha-1}-1$，矛盾！

可不妨设$y_1=\max\limits_{n\geq m}\{x_n|x_n\leq L\}>\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor$，由上可知$y_2,y_4,\cdots,y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)}>L$，

且$\left(y_1,y_3,\cdots,y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+1}\right)=\left(y_1,y_1-1,y_1-2,\cdots,\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)$，这是周期内所有不大于$L$的项，

若$T\geq 2\left(y_1-\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+2$，则$y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+2}\neq y_1,y_3,\cdots,y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+1}$，

而$y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+2}=\left\lfloor \alpha\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor<L+1$，知$y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+2}\leq L$，矛盾！

则必有$T=2\left(y_1-\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+1$，且$y_{2\left(y_1-\left\lfloor\frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+1}$下一项是$y_1$，有$y_1=\left\lfloor \alpha\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor$，

知最小正周期$T=2\left(\left\lfloor \alpha\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right\rfloor-\left\lfloor \frac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\right)+1$，是一个与$x_1$无关的奇数.

【注】本题的思路并不难想，根据递推关系不难发现数列会收缩到比较小的区间内，结合抽屉原理即可证明最终周期性，周期的判断略有难度，但不难想到要证明周期数列会经过某一确定的值，尝试后发现即是区间下界，也能发现“一小一大”.但本题细节繁多，非常容易出现逻辑漏洞，过程比较难写，容易导致丢分.温州百优教育公众号

二、（本题满分21分）

在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，L,M,N 分别为 AI,AC,CI 的中点．点 D 在线段 AM 上，满足 $BC=BD$，$\triangle ABD$ 的内切圆分别切 AD,BD 于点 E,F．J 为 $\triangle AIC$ 的外心，ω 为 $\triangle JMD$ 的外接圆，直线 MN 另交圆 ω 于点 P，JL 另交圆 ω 于点 Q．证明：PQ,LN,EF 三线共点．

证明：

如图，连结 DI,DQ，取 DI 中点 X，显然 X 在 LN 上．

注意到 $JL\perp AI$，$JM\perp AC$，有 $\angle QDM=\angle QJM=\angle IAM$，知 $DQ\parallel AI$，则 X 在线段 LQ 的中垂线上，

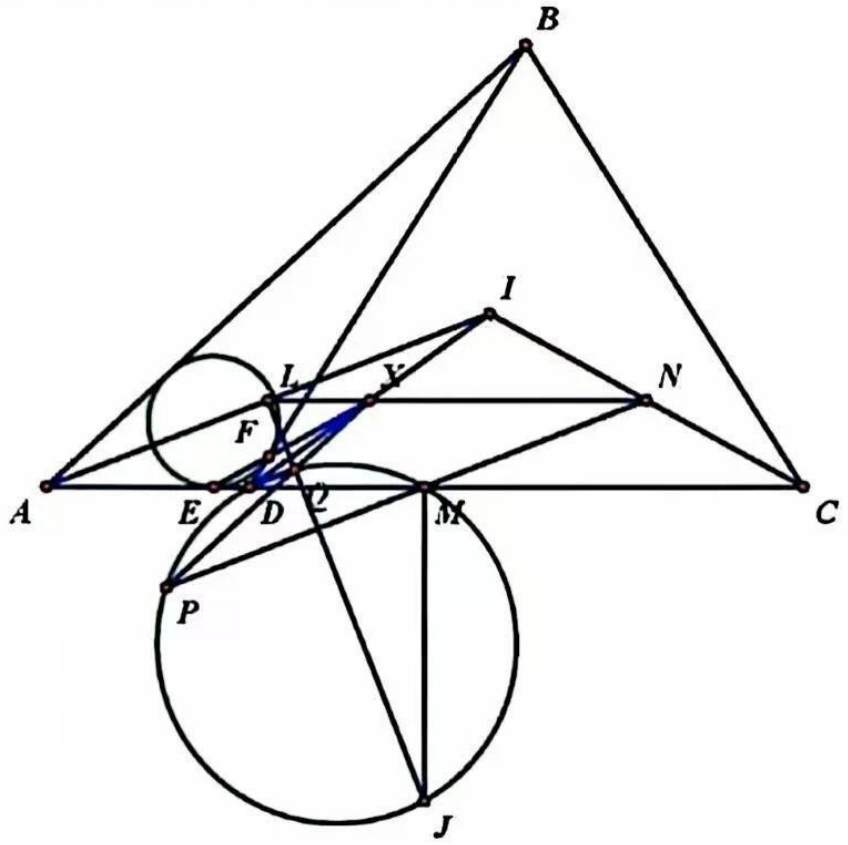
又 $\angle XQL=\angle XLQ=\dfrac{\pi-\angle A}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\angle NMC=\angle PMJ=\angle PQJ$，知 P,Q,X 共线．

记 $\triangle ABC$ 三边长分别为 a,b,c，有 NC 在 AC 上的射影长度 $d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}$，

知 $EC=ED+DC=\dfrac{(b-DC)+a-c}{2}+DC=\dfrac{1}{2}DC+\dfrac{a+b-c}{2}=XN+2d$，故四边形 $XECN$ 为等腰梯形，

有 $\angle FEC=\dfrac{1}{2}\angle BCD=\dfrac{\angle C}{2}=\angle NCE=\angle XEC$，知 E,F,X 共线．

综上所述，PQ,LN,EF 共点于 DI 中点 X，证毕！



【注】本题难点在于画出漂亮的图，而在作图过程中不难发现诸多平行、垂直的关系，也容易发现 PQ,LN,EF,DI 四点共点，进而想到证明三线过 DI 中点．而题目中线的关系非常好，不难完成证明．

三、（本题满分21分）

设整数 $a_1>a_2>\cdots>a_n>1$，$M=\operatorname{lcm}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 对非空的有限正整数集 X，记 $f(X)=\min\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}$，其中 $\{t\}$ 表示实数 t 与不大于 t 的最大整数之差. 称 X 是“极小的”，如果对任意 X 的真子集 Y，均有 $f(Y)<f(X)$. 设 X 极小，且 $f(X)\ge\dfrac{2}{a_n}$，证明：$|X|\le M\cdot f(X)$.

证明：

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，且不妨 $f(X)=\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$，

由于 X 极小，知对任意 $1\le j\le m$，有 $f\left(X/\{x_j\}\right)<f(X)$，即 $\min\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{x\in X/\{x_j\}}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}<\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$，

知存在 $1\le i_j\le n$，使得 $\sum\limits_{x\in X/\{x_j\}}\left\{\dfrac{x}{a_{i_j}}\right\}<\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$，即 $\left\{\dfrac{x_j}{a_{i_j}}\right\}>\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_{i_j}}\right\}-\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}\ge 0$，

故 $M\nmid x(x\in X)$，否则对 $k=1,2,\cdots,n$，有 $a_k\mid x$，则 $\left\{\dfrac{x}{a_k}\right\}=0$，矛盾！

假设 $\{i_j\mid j=0,1,\cdots,m\}$ 未取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$，不妨假设没有取到 y，在删去 a_y 后，$f(X)=\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$ 不变，

且对任意 $1\le j\le m$，仍有 $\left\{\dfrac{x_j}{a_{i_j}}\right\}>\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_{i_j}}\right\}-\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$，即 X 仍为极小的，而此时 M 不增，

可不妨假设 $\{i_j\mid j=0,1,\cdots,m\}$ 取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$，

即对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{i_0\}$，均存在互不相同的 $j_i\in\{1,2,\cdots,m\}$，

使得 $\left\{\dfrac{x_{j_i}}{a_i}\right\}>\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}-\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_1}\right\}$，知 $\left\{\dfrac{x_{j_i}}{a_i}\right\}-\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}\ge\dfrac{1}{M}-f(X)\left(i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{i_0\}\right)$.

考虑 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\left\{\dfrac{x_j}{a_i}\right\}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{x\in X}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}$：

一方面，$T=\sum\limits_{j\in\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}/\{j_0\}}\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\dfrac{x_j}{a_i}\right\}+\sum\limits_{k\in\{1,2,\cdots,n\}/\{i_0\}}\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\dfrac{x_k}{a_i}\right\}$，

对于 $x\in X$，设恰有 p 个 i 使得 $a_i\mid x$，注意到 $M\nmid x$，知 $p\le n-1$，

若 $p=0$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\dfrac{x}{a_i}\right\}\ge\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\ge\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{M}=\dfrac{n(n+1)}{2M}\ge\dfrac{2(n-1)}{M}$；

若$1\le p\le n-1$，设x与M有$a_{s_1}<a_{s_2}<\cdots<a_{s_p}$这$p$个公因数，温州百优教育

当$p=1$时，$(x,M)\ge a_{s_1}\ge 2$；当$p>1$时，$(x,M)\ge 2a_{s_{p-1}}\ge 2p$，则总有$(x,M)\ge 2p$，

知$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}=\sum_{i\in\{s_1,s_2,\cdots,s_p\}}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}=\sum_{i\in\{s_1,s_2,\cdots,s_p\}}\frac{x\cdot\frac{M}{a_i}-M\cdot\left[\frac{x}{a_i}\right]}{M}\ge\sum_{i\in\{s_1,s_2,\cdots,s_p\}}\frac{(x,M)}{M}\ge\sum_{i\in\{s_1,s_2,\cdots,s_p\}}\frac{2p}{M}$

$=\frac{2p(n-p)}{M}\ge\frac{2(n-1)}{M}$，

故总有$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}\ge\frac{2(n-1)}{M}$，则$T\ge(m-n+1)\cdot\frac{2(n-1)}{M}+\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{b\}}\left\{\frac{x_b}{a_i}\right\}$；

另一方面，有$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in X}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}=f(x)+\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{b\}}\sum_{x\in X}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}$.

综上可知$f(x)\ge(m-n+1)\cdot\frac{2(n-1)}{M}+\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{b\}}\left(\left\{\frac{x_{f_i}}{a_i}\right\}-\sum_{x\in X}\left\{\frac{x}{a_i}\right\}\right)$

$\ge(m-n+1)\cdot\frac{2(n-1)}{M}+(n-1)\cdot\left[\frac{1}{M}-f(X)\right]$，即$Mnf(X)\ge(m-n+1)\cdot 2(n-1)+(n-1)$，

注意到$(m-n+1)\cdot 2(n-1)+(n-1)=(2m-2n+3)(n-1)=2mn-2m-2n^2+5n-3$，

由于$M\ge 2\cdot\frac{M}{a_2}\ge 2n$，知$mn-2m-2n^2+6n-4=(m-2n+2)(n-2)\ge 0$，

则$Mnf(X)\ge mn-n+1$，即$Mf(X)\ge m-1+\frac{1}{n}$，而$Mf(X)\in Z$，知$Mf(X)\ge m=|X|$，证毕！

【注】本题难度极高，题目本身并不容易入手，解题的关键点在于大胆地将$|Y|$控制在$|X|-1$，并细致考与j的对应关系．后续算两次的量并不难想，但在放缩过程中细节繁多，很难完整地完成讨论．

四、（本题满分21分）

对于$\mathbf{R}^2$中任意两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，我们定义该两点之间的小数距离为$\sqrt{\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2}$，其中$\|t\|$表示实数$t$离最近整数的距离．求最大的实数$r$，使得存在平面上的四个点，满足两两之间的小数距离均不小于r．

解：

一方面，取如左图四点，其中虚线为格线，容易验证$r=\frac{1}{2}\csc 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$符合题意；

另一方面，若存在$r>\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$及$A,B,C,D$四点符合题意，显然$\frac{1}{2}<r\le\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

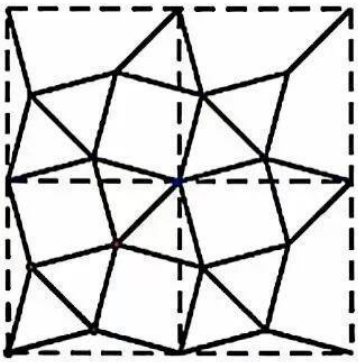
容易验证同时两点平移，或将任意一点的坐标增减任意整数，均不影响两点间的小数距离，

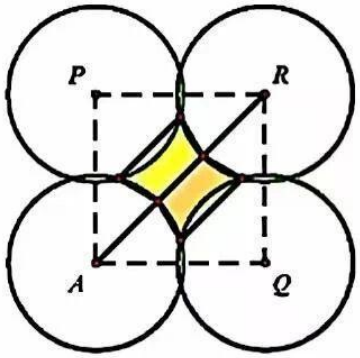
不妨假设四个点均在$[0,1)^2$内，且$A(0,0)$，此时任意两点间的小数距离不大于两点间距离，

如右图，以$A(0,0),P(0,1),Q(1,0),R(1,1)$为圆心、$r$为半径作圆，圆、$AR$的交点围成两个等腰梯形，

易知B,C,D到A的小数距离为其到A,P,Q,R四点距离的最小值，则B,C,D在四个圆中间的区域内，而在每个梯形内（含边界），两点间距离最大值严格小于r，知每个梯形内至多有B,C,D中一个点，由抽屉原理即得矛盾！

综上所述，$\min r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．





【注】本题是比较新颖的组合几何问题，容易推知一些小数距离的性质，不难想到要在$[0,1)^2$内考虑问题，尝试之后可以发现极端情况，至于证明则是比较经典的抽屉原理方式.温州百优教育

五、（本题满分21分）

对于素数 p，设 f 为 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 到自身的一个双射，满足对于 $p\mid a^2-b$，有 $|f(a)-f(b)|\le 2024$.

证明：有无穷多个 p 使得 f 存在，也有无穷多个 p 使得 f 不存在.

证明：

一方面，我们证明对每个 $4k+3$ 型素数 p，均有 f 存在.

事实上这样的素数有无穷多个，而 -1 不是模 p 的二次剩余，

且对于 $x=1,2,\cdots,p-1$，$x,p-x$ 中恰有一个是模 p 的二次剩余.

考虑 $1,2,\cdots,p-1$ 分别对应点 $v_1,v_2,\cdots,v_{p-1}$，若 $p\mid a^2-b$ 则连一条有向边 v_av_b，

设 $1,2,\cdots,p-1$ 中二次剩余的数对应的点构成集合 A，非二次剩余的数对应的点构成集合 B，

有 $|A|=|B|=\dfrac{p-1}{2}$，且 $x,p-x$ 对应的点分属 A,B.

注意到 B 中每个点均需要连出一条边，终点均为 A 中的点且互不相同，

而 A 中的点每个均引出一条边指向 A 中的点，由于所有点出度之和为 $p-1$，A 中每个点入度至少为2，

则 A 中各点引出的边的终点互不相同，知图中 A 中的点连成若干个圈，温州百优教育

每个 B 中的点恰引出一条边指向 A 中不同的点.

对于 A 中的某个有 t 个点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_t}$ 的圈，及 B 中的点 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_t}$ 分别指向 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_t}$，

可以将任意连续 $2t$ 个整数 $s+1,s+2,\cdots,s+2t$ 赋值给这 $2t$ 个点所对应的数对应的函数值，且满足条件，

令 $f(i_1),f(j_1),f(i_2),f(j_2),\cdots,f(i_t),f(j_t)$ 为 $s+1,s+3,\cdots,s+2t-1,s+2t,s+2t-2,\cdots,s+2$ 即可，

$f(0)=0$，知对所有 $4k+3$ 型素数 p，均有 f 存在，这样的素数有无穷多个；

另一方面，数列 $\{2^{2^n}+1\}$ 的素因子无穷多，每一项均有一个素因子 p_n 满足 $p_n\nmid 2^{2^m}+1(0\le m<n)$，

假设仅有有限多个 p_n 使得 f 不存在，当 n 足够大必有 f 存在，此时可取 n 足够大，使得 $p_n>n$，

由费马数性质知2模 p_n 的阶为 2^{n+1}，考虑 $r_i\equiv 2^i\pmod{p_n}(i=1,2,\cdots,n)$，

由于阶为 2^{n+1}，知 r_i 中任意若干项的乘积模 p_n 互不同余，共有 2^n 个乘积，记为 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{2^n}$，

而 $\left(2^i\right)^{2^n}=\left(2^{2^n}\right)^i\equiv(-1)^i\equiv 1(\bmod p_n)$，知 $\pi_j^{2^n}\equiv 1(\bmod p_n)\left(j=1,2,\cdots,2^n\right)$，

下将函数变量模 p 考虑，有 $\left|f\left(\pi_j\right)-f(1)\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\pi_j^{2^{k+1}}\right)-f\left(\pi_j^{2^k}\right)\right|\le 2024n$，

共有 2^n 个不同的 $f\left(\pi_j\right)$，而满足 $|f(x)-f(1)|\le 2024n$ 的 x 至多有 $4048n+1$ 个，当 n 足够大时即得矛盾！

知存在无穷多个 $\{2^{2^n}+1\}$ 中的素因子 p_n，使得 f 不存在.

【注】本题是一道比较标准的数论问题，从 $a^2\equiv b(\bmod p)$ 出发想到二次剩余，进而想到用 $4k+3$ 型素数及费马数完成构造.

六、（本题满分21分）

设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=2n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^3=3n$．对所有整数 $n\geq 4$，

（1）求最大的常数 C_1，使得 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq C_1$；

（2）证明：存在常数 $C_2>0$，使得 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq C_1+C_2n^{-\frac{3}{2}}$，其中 C_1 为第（1）问所求值．

解：

（1）一方面，考虑 $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$，有 α,β 的和、积分别为1，-1，有 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-x-1$，

有 $\sum_{i=1}^{n}(a_i-\alpha)(a_i-\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2-a_i-1\right)=2n-n-n=0$，

且 $\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i-\alpha)(a_i-\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^3-a_i^2-a_i\right)=3n-2n-n=0$，

有 $\sum_{i=1}^{n}(a_i-\alpha)^2(a_i-\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i-\alpha)(a_i-\beta)-\alpha\sum_{i=1}^{n}(a_i-\alpha)(a_i-\beta)=0$，

若 $a_i<\alpha$ 恒成立，必有 $a_i=\beta$，矛盾！则存在 $a_i\geq\alpha$，即 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq\alpha$，

同理可知 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\beta$，知 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq\alpha-\beta=\sqrt{5}$，

知 $C_1=\sqrt{5}$ 符合题意；

另一方面，考虑 $\varepsilon\in\left(0,\sqrt{5}\right)$，

分别取方程 $x^2-5y^2=1$ 及 $x^2-5y^2=-1$ 的正整数解 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，满足 $y_1,y_2>\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}\varepsilon}}$，

有 $\left|\frac{x_i}{y_i}-\sqrt{5}\right|=\frac{\left|\frac{x_i^2}{y_i^2}-5\right|}{\frac{x_i}{y_i}+\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{x_i^2}{y_i^2}-5\right|=\frac{1}{\sqrt{5}y_i^2}<\varepsilon$，知 $\frac{x_1}{y_1}\in\left(\sqrt{5},\sqrt{5}+\varepsilon\right)$，$\frac{x_2}{y_2}\in\left(\sqrt{5}-\varepsilon,\sqrt{5}\right)$，

取 $\alpha_i=\frac{x_i+y_i}{2y_i}$，$\beta_i=\frac{-x_i+y_i}{2y_i}$，有 $\alpha_i+\beta_i=1$，$\alpha_1\beta_1=\frac{y_1^2-x_1^2}{4y_1^2}=-1-\frac{1}{4y_1^2}$，$\alpha_2\beta_2=-1+\frac{1}{4y_2^2}$，

令 $(A,B,C,D)=\left(x_2y_1^2(x_1+y_1),x_2y_1^2(x_1-y_1),x_1y_2^2(x_2+y_2),x_1y_2^2(x_2-y_2)\right)$，$n=A+B+C+D$，

显然 $A,B,C,D\in\mathbf{N}^*$，我们证明取 A 个 α_1，B 个 β_1，C 个 α_2，D 个 β_2 符合题意．

有 $A\beta_1+B\alpha_1=0$，知 $A+B=A\alpha_1+B\beta_1$，同理 $C+D=C\alpha_2+D\beta_2$，则 $A\alpha_1+B\beta_1+C\alpha_2+D\beta_2=n$；

又 $\frac{A+B}{C+D}=\frac{y_1^2}{y_2^2}=-\frac{\alpha_2\beta_2+1}{\alpha_1\beta_1+1}$，即 $(\alpha_1\beta_1+1)(A+B)+(\alpha_2\beta_2+1)(C+D)=0$，

知$\alpha_1\beta_1(A+B)+\alpha_2\beta_2(C+D)=-(A+B+C+D)=-n$，

而$A\alpha_1^2+B\beta_1^2=(\alpha_1+\beta_1)(A\alpha_1+B\beta_1)-\alpha_1\beta_1(A+B)=A\alpha_1+B\beta_1-\alpha_1\beta_1(A+B)$，

且$C\alpha_2^2+D\beta_2^2=C\alpha_2+C\beta_2-\alpha_2\beta_2(C+D)$，

则$A\alpha_1^2+B\beta_1^2+C\alpha_2^2+D\beta_2^2=(A\alpha_1+B\beta_1+C\alpha_2+D\beta_2)-\alpha_1\beta_1(A+B)-\alpha_2\beta_2(C+D)=2n$；

又$A\alpha_1^3+B\beta_1^3=(\alpha_1+\beta_1)(A\alpha_1^2+B\beta_1^2)-\alpha_1\beta_1(A\alpha_1+B\beta_1)=A\alpha_1^2+B\beta_1^2-\alpha_1\beta_1(A+B)$，

且$C\alpha_2^3+D\beta_2^3=C\alpha_2^2+D\beta_2^2-\alpha_2\beta_2(C+D)$，

则$A\alpha_1^3+B\beta_1^3+C\alpha_2^3+D\beta_2^3=(A\alpha_1^2+B\beta_1^2+C\alpha_2^2+D\beta_2^2)-\alpha_1\beta_1(A+B)-\alpha_2\beta_2(C+D)=3n$，

知上述数组符合条件，此时$\beta_1<\beta<\beta_2<\alpha_2<\alpha<\alpha_1$，

有$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\alpha_1-\beta_1<\sqrt{5}+\varepsilon$，知$C_1\le\sqrt{5}$.

综上所述，最大的常数$C_1=\sqrt{5}$；

（2）反证法，假设对于任意$\lambda>0$，总有符合条件的数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

使得$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\sqrt{5}+\lambda n^{-\frac{3}{2}}$，

记$(M,m)=(\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\})$，

由（1）知$m\le\beta<\alpha\le M$，则$M<\sqrt{5}+\lambda n^{-\frac{3}{2}}+m\le\sqrt{5}+\lambda n^{-\frac{3}{2}}+\beta=\alpha+\lambda n^{-\frac{3}{2}}$，$m>\beta-\lambda n^{-\frac{3}{2}}$，

知$\beta-\lambda n^{-\frac{3}{2}}<m\le a_i\le M<\alpha+\lambda n^{-\frac{3}{2}}(i=1,2,\cdots,n)$，显然当$a_i\in(\beta,\alpha)$时$(\alpha-a_i)(a_i-\beta)$最小，

有$(\alpha-a_i)(a_i-\beta)>-\lambda n^{-\frac{3}{2}}\left(\sqrt{5}+\lambda n^{-\frac{3}{2}}\right)>-3\lambda n^{-\frac{3}{2}}$，而$\sum_{i=1}^{n}(\alpha-a_i)(a_i-\beta)=0$，

知$(\alpha-a_i)(a_i-\beta)=-\sum_{j\ne i}(\alpha-a_j)(a_j-\beta)<(n-1)\cdot3\lambda n^{-\frac{3}{2}}<3\lambda n^{-\frac{1}{2}}$，

假设$\alpha-a_i,a_i-\beta\ge3\lambda n^{-\frac{1}{2}}$，总有$\lambda$使得$(\alpha-a_i)(a_i-\beta)\ge3\lambda n^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{5}-3\lambda n^{-\frac{1}{2}}\right)>3\lambda n^{-\frac{1}{2}}$，矛盾！

则总有$a_i\in\left(\beta-\lambda n^{-\frac{3}{2}},\beta+3\lambda n^{-\frac{1}{2}}\right)\cup\left(\alpha-3\lambda n^{-\frac{1}{2}},\alpha+\lambda n^{-\frac{3}{2}}\right)$，记两区间分别为$B,A$.

取λ使得$3\lambda n^{-\frac{1}{2}}<\sqrt{5}-1$，取$f(x)=2x^3-3x^2-6x$，

有$\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}=\dfrac{2x^2+2\alpha x-3x+2\alpha^2-3\alpha-6}{x-\alpha}=\dfrac{2x^2+2\alpha x-3x-4\alpha^2+3\alpha}{x-\alpha}=2x+4\alpha-3$，

必存在$\lambda>0$，使得对$x\in A$，$\left|\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\right|=|2x+4\alpha-3|\le 2|x-\alpha|+3|2\alpha-1|=2|x-\alpha|+3\sqrt{5}<7$，

则$|f(x)-f(\alpha)|<7(x-\alpha)^2$，同理对$x\in B$，可满足$|f(x)-f(\beta)|<7(x-\beta)^2$.

考虑$T=\left|\sum\limits_{a_i\in A}[f(a_i)-f(\alpha)]+\sum\limits_{a_i\in B}[f(a_i)-f(\beta)]\right|$：

一方面，$T\le\sum\limits_{a_i\in A}|f(a_i)-f(\alpha)|+\sum\limits_{a_i\in B}|f(a_i)-f(\beta)|<\sum\limits_{a_i\in A}7(a_i-\alpha)^2+\sum\limits_{a_i\in B}7(a_i-\beta)^2$

$<7\left(\sum\limits_{a_i\in A}|a_i-\alpha|+\sum\limits_{a_i\in B}|a_i-\beta|\right)^2$，而对于$a_i\notin[\beta,\alpha]$，有$(a_i-\alpha)(a_i-\beta)<3\lambda n^{-\frac{3}{2}}$，且$\begin{cases}|a_i-\alpha|<\lambda n^{-\frac{3}{2}},a_i\in A\\|a_i-\beta|<\lambda n^{-\frac{3}{2}},a_i\in B\end{cases}$，

对于$a_i\in[\beta,\alpha]$，有$\begin{cases}|a_i-\alpha|<(\alpha-a_i)(a_i-\beta),a_i\in A\\|a_i-\beta|<(\alpha-a_i)(a_i-\beta),a_i\in B\end{cases}$，

知$T<7\left(\sum\limits_{a_i\in A}|a_i-\alpha|+\sum\limits_{a_i\in B}|a_i-\beta|\right)^2<7\left[\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}\lambda n^{-\frac{3}{2}}+\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}(\alpha-a_i)(a_i-\beta)\right]^2$

$=7\left[\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}\lambda n^{-\frac{3}{2}}+\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}(a_i-\alpha)(a_i-\beta)\right]^2<7\left(\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}\lambda n^{-\frac{3}{2}}+\sum\limits_{a_i\in[\beta,\alpha]}3\lambda n^{-\frac{3}{2}}\right)^2=\dfrac{112\lambda^2}{n}$；

另一方面，记$|\{i|a_i\in A\}|=p$，$|\{i|a_i\in B\}|=q$，则$p+q=n$，

有$T=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_i)-\sum\limits_{a_i\in A}f(\alpha)-\sum\limits_{a_i\in B}f(\beta)\right|=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_i)-p\cdot f(\alpha)-q\cdot f(\beta)\right|$，

而$\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_i)=2\times 3n-3\times 2n-6\times n=-6n$，$f(x)=2x\left(x^2-x-1\right)-\left(x^2-x-1\right)-5x-1$，

知$f(\alpha)=-5\alpha-1$，$f(\beta)=-5\beta-1$，

则$T=|-6n-p(-5\alpha-1)-q(-5\beta-1)|=5|p\alpha+q\beta-(p+q)|=5|p\beta+q\alpha|=\dfrac{5}{2}\left|\sqrt{5}(p-q)-(p+q)\right|$

$=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\left|5(p-q)^2-(p+q)^2\right|}{\left|\sqrt{5}(p-q)+(p+q)\right|}\ge\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}|p-q|+|p+q|}\ge\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}+1\right)|p+q|}>\dfrac{5}{8n}$.

有$\dfrac{5}{8n}<T<\dfrac{112\lambda^2}{n}$，这对于$\lambda$足够小时显然不成立，矛盾！故存在符合条件的$C_2$.

【注】这是一道极为困难的代数题目，解题的入手点可以是尝试极端情况的构造，第二小问则是对于项与极端情况的值的距离进行刻画，距离不能过大，再细致地推得矛盾.温州百优教育