零长度弹簧 (zero-length springs) 和魔力线圈 (slinky coils)

零有效长度弹簧（zero effective length spring, ZLS）的弹性力正比于弹簧的长度，即当 $L > L_0$ 时，弹性力 $F = kL$，其中 L_0 是弹簧的最小长度，同样也是未伸长时候的长度。图 1 显示了一根零有效长度弹簧的弹性力 F 和弹簧长度 L 的关系，图中直线的斜率是弹簧的弹性系数 k.

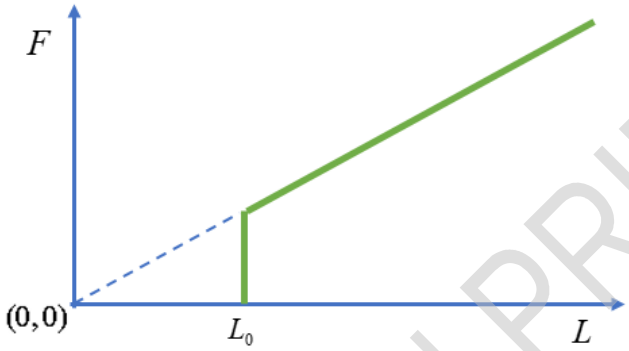


图 1：弹性力 F 和弹簧长度 L 的关系

零有效长度弹簧（ZLS）在地震学中很有用，可以非常准确地测量重力加速度 g 的变化。在这里，我们考虑一根均匀的 ZLS，它的重量 Mg 大于 kL_0。由此我们定义了一个无量纲比值 $\alpha = kL_0/Mg < 1$ 来表征弹簧的相对柔软度。一种称为魔力弹簧 (slinky) 的玩具就可能是（但不一定）这样的一种 ZLS。

Part A: 静力学 (3.0 分)

A.1	对于上述未伸长的 ZLS，考虑其中长度为 $\Delta\ell$ 的一段，在无重力条件下用力 F 拉弹簧时，该段长度 Δy 是多少？请用力 $F, \Delta\ell$ 和弹簧的参数 (parameters) 来表示。	0.5pt

A.2	对于一段原长度为 $\Delta\ell$ 的弹簧，将它从原长 $\Delta\ell$ 拉伸到长度 Δy 时，计算需要做的功 ΔW。	0.5pt

在全题中，我们用弹簧未形变时弹簧上的一点相对弹簧底端的距离 $0 \le \ell \le L_0$ 来标记该点，特别注意，对于弹簧上的每个点，当弹簧伸长时，标记 ℓ 保持不变。

A.3	假设我们将弹簧的顶端悬挂起来，弹簧将会在自身重力的作用下伸长，当平衡时，该悬挂弹簧的总长度 H 是多少？用 L_0 和 α 来表示你的答案。	2.0pt

Part B: 动力学（5.5 分）

实验表明，当一根静止悬挂的弹簧从静止状态释放时，它会逐渐从顶部收缩，而下部保持静止（见图 2）。随着时间的推移，顶部收缩部分像一块固体向下运动，其匝数（turns）也越来越多，而下部静止部分越来越短。弹簧上的每个点只有当运动部分到达时才开始运动。只有当弹簧完全叠在一起（fully collapsed），即达到其非伸长长度 L_0 时，弹簧的底端才开始运动。从此以后，收缩的弹簧继续无翻滚下落，犹如刚体在重力作用下运动一样。

DELEGATION PRINT

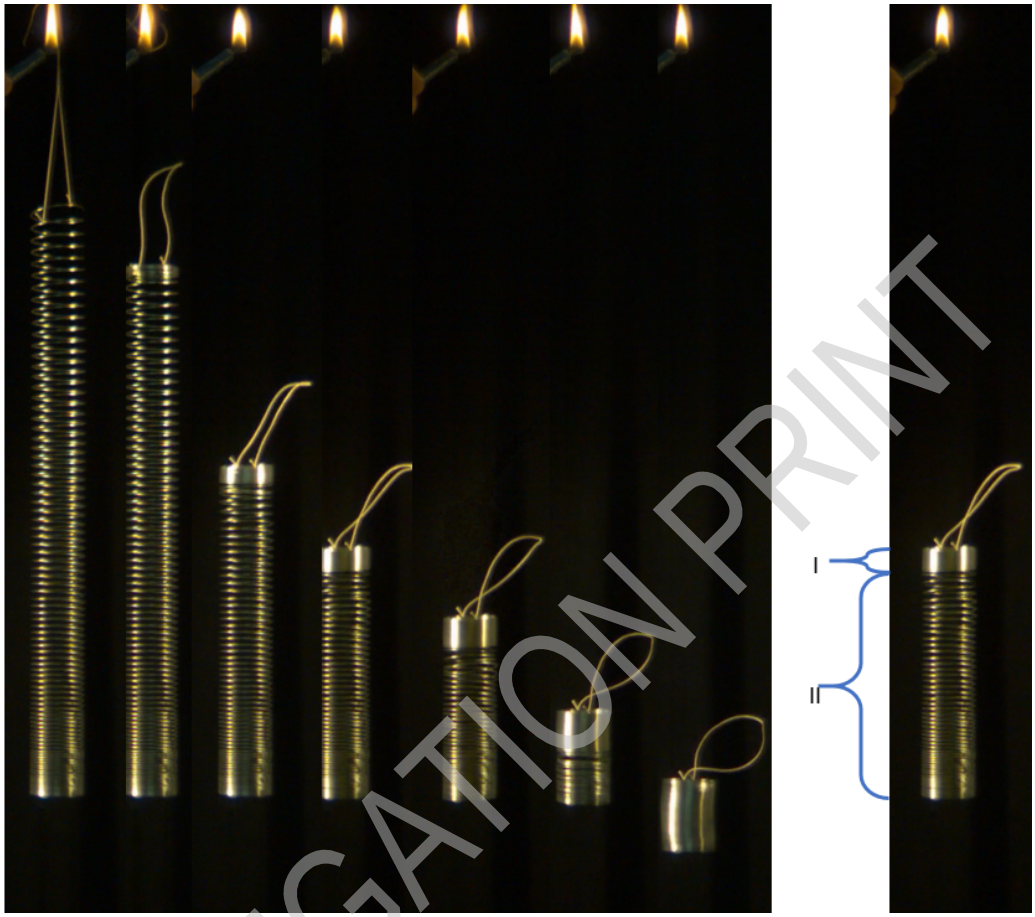


图 2：左图：魔力弹簧自由下落过程中拍摄的一系列照片。右图：在弹簧自由下落过程中运动的部分 I 和静止的部分 II。

DELEGATION PRINT

在本题的其余部分，要求你在上述模型的基础上求解问题。你可以忽略空气阻力，但不能忽略原长 L_0。

B.1 计算弹簧从开始释放到完全收缩至最小长度 L_0 时需要的时间 t_c。答案用 L_0，g，和 α 表示。
当弹簧的 $k = 1.02\ \mathrm{N/m}$，$L_0 = 0.055\,\mathrm{m}$，以及 $M = 0.201\ \mathrm{kg}$ 时，重力加速度 g 为 $9.80\ \mathrm{m/s^2}$ 时，计算 t_c 的数值。 2.5pt

B.2 在本小题中，用 ℓ 表示部分 I（图 2 中的运动部分）和部分 II（图 2 中静止部分）的界面坐标。在某个时刻，静止的部分仍然存在，其质量为 $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$，而运动部分以统一的瞬时速度 $v_I(\ell)$ 运动。求证：此时（依然有静止部分）运动部分的速度是 $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$，并用 $L_0, g,$ 和 α 表示常数 A 和 B。 2.5pt

B.3 基于 B.2 的结果，求弹簧在运动过程中（即弹簧释放之后和撞地之前）弹簧运动部分的最小速度 $v_{\min}$，用 L_0，α，A 和 B 来表示你的答案。 0.5pt

Part C：能量学（1.5 分）

C.1	从弹簧释放到弹簧刚好撞地之前计算由于产生热量而损失的机械能 Q，用 L_0，M，g 和 α 来表达你的答案。	1.5pt

DELEGATION PRINT

微波炉的物理

这个题目是关于微波炉中微波的产生，及其加热食物的用途。微波是在一个被称为“磁控管”（magnetron）的装置中产生的。Part A 是关于磁控管的原理，Part B 是食物对微波的吸收。

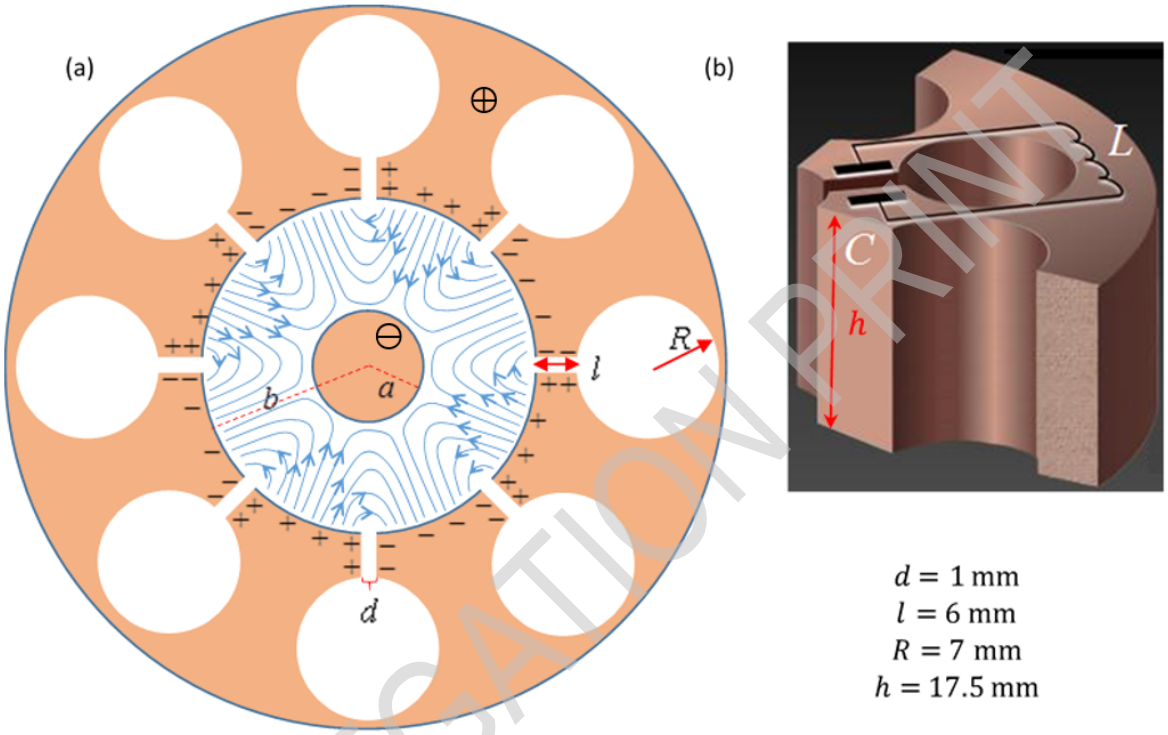


图 1

DELEGATION PRINT

Part A: 磁控管的结构与原理 (6.6 分)

磁控管是用来产生微波辐射的装置，可产生脉冲（用于雷达）或连续（比如在微波炉中）的微波。磁控管有一种自放大的振荡模式。对磁控管加上静态（非交流）电压可很快地激发这一模式。产生的微波辐射再从磁控管输出。

典型的微波炉磁控管由铜质实心圆柱形阴极（半径为 a）和环绕它的阳极 (半径为 b) 组成。阳极为较厚的圆柱外壳形状，并钻有多个圆柱型空腔。这些空腔被称为“谐振器”。其中一个谐振器连接到天线，把微波能量发射输出。在下面的题目中忽略天线。所有内部空间都是真空。考虑图 1(a) 显示的一种典型的具有 8 个谐振腔的磁控管。图 1(b) 所示为单个谐振腔的三维结构。如图所示，八个腔中的每一个都表现为电感—电容（LC）谐振器，其谐振频率为 $f = 2.45\ \mathrm{GHz}$。

沿着磁控管轴向施加一个静态均匀磁场，指向页面外（图 1(a)）。在阳极和阴极之间还施加一个恒定电压。从阴极发射的电子达到阳极使其带电，因而激发出一个振荡模式，该模式中，每两个相邻谐振器之间的电荷的符号是相反的。谐振腔可以放大这种振荡。

上述过程在阴极和阳极之间产生了一个交变的电场（图 1(a) 中的蓝线；静电场没有画出），其交变频率为前述的 $f = 2.45\ \mathrm{GHz}$。这个交变的电场叠加在恒定电压引起的静电场上。阳极和阴极之间的交变电场的典型振幅约为静电场的 $\frac{1}{3}$。电子在阴极和阳极之间的运动受到静电场与交变电场的共同作用。这使得到达阳极的电子将它们从静电场获得的大约 80% 的能量转换给交变场。少数发射出的电子返回到阴极后释放更多的电子，进一步放大了交变场。

每个谐振器可认为有电容和电感，如图 1(b) 所示。该电容主要来自谐振器表面的平面部分，而电感来自圆柱形部分。假定谐振器中的电流均匀地沿着圆柱形谐振腔的表面流动，且该电流产生的磁场强度是理想无限长螺线管的 0.6 倍。图 1(b) 给出了谐振器的几何参数及其数值。真空磁导率和介电常数分别为 $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ 和 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$。

A.1 用上述数据计算谐振器的谐振频率 f_{est}。（你的计算结果可能会与题目给出的 $f = 2.45\,\mathrm{GHz}$ 的实际值不同。在下面的问题中使用题目给出的**实际值**。） 0.4pt

问题 A.2 不涉及磁控管本身，但有助于理解相关的物理。考虑在自由空间中运动的电子，受到一个指向 y 轴负方向的均匀的电场 $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ 和一个沿正 z 轴方向的均匀磁场 $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 的作用。(E_0 和 B_0 是正的，$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 是单位矢量，按常规取向)。我们用 $\vec{u}(t)$ 表示电子在 t 时刻速度。电子的漂移速度 $\vec{u}_D$ 被定义为它的平均速度。我们用 m 和 $-e$ 分别表示电子的质量与电荷。

A.2 在以下两种情况下，求出 $\vec{u}_D$，并在答题纸中画出在 $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ 的时间范围内电子的轨迹： 1.5pt

1. $t = 0$ 时电子的速度为 $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
2. $t = 0$ 时电子的速度为 $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

我们现在再来讨论磁控管的情况。阴极和阳极之间的距离是 15 mm。由于前述的能量的损失，假设每个电子的最大动能不超过 $K_{\max} = 800\,\mathrm{eV}$。静磁场的强度为 $B_0 = 0.3\,\mathrm{T}$。电子的质量和电荷分别为 $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ 和 $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$。

A.3 在一个参照系中数值估算电子运动轨迹的最大半径，该参照系中电子的运动近似为圆形，且该参照系近似为惯性系。 0.4pt

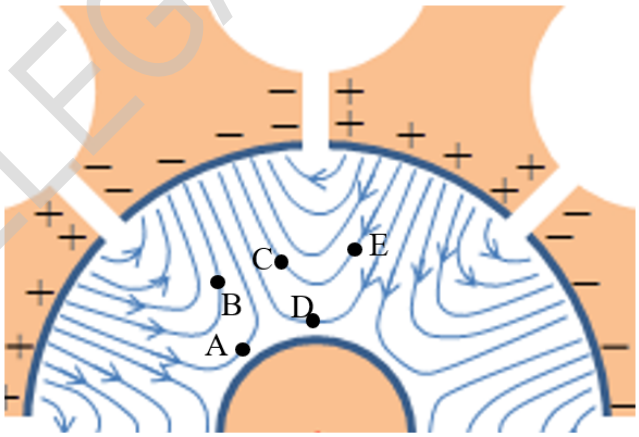


图 2

A.4 图 2 所示为某一时刻阳极和阴极之间的交变电场线（静电场电场线未画出）。在答题纸中指出此时刻在 A，B，C，D 和 E 处的电子，哪些电子会飘向阳极，哪些会飘向阴极，哪些电子的漂移方向完全垂直于半径方向。 1.2pt

DELEGATION PRINT

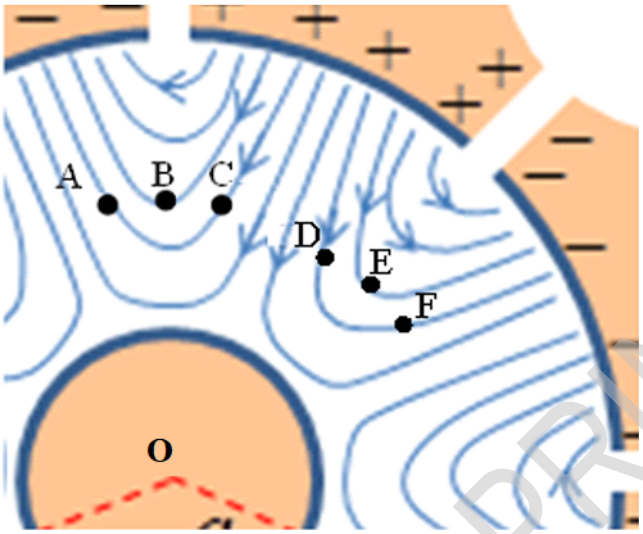


图 3

图 3 所示为某一时刻阳级和阴极之间的交变电场线（静电场电场线未画出）。A、B、C、D、E 和 F 为该时刻 6 个电子的位置。所有电子距阴极的距离相同。

A.5	考虑图 3 中的情况，对于 6 个电子对 AB、AC、BC、DE、DF、EF 中的每个电子对，在答题纸中指出该时刻它们的漂移是否会导致它们与阴极中心 O 的连线的夹角增大或减小 [whether their drift will cause the angle between their positions (measured from the cathode' s center O) to increase or decrease at that moment]。	1.2pt

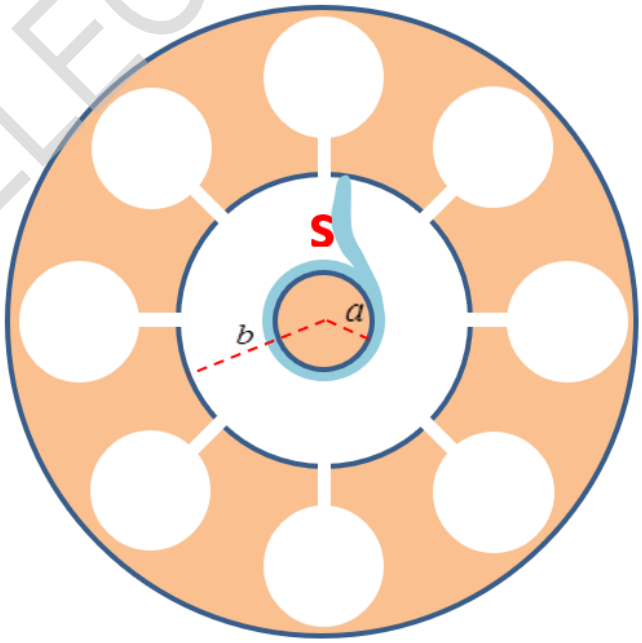


图 4

DELEGATION PRINT

在问题 A.5 中会发现有一种聚焦机制，将阴极和阳级之间的电子会聚成辐条形状。图 4 描绘了一个这样的辐条，用 S 标出。

A.6 在答题纸中绘出此时刻的其它辐条们。用箭头们标出它们的旋转方向，并计算它们的平均角速度 ω_s. 0.8pt

假设阴极和阳极之间的中点处的的总电场等于从阴极到阳极的径向静电场的平均值，并且在该中点的辐条大致是沿径向的。阴极和阳极的半径（a 和 b）见图 4。

A.7 写出使磁控管以上述工作所需的静电压 V_0 的近似表达式 [Find an approximate expression for the static voltage V_0 required for operating the magnetron in the manner described]。（你计算得到的电压值是磁控管工作所需的最小值。最优工作电压会更高一些。） 1.1pt

Part B：微波辐射与水分子的作用 (3.4 分)

这部分我们利用微波辐射（从磁控管的天线辐射进微波炉的食品室）来烹饪，就是加热一种有损耗的介电材料，比如纯净水或者盐水（盐水可以看作汤的模型）。

电偶极子模型是一对大小相同的正负电荷 q 与 $-q$ 相隔一小段距离 d，电偶极矩矢量从负电荷指向正电荷，大小为 $p = qd$。

随时间变化的电场 $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ 作用在单个电偶极子 $\vec{p}(t)$ 上，该电偶极子具有恒定的幅度：$p_0 = |\vec{p}(t)|$。电偶极子与电场之间的夹角为 $\theta(t)$.

B.1 写出下列表达式：电场作用在电偶极子上的力矩的大小 $\tau(t)$，以及电场传输给电偶极子的功率的大小 $H_i(t)$。用 p_0, $E(t)$, $\theta(t)$ 和它们的导数来表示。 0.5pt

水分子是有极性的，因此可以当成电偶极子来处理。但由于在液态水分子之间强大的氢键，我们不能将水分子视为各自独立的偶极子。因而我们应该考虑极化矢量 $\vec{P}(t)$，它是偶极矩密度（单位体积的水分子的平均电偶极矩）。极化矢量 $\vec{P}(t)$ 平行于作用在该处的局域交变电场（由微波产生），$\vec{E}(t)$，并随时间振荡，振荡幅度正比于局部交变电场的幅度，但有相位滞后 δ。

在水中给定位置处的局域交变电场为 $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$，其中 $\omega = 2\pi f$，它引起极化矢量 $\vec{P}(t) = \beta\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$，其中 β 是表征水的性质的一个无量纲的常数。

B.2 写出单位体积的水吸收功率的时间平均值 $\langle H(t)\rangle$ 的表达式。 0.5pt
含时的周期函数 $f(t)$ 在一个周期 T 内的时间平均值的定义为：

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

现在考虑微波辐射在水中的传播。水的相对介电常数（在电磁场频率下）为 ε_r，相应的水的折射率为 $n = \sqrt{\varepsilon_r}$。电场的瞬时能量密度为 $\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2$。磁场与电场的时间平均能量密度相等。

B.3 用 $I(z)$ 来表示辐射能量通量密度（energy flux density）的时间平均（单位面积上的平均辐射功率流 (power flow)）。这里 z 是进入水的深度，辐射沿 z 方向传播。写出该通量密度 $I(z)$ 对 z 的依赖关系式，该通量密度在水表面的值 $I(0)$ 可以出现在结果中。 1.1pt

位相差 δ 是由于水分子间的相互作用导致的结果。位相差取决于无量纲的介电损耗系数 ε_ℓ 和相对介电常数 ε_r

DELEGATION PRINT

(两个常数都与微波辐射的角频率 ω 和温度有关)，且具有以下关系：$\tan\delta = \varepsilon_\ell/\varepsilon_r$。当 δ 足够小时，在水中深度为 z 处的电场为：

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2}nk_0 z\tan\delta}\sin\left(nk_0 z - \omega t\right) \tag{2}$$

其中 $k_0 = \omega/c$，$c = 3.0\cdot 10^8 \frac{m}{s}$ 是真空光速。

B.4 在 $\tan\delta \approx \sin\delta$ 近似关系下，利用其它参数写出 B.2 问中系数 β 的表达式。 0.6pt

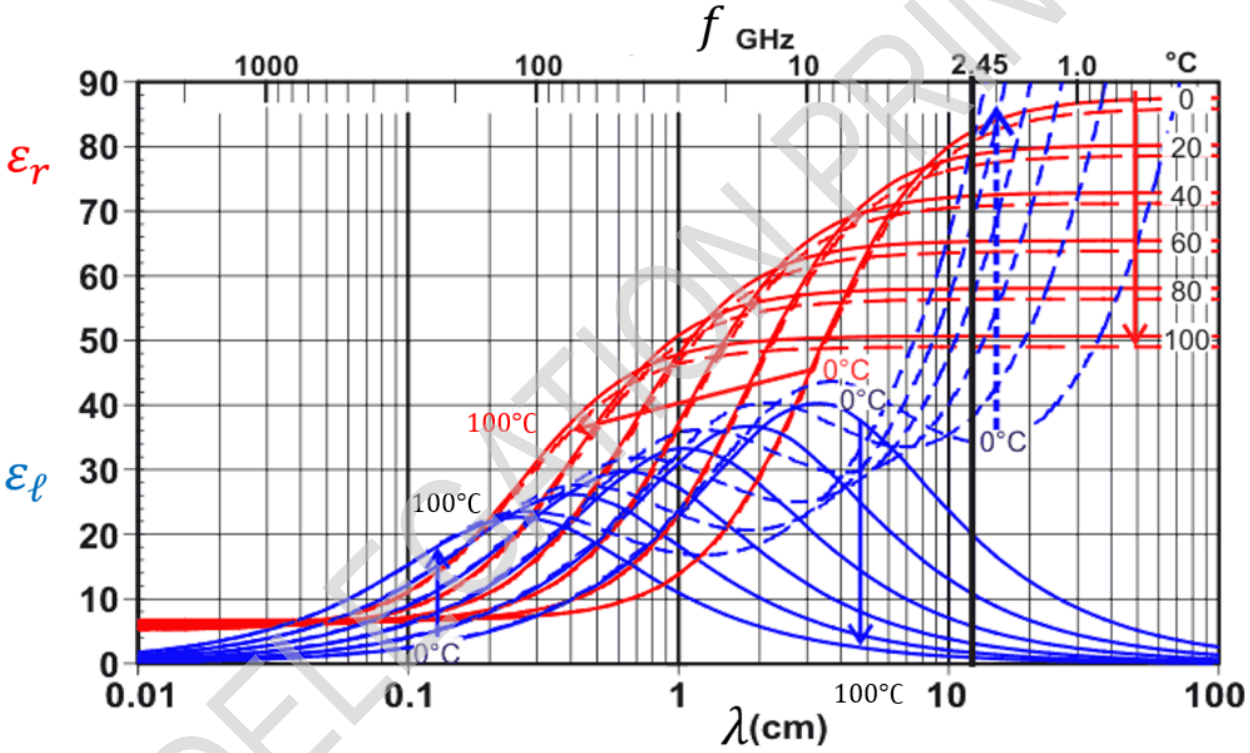


图 5

图 5 画出了纯水（实线）和稀盐水（虚线）的 ε_ℓ（蓝色）与 ε_r(红色)，在几个不同的温度下，随波长或频率的变化。箭头指示了从 $0^\circ\mathrm{C}$ 到 $100^\circ\mathrm{C}$ 的各曲线。角频率 $\omega = 2\pi\cdot 2.45\cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$ 在图中用一条粗的竖直线标出，下面我们只考虑微波辐射在此频率时的情形。

B.5 利用图 5 回答下列问题： 0.7pt

1. 对于 $20^\circ\mathrm{C}$ 的纯水，计算出进入深度 $z_{1/2}$ 的值，$z_{1/2}$ 是指在这一深度时单位体积的功率是 $z=0$ 表面处的一半。
2. 在答题纸中指明微波照射纯水时，随温度升高，进入深度是增加，减少还是保持不变。
3. 在答题纸中指明微波照射汤（稀盐水）时，随温度升高，进入深度是增加，减少还是保持不变。

DELEGATION PRINT

热声发动机

热声发动机是一种把热转换成诸如声功率或者声波等机械功的装置。像其他许多热机一样，它可以反向运行成为制冷机，利用声将热从冷库输向热库。高运行频率减少热传导并消除对任何工作室的限制。与许多其他热机不同，除了工作流体本身，热声发动机没有任何活动部件。

热声机器的效率通常比其他类型的引擎低，但它具有搭建（set up）和维护成本优势。这为可再生能源应用创造机会，例如太阳能热电厂和废热利用等。我们的分析将集中在系统内产生声能，忽略给外部设备供电的提取或转换。

Part A：封闭管中的声波（3.7 分）

考虑一个长度为 L 和横截面积为 S 的绝热管，其轴线沿 x 方向。管的两端位于 $x=0$ 和 $x=L$。管两端封闭，其内充满理想气体。在平衡时，气体具有温度 T_0，压强 p_0 和质量密度 ρ_0。假设气体粘度可以忽略不计，气体运动只能在 x 方向。（在垂直的 y 和 z 方向，气体运动和性质都是均匀的。）

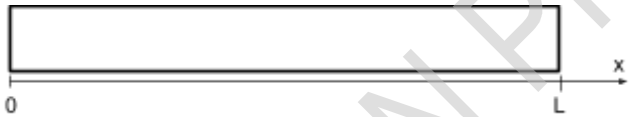


图 1

A.1 当形成声驻波时，气体单元（gas elements）以角频率 ω 沿 x 方向振动。振幅取决于每个单元沿管的平衡位置 x。每个气体单元相对其平衡位置 x 的纵向位移由下式给出 0.3pt

$$u(x,t) = a\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \quad (1)$$

(请注意这里 u 描述气体单元的位移)

其中 $a \ll L$ 是正常数，$k = 2\pi/\lambda$ 是角波数，λ 是波长。在这个系统中最大可能的波长 $\lambda_{\max}$ 是多少?

我们假设在本道大题中一直是 $\lambda = \lambda_{\max}$ 的振荡模式。.

现在，考虑一个狭窄的气体元（parcel of gas），静止时位于 x 和 $x+\Delta x$ 之间 ($\Delta x \ll L$)。作为 A.1 中的位移波的结果，气体元沿 x 轴振荡并经历体积变化以及其他热力学性质的变化。

在以下所有问题中，假设所有热力学性质的变化相比没受扰动的值都是小的。

A.2 气体元体积 $V(x,t)$ 在其平衡值 $V_0 = S\Delta x$ 附近振荡，并有形式 0.5pt

$$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \quad (2)$$

推出 $V_1(x)$ 的表达式，用 V_0, a, k 和 x 表示。

A.3 假设气体总压强，由于声波的原因，近似取形式 0.7pt

$$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t). \quad (3)$$

通过考虑作用于气体元的力，求出压强振荡的振幅 $p_1(x)$（保留主要项），用其位置 x，平衡密度 ρ_0，位移振幅 a 和波的参量 k 和 ω 表示。

在声波频率下，可忽略气体的热传导。我们将气体元的膨胀和收缩当作纯粹的绝热过程，满足关系 $pV^\gamma = \text{const}$，

DELEGATION PRINT

其中 γ 是绝热常数。

A.4 使用上述关系和先前问题的结果，求在管中声波的速度表达式 $c=\omega/k$，取一级近似。用 p_0, ρ_0 和绝热常数 γ 表示你的答案。 0.3pt

A.5 在声波的影响下，由于绝热膨胀和收缩导致的气体温度变化，取以下形式： 0.7pt

$$T(x,t)=T_0-T_1(x)\cos(\omega t). \tag{4}$$

求出温度振荡的振幅 $T_1(x)$，用 T_0, γ, a, k 和 x 表示。

A.6 我们假设管与气体之间有弱的热相互作用 (该假设仅用于求解 A.6 问题)。其结果是声波驻波几乎保持不变，但气体可以与管交换少量的热量。由粘性引起的发热可以忽略不计。
对于图 2 中的每个点（A，C 在管边缘，B 在中心），在长时间看来，判断其上温度是增加，减少，还是保持不变。 1.2pt

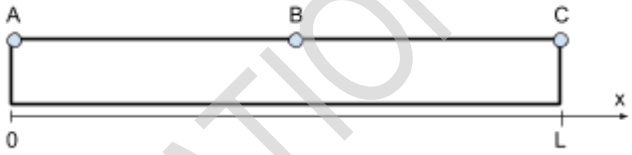


图 2

Part B：外部热接触引起的声波放大（6.3 分）

将很多个薄的固体板彼此分隔叠放置于管内。堆栈的板面与管轴方向平行，以便不阻碍沿管的气流。堆栈板的中心位于 $x_0=L/4$，其沿管轴的延展宽度 $\ell \ll L$，并填充整个横截面（板间间隔空隙还保留）。堆栈板的右和左边缘，保持温度差 τ。堆栈板的左边缘位于 $x_H=x_0-\ell/2$ 处，通过外部热库保持温度 $T_H=T_0+\tau/2$。与此同时，其右边缘，在 $x_C=x_0+\ell/2$，温度保持 $T_C=T_0-\tau/2$。

堆栈板内允许有轻微的纵向热流以保持其左右两边缘间恒定的温度梯度，使得 $T_{\text{plate}}(x)=T_0-\frac{x-x_0}{\ell}\tau$。

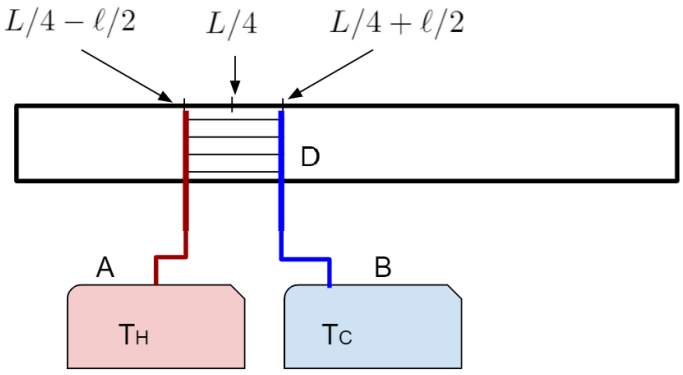


图 3. 系统草图。（A）和（B）分别表示高温和低温热库。（D）表示堆栈板

DELEGATION PRINT

Q3-3

Chinese (China)

为了分析堆栈板与管内声波中气体的热接触效应，做出以下假设：

- 与前部分类似，所有热力学性质的变化相比没受扰动时的值是小的。
- 系统在可能的最长波长的基频驻波模式下工作。它只是由于堆栈板的存在而略微改变。
- 堆栈板比波长要短得多 $\ell \ll \lambda_{\max}$，因此可放置于既足够远离位移的节点也足够远离压强的节点处，以使得气体位移 $u(x,t) \approx u(x_0,t)$ 和压强 $p(x,t) \approx p(x_0,t)$ 在整个堆栈板的长度方向（x 轴方向）可以被认为是均匀的。
- 我们可以忽略由于气体元移入和移出堆栈板而导致的任何边缘效应。
- 堆叠板两端之间的温差，即高温和低温热库之间的温度差异，相比于其温度是小的：$\tau \ll T_0$。
- 通过堆栈板、通过气体和沿着围管的热传导可以忽略不计。唯一显著的热传输原因是由于气体运动引起的对流和气体与堆栈板之间的传导。

B.1 考虑堆栈板区域内的特定气体元，最初在 $x_0 = L/4$。当气体元在堆栈板内移动时，气体元所在位置处堆栈板的温度，有如下变化： 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \tag{5}$$

用 a, τ 和 ℓ 表示 T_{st}。

B.2 温度差高于某个临界值 τ_{cr} 时，气体将从高温热库向低温热库传送热。用 T_0, γ, k 和 ℓ 表示 τ_{cr}。 1.0pt

B.3 求出流入小气体元的热流 $\frac{dQ}{dt}$ 作为体积变化率和压强变化率的线性函数的一般近似表达式。用体积变化率 $\frac{dV}{dt}$ 和压强变化率 $\frac{dp}{dt}$，未受扰动时气体元的压强和体积的平衡值 p_0 和 V_0，以及绝热指数 γ 表示你的答案。（你可以使用等容摩尔热容量表达式 $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$，其中 R 是气体常数。） 0.8pt

气体元和堆栈板之间的有限热流率导致了气体元的压强和体积的振动相位产生差异。我们将看到这个如何产生功。

从堆栈板进入到气体元的热通量正比于气体元和相邻堆栈板单元之间的温度差，近似由 $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)\cos(\omega t)$ 给出。这里 T_1 和 T_{st} 分别是问题 A.5 和 B.1 中的气体元和相邻堆栈板的温度振幅，并且 $\beta > 0$ 是常数。假设在机器运行频率，由于这种热流动引起的气体温度变化相比 T_1 和 T_{st} 都是微不足道的。

B.4 为了计算功，我们将考虑由于与堆栈板的热接触而导致的运动的气体元的体积改变。我们把受到堆栈板影响的压强和体积写成形式： 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{6}$$

已知 p_a 和 p_b，求出 V_a 和 V_b。用 $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a$ 和 ℓ 表示你的答案。

B.5 求出在一个周期内由气体元产生的每单位体积的声学功（acoustic work）w。对堆栈板区域的体积做积分以得到一个周期内气体产生的总功 W_{tot}。
用 $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$ 和 S 表示 W_{tot}。 0.8pt

DELEGATION PRINT

Q3-4

B.6 求出在一个周期内从 $x = x_0$ 左侧截面传输到右侧的热 Q_{tot} 的近似表达式。用 $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$ 表示你的答案。
（提示：你可以使用对流产生的热流公式 $j = Q\frac{du}{dt}$。） 0.8pt

B.7 求出热声发动机的效率 η。效率定义为产生的声学功与从高温热库吸取的热量之比。用高温热库和低温热库之间的温度差 τ、临界温度差 τ_{cr} 和卡诺效率 $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ 表示你的答案。 0.6pt

DELEGATION PRINT

光学测量

在本实验中，我们利用现有设备尽可能地精确测量样品的光学性质。

注意：在你的桌子底下有两大瓶水，这是实验二需要的，**不要喝它。**

在 A 部分，我们将使用两种不同的方法来测量透明圆盘的折射率。第一种是传统方法，而第二种是原创方法，可以达到更高精度。

在 B 部分中，我们将测量激光波长 λ 与衍射光栅的光栅常数 d 之间的比值，旨在达到最高精度水平。

在 C 部分，我们再测量折射率，这次是三角形棱镜的，也试图达到最高精度水平。

实验考试开始 20 分钟后，考试大厅将变暗 100 分钟（需要时可以使用台灯）。这是因为在 A 部分，暗环境对观测有利，当然在灯光下也可进行大多数测量。

可以使用工作间的墙壁作为屏幕，胶带也可以用在墙壁上。在这些实验中，你使用二极管激光作光源。

可以使用工作间的墙壁作为屏幕，胶带也可以用在墙壁上。

在这些实验中，你使用二极管激光作光源。

激光安全说明：

- **切勿直视激光束！**
- 在所有实验中，激光束沿水平传播。当测量激光束在某平面上位置时，**确保你的头部始终高于光束的高度。**
- 不要将激光束对着实验工作间的开口处。
- 不进行测量时，使用开关关闭激光。

设备清单

在本题的所有部分中会使用标号 1-9 设备，标号 10-12 设备用在本题的某些部分。注意你有多件光学器件，不要触碰他们的 垂直 面（光学面）以免损坏表面。

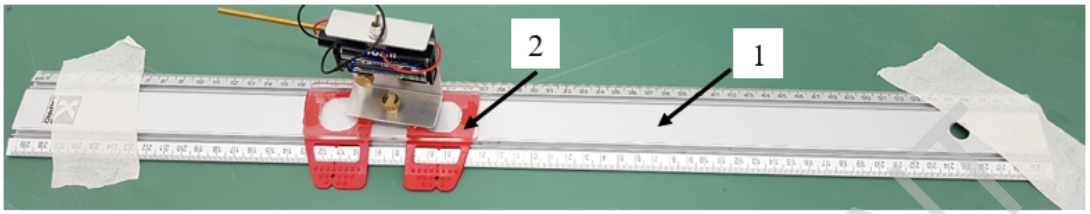
1. 尺子，长 60 厘米
2. 可以沿着标尺移动的滑块
3. 激光源，安装在滑块上。激光器位置可以固定在两个高度：在 A 部分，激光固定在较低处（图中 3A）；B 部分和 C 部分，激光固定在较高位置（图中 3B）。激光器的开关如图中部件 3C 所示。
4. 螺丝 4A 和 4B 的张力控制着绕它们转动的阻力因而也控制装置的稳定性。要进行光束竖直方向的微调，可轻轻提压小金属条 4C 。将 4C 旋转 180 度可以改变激光的高度。不要绕出射光束轴旋转激光，因为激光的偏振是预设好的。
5. 屏幕：你可以使用工作间的墙。你可认为各墙面相互垂直。
6. 一卷胶带，可用于将设备固定在桌子上。
7. 卷尺
8. 各种尺子
9. 台灯
10. 直径为 20.00 厘米的透明圆盘，固定在量角器上，量角器粘在木质底座上（用于 A 部分）。你应该移除附在木质底座上的 4 个小木方块。
11. 可以被用作透明屏幕的纸，你可用手临时将纸放在圆盘的侧面，这样可以测量出射点时不致弄脏抛光的圆盘表面（对于 A 部分）。如图所示，如果在纸上画条直线，测量光束出射点会更准确。

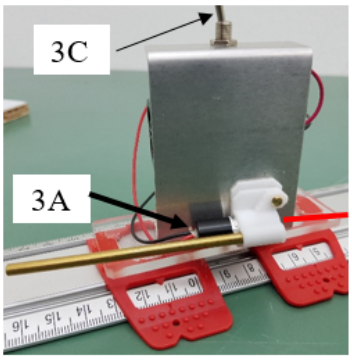
DELEGATION PRINT

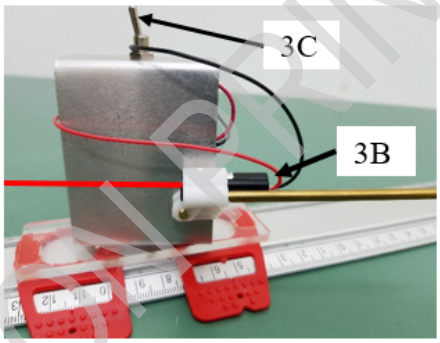
Q1-2

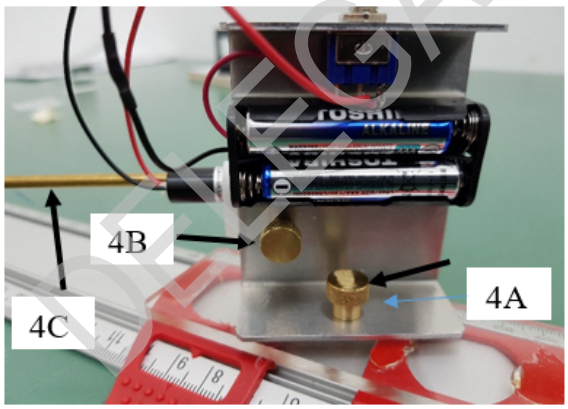
Chinese (China)

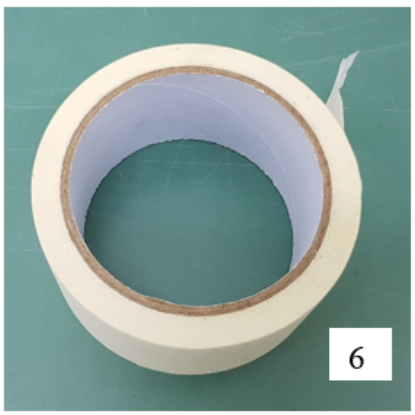
12. 一个木板（12A）和一个能够沿其垂直轴旋转的圆柱架（12B），用于安装衍射光栅（12C）或三角棱镜（12D）。









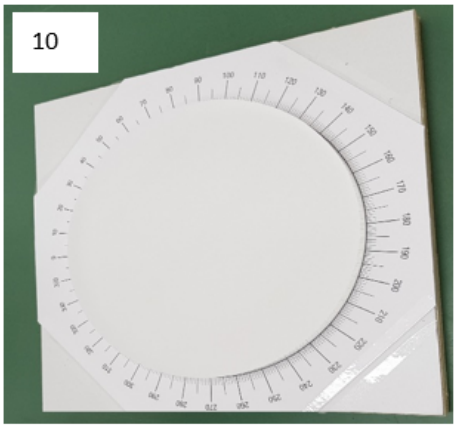


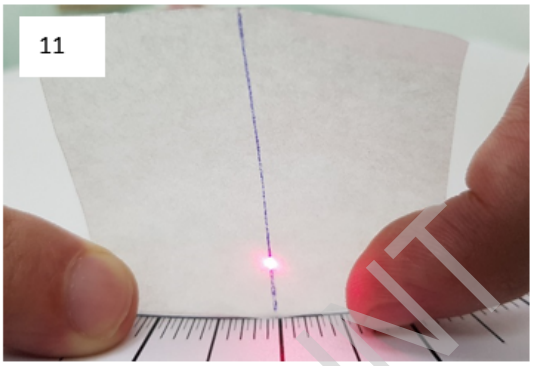


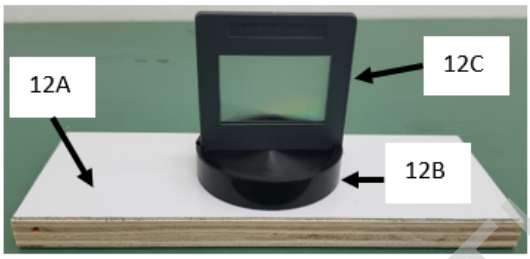


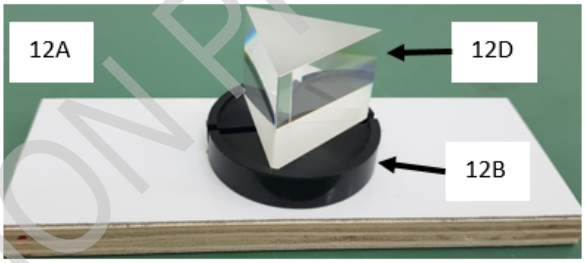


DELEGATION PRINT



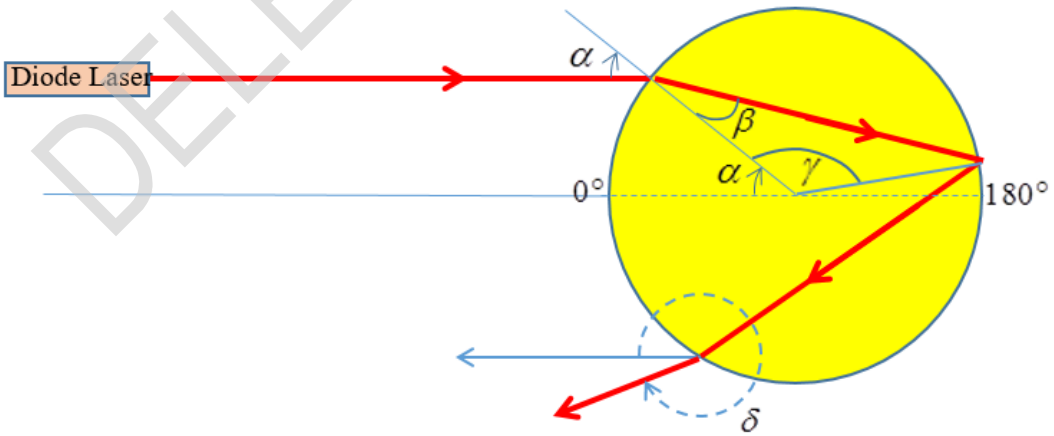






A 部分：圆盘的折射率（5.5 分）

在这部分中，我们将通过观察一束光在圆盘内折射和反射的路径来测量透明圆盘的折射率。



实验的示意图

定义和符号：

DELEGATION PRINT

α	入射光束照射圆盘的入射角
$2\Delta\alpha$	入射角的角度宽度，即入射角的角度有一定取值范围，这一范围的宽度。
β	圆盘内的折射角
γ	$= 180^\circ - 2\beta$
n	圆盘材料的折射率
N	光束从圆盘出射到空气中之前打到圆盘边界上的次数（在示意图中，$N = 3$）
δ	顺时针测量入射光束反方向与出射光束方向之间的角度（角度 δ 在 $N = 3$ 的情况下见示意图）
$2\Delta\delta$	δ 的角展宽

角度 α, β 和 δ 之间的关系为:

$$\delta = 2\alpha + (N-1)(180^\circ - 2\beta)\,. \tag{1}$$

你可直接利用这个关系式，无需推导。

为了调控激光相对圆盘的入射角，将导轨用胶带固定在桌面上，想办法调节在导轨上的激光，使你容易测量激光束相对圆盘的入射角。然后用胶带将暴露的木质底座的边角和桌子粘连起来，将圆盘固定到桌子上。用金属杆 4C 可调节光束竖直倾斜度。

激光器可以设置为两个不同的高度：Part A 用低位；Part B、Part C 用高位。

激光光束的偏振已被调成 S 偏振（使反射光较强的偏振）。**不要改变入射光束的偏振**（不要沿光束轴旋转激光）!

A.1 绘制测量系统的示意图，显示导轨滑块、圆盘和激光光束的路径。指出入射角 α。进行一系列入射角度 $15^\circ \le \alpha \le 75^\circ$, 之间的测量，并在表 1 记录下 $\alpha, \Delta\alpha, \delta, \Delta\delta$。
注意：对于测量 δ ，直接用圆盘上刻度测量 $\delta/2$ 更方便。 1.0pt

A.2 使用上一步的测量值，绘制适当的图形，从中可以得到折射率 n 和误差 Δn 。如果你需要计算其他量，将计算的值填在表 1 的空列中。求出 n 和 Δn。 1.0pt

A.3 对于在 A1 中完成的测量，绘制 δ 作为 α 函数的图。图中每个测量点用误差棒标记 $\Delta\delta$ 和 $\Delta\alpha$ 值。进行额外测量以准确地找到 δ 的最小值和对应的 α 。用 $\delta_{\min}$ 和 $\alpha_{\min}$ 来表示它们。.
为了最准确地识别最小点，你可以用工作间的墙壁作为出射光束的观测屏幕。 0.5pt

第二种测量折射率的方法

在本节中，你要采用另一种方法来进行非常精确的测量。尽管你被要求得到尽可能高的精度，但**你不需要做误差计算。** 然而，你需要详细列出用于获得结果的推导过程。把它们写在答题纸上。

A.4 根据你在 A.3 中获得的数据图的走势，选择最佳的入射角度进行测量得到折射率。写下使用新方法用来获得折射率的方程。 0.7pt

REFLECTION PRINT

A.5 对于 $N = 3$, 使用 A.4 中开发的方法，完成必要的测量 (measurements) 来高精度计算折射率 0.8pt

- 绘制圆盘和光束路径的示意图，并在图中指出你测量的那些量。
- 记录你的测量值 (measurements)。
- 对测量值进行分析并尽可能高精度地计算圆盘的折射率 n。如果需要，你可以使用额外提供的绘图页。

A.6 对于 $N = 4$ 和 $N = 5$ 的情况，重复前面的工作过程（无需绘制系统和光束路径的示意图)。 1.5pt

- 记录你在 $N = 4$ 时 进行的测量。
- 对 $N = 4$ 的测量值 (measurements) 进行分析，并使用这些测量值尽可能地高精度计算折射率 n。
- 记录你在 $N = 5$ 时 进行的测量。
- 对 $N = 5$ 的测量值进行分析，并使用这些测量值 (measurements) 尽可能地高精度计算折射率 n。
- 从 $N = 3$，$N = 4$ 和 $N = 5$ 时得到的折射率结果，计算折射率的平均值 $\langle n \rangle$。

B 部分：衍射光栅的参数（2.5 分）

这一部分不必进行误差分析。

在本节中，我们要找到比值 λ/d，其中 λ 是激光的波长，d 是光栅常数（相邻狭缝之间的距离)。

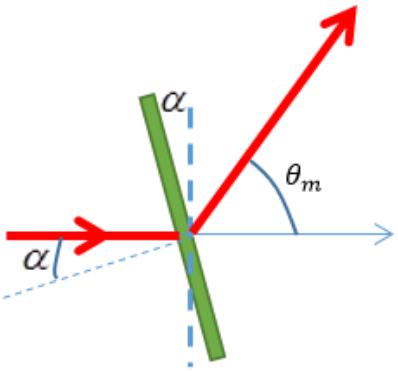
当激光束穿过衍射光栅，入射光方向和最大强度（m 级主极大）的方向之间的角度 θ_m 由下式给出：

$$d \cdot \Big(\sin\ \alpha + \sin(\theta_m - \alpha)\Big) = m\lambda \tag{2}$$

这里

m	衍射级数
α	入射光束与光栅之间的入射角
θ_m	光束的原始入射方向与 m 级衍射主极大方向之间的角度
d	光栅常数 - 光栅中相邻狭缝中心之间的距离

DELEGATION PRINT



高衍射级数的光可以更好地区分不同波长的光。因此，使用高衍射级的光可精确测量 λ/d，减小它的相对误差。

松开螺钉 4B 并改变激光器的垂直高度，将激光器绕垂直于光束的水平轴旋转 180 度（小心连着的电线）到 3B 所示的状态。这使你能够进行 B 部分和 C 部分。使用金属条 4C 可对激光束进行微调，使它传播方向的高度与衍射光栅测量装置的高度对齐。对准激光束使其垂直于观测屏幕。将衍射光栅放在指定的支架 12B 的槽中。衍射光栅的取向由贴在光栅一侧的标签来表示。确保带有标签的光栅侧面朝向激光器，并使标签位于光栅顶部。每个光栅都有一个唯一的 ID，写在标签上。**在答题纸的对应框中写下光栅的 ID 。**

在整个 B 部分，你可能会用到与 A 部分后半部分相似的方法。

B.1	· 在答题纸上画出装置图。在图中标出桌子上的激光、衍射光栅、光束的路径，光束打到观测屏的各点，以及你要测量的各量。 · 利用 1 级衍射光 $m=1$ 进行测量。记下你测量的值。计算出比值 λ/d。 · 利用 2 级衍射光 $m=2$ 进行测量。记下你测量的值。计算出比值 λ/d。	0.7pt

B.2	利用更高的衍射级（$m>2$）获得比值 λ/d。 · 在答题纸上，画出两个装置图，对应 $m=3$ 和 $m=4$ 时的情形。在图中标出激光，衍射光栅，光束的路径，光束打到观测屏的各点，以及你要测量的各量。 · 分别对 $m=3,4$ 进行测量。记下你测量的值。对于每个 m，给出测量的比值 λ/d。	1.8pt

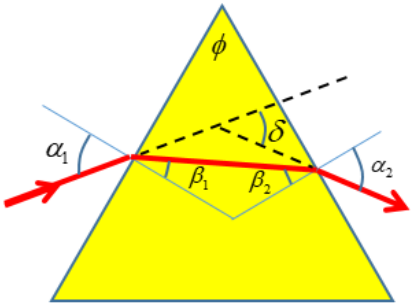
DEFGTO PRINT

C 部分：三棱镜的折射率（2.0 点）

一个近似等边的三棱镜。棱镜的表面很平、且高度抛光。棱镜的角度可能偏离 60° 但不会超过 0.7°。你不用测量棱镜的各角度。本节的目的是测量棱镜所用材料的折射率。为降低折射率的误差，可以通过使用小角度近似（$\sin x \approx x$，$\cos x \approx 1$，x 以弧度为单位）来修正棱镜角度的微小偏差。在本节中，**你需要做误差计算**。下图给出了一条光线通过一个面进入棱镜后从另一个面出射的例子。

Q1-7

Chinese (China)



将滑轨放在桌子上合适的位置，使用激光来让你的测量达到最高精度。将棱镜放在指定的支架 12B 中。

C.1 在对称的情况下，$\alpha_1 = \alpha_2$，对等边三角棱镜有下面的关系：$n = 2\sin(\delta_{\text{sym}}/2 + 30^\circ)$. 0.4pt

- 开发一种方法以尽可能高精度地测量棱镜的折射率。
- 在答题纸上，给出用于得到折射率的详细过程。

C.2

- 在答题纸上，记录你所测量的量及其数值（包括误差）。 1.6pt
- 计算棱镜对激光波长的折射率，及该值的误差。

DELEGATION PRINT

Experiment

Q2-1

Chinese (China)

维德曼-夫兰兹定律（Wiedemann-Franz Law）

在金属中，热量主要通过电子传导。因此，热导率和电导率是相关的。这被称为 Wiedemann-Franz 定律。

本实验的目的是以合理的高精度测量几种金属的热学和电学特性。在 Part A 中，测量紫铜 (Copper)、黄铜 (Brass) 和铝 (Aluminum) 的电导率。在 Part B 中，测量紫铜的热导率。在 Part C 中，测量紫铜的热容量。在 Part D 中，测量黄铜和铝的热导率。最后，在 Part E 中，将验证金属的这些物理性质之间的普适关系。

本实验不计算不确定度。

注意在 Part B 和 Part D 中各有一个 **15 分钟**的等待时间。请安排好你的时间。

DELEGATION PRINT

安全提示

请勿将任何导线或未被允许的装置直接连接到 220V/25A 电源插座。只允许将提供的电源转换器连接到 220V 电源插座。

设备清单



图 1

1. **紫铜**空心圆管，长 200.0 毫米，内孔直径 6.0 毫米，外直径 **20.0 毫米**。
2. **黄铜**中空圆管，长 200.0 毫米，内孔直径 6.0 毫米，外直径 **19.0 毫米**。
3. **铝质**空心圆管，长 200.0 毫米，内孔直径 6.0 毫米，外直径 **20.0 毫米**。
4. 质量为 1.2 克的小磁铁。
5. 储水器—一种特别设计的用于制作以色列当地糕点的锅。锅盖内有热交换器，盖顶有螺钉。提供有 4 升纯净水（2 瓶 X2 升/瓶），用于装满储水器。
6. 杆 #1：直径为 20.0 mm 的紫铜杆，带着多个温度传感器 (已连接到测试插口) 和一个加热器 (连接到红色导线)，见图 2.a。红色导线用于通过电路连接直流电源 (下面 15 号)。杆外覆盖有黑色绝热泡沫。

7. 杆 #2：直径 20.0 mm 的复合杆，带着多个温度传感器 (已连接到测试插口) 和一个加热器 (连接到红色导线)，见图 2.b。红色导线用于通过电路连接直流电源 (下面 15 号)。杆外覆盖有黑色绝热泡沫。
8. 绝热盖。
9. 数字读数盒的 12V 直流电源。
10. 数字读数盒。盒子可显示八个温度传感器的读数和时间，请参阅下面的说明。这个盒子也可用作秒表。
11. 温度传感器测试线，用于连接杆上的温度传感器和数字读数盒。
12. 电压表-功能应设置为 20 伏直流电压（图 3）。
13. 电流表-功能应设置为 10 安培直流电流（图 3）。
14. 导线。
15. 加热器的 9V 直流电源，用香蕉插头连接。

警告：1. 只能将提供的电源（带标准插头）连接到市电电源插座。严禁把导线或者其他仪器直接连接市电电源插座，它可能引起严重的伤害。

2. 不要把杆浸没入水中。

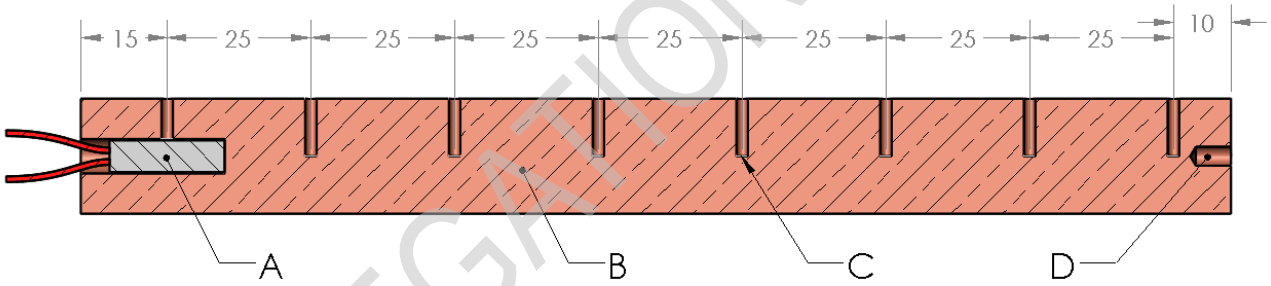


图 2.a - 杆 #1 的示意图.

单位为 mm，精度为 0.1mm。

(A) 加热器，连接有红色导线。(B) 紫铜杆。(C) 8 个温度传感器，每个用圆形切口标示，其中一个被箭头所指。

(D) 螺纹孔，用于连接储水器盖上的螺钉

DELEGATION PRINT

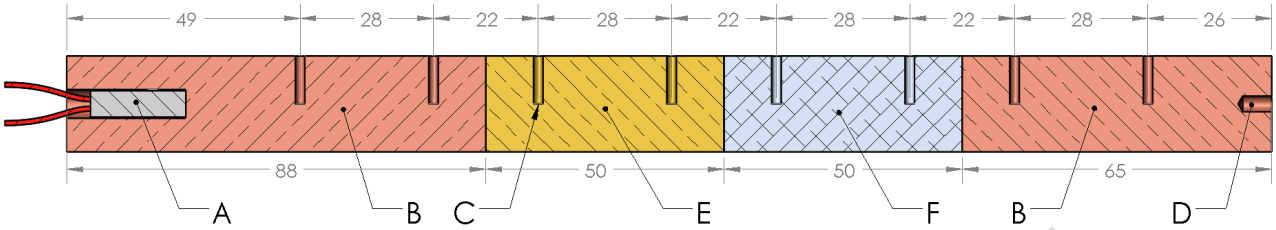


图 2.b- 杆 #2 的示意图.

单位为 mm，精度为 0.1mm。

(A) 加热器，连接有红色导线。(B) 紫铜杆。(C) 8 个温度传感器，每个用圆形切口标示，其中一个被箭头所指。(D) 螺纹孔，用于连接储水器盖上的螺钉。(E) 黄铜杆。(F) 铝杆。

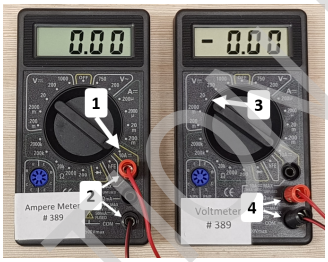


图 3 -电流表和电压表

(1) 实验中使用的 10A 功能档的位置。(2) 电流功能的接线孔。

(3) 实验中使用的 20V 功能档的位置。(4) 电压功能的接线孔。

数字读数盒使用说明

将数字读数盒连接到 12V DC 电源。

数字读数盒有两种工作模式：秒表和温度读数。当用测试线将温度传感器和盒子连接时，盒子将自动切换到温度读数模式。当传感器测试线断开时，盒子将自动切换到秒表模式，屏幕显示“Timer mode”。

在温度模式下：

- 按住红色按钮 3 秒钟可重置时间。
- 短暂按下红色按钮可保持 (hold) 读数显示（盒子仍在计时，但不显示）。
- 再次按下红色按钮可恢复温度和时间的实时显示。

在秒表模式下：

- 按下红色按钮开始计时。
- 再按一次停止计时。
- 长按将秒表置零。

DELEGATION PRINT

数字读数盒连接到每根杆后必须先校准再测试。实验中使用的温度传感器并不完全相同。因此，需要进行校准，使得处于热平衡状态的杆的所有温度传感器的读数相同。校准步骤为：首先将温度传感器测试线的一端连接到杆上；然后，按住红色按钮的同时将测试线的另一端连接到盒子。断开盒子的电源或测试线不会擦除校准结果。

警告：必须先进行校准，然后才能将杆连接到储水器或将其上的加热器连接到电源。以保证校准时杆的温度均匀。

如果你用读数盒时遇到任何问题，你会发现断开电源然后再重新连接电源是有用的。读数盒会记着上次的校准结果。

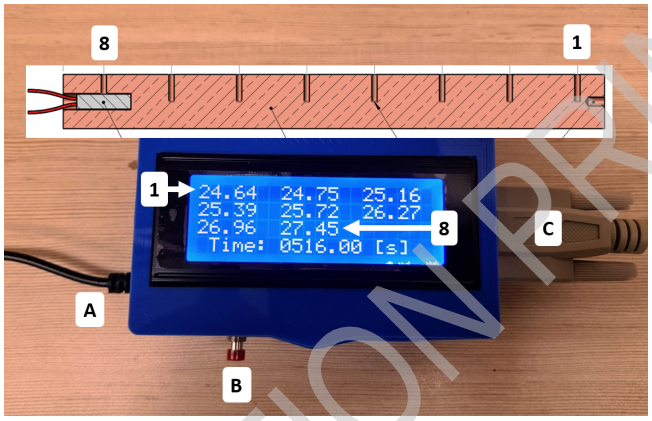


图 4-读数盒

（A）12V 直流电源线。（B）红色多功能按钮。
（C）温度传感器测试线。（1-8）一行一行的温度读数，单位为摄氏度。图显示的是横向顺序。

Part A：紫铜，铝和黄铜的电导率（1.5 分）

原理

当一块永磁铁在空心圆管内下落时，会感应出涡流，磁铁会受到耗散力。因此，磁铁达到一个收尾速度。对于这样的模型，收尾速度可表示为：

$$v_{terminal} = \frac{8\pi mga^2}{\mu_0^2(\pi r_m^2 M)^2 \sigma w f\left(\frac{d}{a}\right)}. \tag{1}$$

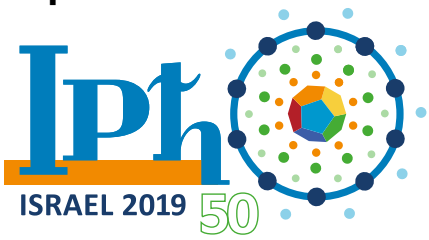
这里 m 是磁铁的质量，σ 是管的电导率，a 是管的内半径，r_m 和 d 分别是磁铁的半径和高度，M 是磁铁的剩余磁化强度，w 是管壁的厚度，$f\left(\frac{d}{a}\right)$ 是标度函数。在本实验中，$a \approx r_m$，$d = 2r_m \approx 2a$，和 $f(2) \approx 1.75$。因此，该磁铁下落通过管子所需的时间可近似为：

$$t = 0.22\frac{\pi r_m^2 (\mu_0 M)^2 w L_0}{mg}\sigma. \tag{2}$$

这里 $L_0 = 0.2$ m 是管的长度。我们假设磁铁释放后立即到达收尾速度。

计算所需的管和磁铁的参数为：

DELEGATION PRINT



Q2-5

Chinese (China)

$\mu_0 M = 0.65\,\mathrm{T}$, $w_{\mathrm{Aluminum}} = w_{\mathrm{Copper}} = 7.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, $w_{\mathrm{Brass}} = 6.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, $m = 1.2\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $r_m = 3.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

DELEGATION PRINT

实验

A.1	使用数字读数盒的秒表模式，测量磁铁穿过铝 (Aluminum)、紫铜 (Copper) 和黄铜 (Brass) 管所需的时间。在表 A1 中记录你的那些测量值。	1.0pt

A.2	利用上面的公式计算这三种材料的电导率 $\sigma_{\text{Aluminum}}, \sigma_{\text{Copper}}, \sigma_{\text{Brass}}$。	0.5pt

Part B：紫铜的热导率（3.0 分）

本节的目的是测量接近稳态的紫铜的热导率。

原理

热导率 κ 由公式 $P(x) = -\kappa A \cdot \frac{\Delta T(x)}{\Delta x}$ 定义。该公式描述了温度梯度与流过材料横截面的功率之间的线性关系。这里，$P(x)$ 是流过杆的位于 x 处的横截面的功率，A 是杆的横截面积，$\Delta T(x)/\Delta x$ 是 x 处的温度梯度。

实验

将数字读数盒连接到杆 1 的温度传感器插口，并对杆 1 进行校准。将 4 升（2 瓶）水倒入锅中，使热交换器完全浸没，盖上锅盖。

B.1	记下杆 1 放在桌子上时的初始温度。	0.1pt

断开测试线与杆的连接。去掉绝热盖，把杆 1 安装到锅盖上。将测试线重新连接到杆上，如图 5 所示。注意不要施加太大的力矩。



图 5

B.2	画出为加热器供电并测量功率的电路图。你的电路图应包含以下内容：9V 电源，加热器（已连接到杆上），电压表，电流表和导线。你可以将导线作为开关来打开和关闭电路。	0.5pt

DELEGATION PRINT

可以这样来测量热导率，即在杆的一端加热，同时杆的另一端保持与储水器几乎恒定的温度。

我们的目标是所有温度传感器都近似接近稳定状态。连接 B.2 小题的电路，给加热器通电。

B.3	进行适当的测量以计算给电热器供电的功率 P，写在答题纸上。	0.1pt

通电后等待 15 分钟（你可以利用这段时间来计划你的实验）。

B.4	在提供的表格中，记下所有八个温度传感器在大约以下时间的温度：15 分钟，17.5 分钟，20 分钟。	0.5pt

B.5	在一张作图纸上，画出三个不同测量时间的温度与位置的关系图。这些图也将用于 Part D。	1.0pt

B.6	利用上面约 17.5 分钟时的数据图，求出紫铜的热导率 κ_0。在这部分忽略所有热量损耗。估算 17.5 分钟时的棒的平均温度变化率 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$。	0.5pt

B.7	与 κ 的实际值相比，你的 κ_0 值是高了，低了，还是相同？	0.3pt

Part C：估算紫铜的热量损耗和热容量（4.0 分）

原理

热容量 C 可由以下两式中的任一式来定义：

$$\Delta Q = C\Delta T, \qquad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right). \tag{3}$$

其中，$\Delta Q/\Delta t$ 是传给材料的净传热速率，$\Delta T/\Delta t$ 是温度变化率。比热 c_p 是单位质量的热容量。紫铜棒的质量为 0.58 kg。

实验

关闭加热器电源。断开电路，拧下杆 1，放在桌子上。正如在实验开始时看到的那样，把绝热盖装在杆的头上。重新连接加热器电路，并将杆重新连接到数字读数盒上。

警告：在本部分中，请勿在没有监控温度的情况下让加热器长时间开着。

利用冷却-加热-再冷却这样的一个过程，我们可以得到材料的热量损耗和热容量。在加热阶段，平均温度的改变量应为约 2.5°C。为了达到本部分实验所需的精度，应使冷却-加热-再冷却过程的总时长为 10-15 分钟。

这里，我们的目标是在 Part B 中稳态下测量的平均温度值附近做实验。

为了考虑杆中储存的所有热能，我们需要跟踪测量其平均温度。平均温度的一个好的测量近似是杆的中心位置的温度。

C.1	在一次冷却-加热-冷却的过程中，在表 C1 中记录测量结果，并计算杆的平均温度。	1.0pt

DELEGATION PRINT

C.2	在作图纸上画出杆的平均温度随时间的变化图。	1.0pt

C.3	利用上图计算比热 c_p 和单位时间的热量损耗 P_{loss}（在 Part B 的平均温度附近）。用示意图和方式描述你的方法。	1.0pt

为了提高在 Part B 中得到的热导率的精度，需要考虑两种主要机制：

- 通过绝缘泡沫的径向的热传递导致的热量损耗。
- 在测量时系统并未达到稳态。

作为一阶近似，可以假设由于这些机制，沿着杆的单位长度的功率流的变化，$\Delta P\left(x\right)/\Delta x$，是恒定的。

C.4	同时考虑上述两种机制，写出 Part B 中的热导率修正到一级近似的表达式。利用 Part B 和 C 中的 $\kappa_0, P, c_p, m, P_{\text{loss}}, \frac{\Delta T}{\Delta t}$ 来表示修正后的热导率 κ_{Copper}，并计算它的值。	1.0pt

Part D：黄铜和铝的热导率（1.0 分）

将绝热杆 2 连接到数字读数盒上，并按 Part B 开头的说明校准该杆中的温度传感器（按下红色按钮的同时，用测试线将温度传感器连接到读数盒上）。

D.1	把杆放在桌子上，记下它的初始温度。	0.1pt

断开测试线，将杆 2 拧在储水器盖上，如图 5 所示。将测试线重新连接到读数盒上。

重复 B 部分中的步骤，加热使其接近稳态。

给加热器供电，至少等待 **15 分钟**再进行测量。

为了达到此部分所要求的精度，你可以假设杆处于稳定状态。此外，你可以假设杆上单位长度的热量损失是恒定的。

D.2	记下杆 2 中所有八个温度传感器的温度读数，并计算每一段的 $\Delta T/\Delta x$。	0.2pt

作为一级近似，你可以使用与 C.4 小题相同的假设，即，$\Delta P\left(x\right)/\Delta x$ 是恒定的。

D.3	利用之前的测量结果，写出 κ_{Brass} 和 κ_{Aluminum} 的表达式，并计算它们的数值。	0.7pt

Part E：Wiedemann-Franz 定律（0.5 分）

Wiedemann-Franz 定律指出，在金属中，热传导由电子主导，其热导率和电导率之比与绝对温度成线性关系。此外，该定律指出这种线性关系的斜率 $L=\frac{\kappa}{\sigma T}$（称为“Lorenz 数”）对大多数金属来说是相同的，仅取决于自然界的普适常数。实际上，对于室温下的金属，该定律的误差大约为 10%。

E.1	在表 E1 中记下你求出的热导率、电导率（κ, σ）。对每种材料，计算 L 的值，并将其写入同一个表 E1 中。计算时假设在一级近似下热导率不依赖于温度。	0.5pt

DELEGATION PRINT

Zero-length springs and slinky coils – Solution

Part A: Statics

A.1 The force F causes the spring to change its length from L_0 to L. Since equal parts of the spring are extended to equal lengths, we get: $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{L}{L_0} \rightarrow \Delta y = \frac{L}{L_0}\Delta l$.

Since $L = \max\left\{\frac{F}{k}, L_0\right\}$, we get $\Delta y = \max\{\frac{F}{kL_0}\Delta l, \Delta l\}$. From this result we see that any piece of length Δl the spring behaves as a ZLS with spring constant $k^* = k\frac{L_0}{\Delta l}$.

A.2 Let us compute the work of the force. From Task A.1: $dW = F(x)dx = \frac{kL_0}{\Delta l}xdx$.

Hence, $\Delta W = \int_{\Delta l}^{\Delta y}\frac{kL_0}{\Delta l}xdx = \frac{kL_0}{\Delta l}\frac{x^2}{2}\Big|_{\Delta l}^{\Delta y} = \frac{kL_0}{2\Delta l}(\Delta y^2 - \Delta l^2)$.

A.3. At every point along the statically hanging spring the weight of the mass below is balanced by the tension from above. This implies that at the bottom of the spring there is a section of length l_0 whose turns are still touching each other, as their weight is insufficient to exceed the threshold force kL_0 to pull them apart. The length l_0 can be derived from the equation: $\frac{l_0}{L_0}Mg = kL_0$, hence $l_0 = \frac{kL_0^2}{Mg} = \alpha L_0$.

For $l > l_0$, a segment of the unstretched spring between l and $l + \mathrm{d}l$ feels a weight of $\frac{l}{L_0}Mg$ from beneath, which causes its length to stretch from $\mathrm{d}l$ to $dy = \frac{F}{kL_0}dl = \frac{l}{L_0}Mg\frac{dl}{kL_0} = \frac{Mg}{kL_0^2}ldl = \frac{l}{l_0}dl$.

Integration of the last expression over the stretched region, up to the point L_0, gives its height when the spring is stretched

$$H = l_0 + \int_{l_0}^{L_0}\frac{l}{l_0}dl = l_0 + \frac{l^2}{2l_0}\Big|_{l_0}^{L_0} = l_0 + \frac{1}{2l_0}(L_0^2 - l_0^2) = \frac{L_0^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} = \frac{L_0}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Part B: Dynamics

B.1. From Task A.3 we have $H(l) = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$. We now calculate the position of the center of mass of the suspended spring. The contribution of the unstretched section of height l_0 at the bottom, having a mass of $\frac{l_0}{L_0}M = \alpha M$, is $\alpha M \frac{l_0}{2}$. The position of the center of mass is obtained by summing the contributions of its elements:

$$H_{cm} = \frac{1}{M}\left[\frac{l_0}{2}\alpha M + \int_{l_0}^{L_0} H(l)dm\right] = \frac{1}{M}\left[\frac{\alpha L_0}{2}\alpha M + \int_{l_0}^{L_0}\left(\frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}\right)\frac{Mdl}{L_0}\right]$$
$$= \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0}\left[\frac{l^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2}l\right]_{l_0}^{L_0} = \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0}\left[\frac{L_0^3 - l_0^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2}(L_0 - l_0)\right]$$

Where we have used $dm = \frac{dl}{L_0}M$. Substituting $l_0 = \alpha L_0$ yields

$$H_{cm} = L_0\left[\frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2}\right]$$

When the spring is contracted to its free length L_0, its center of mass is located at $\frac{L_0}{2}$. From the falling of the center of mass at acceleration g we get:

$$\frac{g}{2}t_c^2 = H_{cm} - \frac{L_0}{2} = L_0\left[\frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{L_0}{6\alpha}(1-\alpha)^3$$

Hence, $t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}(1-\alpha)^3}$.

For $k = 1.02$ N/m, $L_0 = 0.055$ m, $M = 0.201$ kg, and $g = 9.80$ m/s², we have $\alpha = 0.0285$, and $t_c = 0.245$ s.

B.2. The moving top section of the spring is pulled down by its own weight, $m_{top}g = Mg\frac{(L_0 - l)}{L_0}$ and also by the tension in the spring below, which is equal to the weight Mgl/L_0 of the stationary section of the spring. Thus, the moving top section experiences a constant force $F = Mg$ throughout its whole fall. Another way to see that, is that a total force of Mg is exerted on the spring, but only the moving part experiences it. Let's calculate the position of the center of mass at equilibrium of the upper part, i.e., all points with $l' > l$ for some $l > l_0$. From part A,

the position of a small portion $\Delta l'$ with coordinate l' is: $H(l') = \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$ and the center of mass of this part is:

$$H_{cm-upper-i} = \frac{L_0}{M(L_0-l)}\int_l^{L_0} H(l')dm = \frac{L_0}{M(L_0-l)}\int_l^{L_0}\left(\frac{l'^2}{2l_0}+\frac{l_0}{2}\right)dm$$
$$= \frac{L_0}{M(L_0-l)}\int_l^{L_0}\left(\frac{l'^2}{2l_0}+\frac{l_0}{2}\right)\frac{Mdl'}{L_0} = \frac{1}{(L_0-l)}\int_l^{L_0}\left(\frac{l'^2}{2l_0}+\frac{l_0}{2}\right)dl'$$
$$= \frac{1}{(L_0-l)}\left[\frac{l'^3}{6l_0}+\frac{l_0 l'}{2}\right]_l^{L_0} = \frac{L_0^2+L_0 l+l^2}{6l_0}+\frac{l_0}{2}$$

The position of the upper part of CM when it contracts to a length $L_0 - l$ is $H_{cm-upper-f} = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} + \frac{1}{2}(L_0 - l)$. The change in the CM during the contraction process is: $\Delta H_{cm-upper} = H_{cm-upper-i} - H_{cm-upper-f} = \frac{L_0^2+L_0 l-2l^2}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l) = \frac{(L_0-l)(L_0+2l)}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l)$.

The acceleration of the CM of the upper part is $a_{CM} = \frac{FL_0}{M(L_0-l)} = \frac{gL_0}{L_0-l}$.

From the work energy theorem we get the equation $v^2_{upper-f} = 2a_{CM}\Delta H_{cm-upper}$, hence

$$v^2_{upper-f} = 2\frac{gL_0}{L_0-l}\left[\frac{(L_0-l)(L_0+2l)}{6\alpha L_0} - \frac{1}{2}(L_0-l)\right] = 2g\left[\frac{L_0+2l}{6\alpha} - \frac{1}{2}L_0\right]$$
$$= \frac{2g}{3\alpha}l + \left(\frac{1}{3\alpha}-1\right)gL_0$$

Therefore, $A = \frac{2g}{3\alpha}$ and $B = \left(\frac{1}{3\alpha}-1\right)gL_0$.

Note that for $l = L_0$, we have $v^2_{upper-f} = L_0 g\frac{1-\alpha}{\alpha}$ and for $l = l_0 = \alpha L_0$, we get $v^2_{upper-f} = L_0 g\frac{1-\alpha}{3\alpha}$, hence, the moment we release the spring its velocity is finite (not zero, the meaning is that it accumulate this velocity in time that is much shorter than the contracting time t_c) and it decreases to $\frac{1}{\sqrt{3}}$ of the initial value when $l = l_0$.

B.3. Note that even though the center of mass of the spring accelerates downwards constantly, the moving top section actually decelerates, while the position of the center of mass moves down the spring. The speed of the top section $v(l)$, calculated in Task B2, decreases and

approaches the value $\sqrt{A\alpha L_0 + B}$ immediately before it attaches to the bottom section of height $l_0 = \alpha L_0$, which was unstretched and at rest. Once the moving top section attaches to the resting bottom section, its momentum is shared between both sections, so the speed further decreases just before the whole spring starts accelerating downwards as a single mass. Thus, the minimum speed is that of the whole spring immediately after its full collapse. From momentum conservation, we have

$$Mv_{min} = m_{top}v(l_0) = M\left(1 - \frac{l_0}{L_0}\right)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

$$v_{min} = (1-\alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Part C: Energetics

C.1. From the moment the spring is released, the acceleration of its center of mass is governed by the external force Mg and therefore the gravitational potential energy of the spring is fully converted into the kinetic energy of the center of mass of the spring, which just before hitting the ground is equal to the kinetic energy of the spring.

All that is left is the elastic energy stored in the spring, which is converted into heat, sound, etc. To calculate it, we consider the elastic energy stored in a segment dh of the stretched spring, which when unstretched lies between l and $l + \mathrm{d}l$, using the result of Task A.2, $\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta l}(\Delta l_2^2 - \Delta l^2)$, by choosing $\Delta l = dl$ and $\Delta l_2 = dy$, and using $dy = \frac{l}{l_0}dl$ (which was obtained in Task A.3), we get:

$dW = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl$. Integrating from l_0 to L_0 we find

$$W = \int_{l_0}^{L_0} \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl = \frac{kL_0}{2}\left[\frac{l^3}{3l_0^2} - l\right]_{l_0}^{L_0} = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{L_0^3 - l_0^3}{3l_0^2} - (L_0 - l_0)\right)$$

$$= \frac{kL_0^2}{2}\left(\frac{1-\alpha^3}{3\alpha^2} - (1-\alpha)\right) = \frac{kL_0^2}{6\alpha^2}(1-\alpha)^2(2\alpha+1)$$

$$= MgL_0\frac{(1-\alpha)^2(2\alpha+1)}{6\alpha}$$

The Physics of a Microwave Oven – Solution

Part A: The structure and operation of a magnetron

A.1. The frequency of an LC circuit is $f = \omega/2\pi = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. If the total electric current flowing along the boundary of the cavity is I, it generates a magnetic field whose magnitude (by the assumptions of the question) is $0.6\mu_0 I/h$, and a total magnetic flux equal to $\pi R^2 \times 0.6\mu_0 I/h$, hence the inductance of the resonator is $L = 0.6\pi\mu_0 R^2/h$. Approximating the capacitor as a plate capacitor, its capacitance is $C = \varepsilon_0 lh/d$. Putting everything together, we find

$$f_{est} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{0.6\pi R^2\mu_0}\frac{d}{\varepsilon_0 lh}} = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{R}\sqrt{\frac{d}{0.6\pi l}} = \frac{1}{2\pi}\frac{3\cdot10^8}{7\cdot10^{-3}}\sqrt{\frac{1}{3.6\pi}} = 2.0\cdot10^9$$

Hz

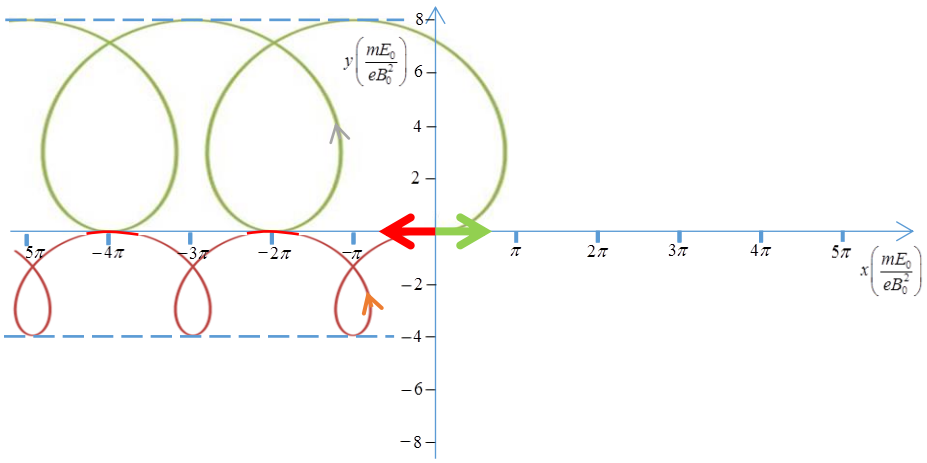
A.2. Denoting the electron velocity by $\vec{u}(t)$, in this case the total force applied on it is

$$\vec{F} = -e(-E_0\hat{y} + \vec{u}(t)\times B_0\hat{z}).$$

Let us write $\vec{u}(t) = \vec{u}_D + \vec{u}'(t)$, with $\vec{u}_D = (-E_0/B_0)\hat{x}$ being the drift velocity of a charged particle in the crossed electric and magnetic fields (the velocity at which the electric and magnetic forces cancel each other exactly). Then $\vec{F} = -e\vec{u}'(t)\times B_0\hat{z}$. Thus, in a frame moving at the drift velocity $\vec{u}_D$, the electron trajectory is a circle with constant-magnitude velocity $u' = |\vec{u}'(t)|$, and radius $r = mu'/eB_0$. In the lab frame this circular motion is superimposed upon the drift at the constant velocity $\vec{u}_D$. Hence:

1. For $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ we find $u' = 4E_0/B_0$ and $r = 4mE_0/eB_0^2$.
2. For $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ we find $u' = 2E_0/B_0$ and $r = 2mE_0/eB_0^2$.

This information, together with the independence of the period of the circular motion on u' allows us to plot the electron trajectory in both cases (green and red, for cases 1 and 2, respectively):



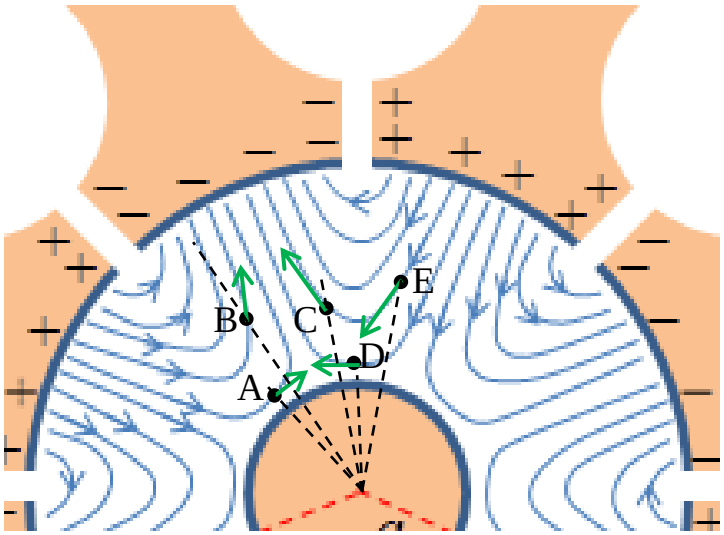
A.3. The velocity of the electron in a frame of reference where the motion is approximately circular is u'. From A.2 we get that $u_D + u' = v_{\max}$ and $u_D - u' = v_{\min}$, hence $u' = (v_{\max} - v_{\min})/2 < v_{\max}$.

The radius of the circular motion of the electron in this frame is $r = mu'/eB_0 < mv_{\max}/eB_0$. The maximal velocity is that corresponding to a kinetic energy, $K_{\max} = mv_{\max}^2/2$, of 800 eV.

Substituting we find $r < \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{e}} = \frac{1}{0.3}\sqrt{\frac{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\cdot 800}{1.6\cdot 10^{-19}}} = 3.18\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 0.3\,\mathrm{mm}$.

Since this maximal radius is much smaller than the distance between the anode and the cathode, we may ignore the circular component of the electronic motion, and approximate it as pure drift.

A.4. As just explained, we may approximate the electron motion as pure drift. In task A.2 we have found that the direction of the drift velocity $\vec{u}_D$ is in the direction of the vector $\vec{E} \times \vec{B}$. Since we are interested in radial component of the drift velocity, the only contribution is from the azimuthal component of the electric field. The static electric field has no azimuthal component, hence the drift in the radial direction results solely from the azimuthal component of the alternating electric field. What we have to check is if the azimuthal component points clockwise or counterclockwise. From the direction of the field lines it is easy to see (attached figure) that in points A and B the azimuthal component pointing clockwise therefore the electrons there drift towards the cathode, while for points C, D and E the azimuthal component points counterclockwise and the electrons there drift toward the anode.



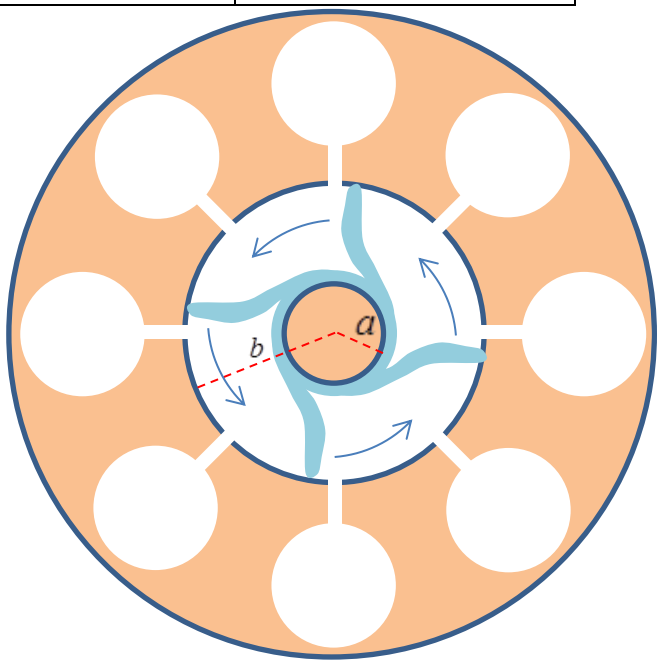
Point	toward the anode	toward the cathode	perpendicular to the radius
A		X	
B		X	

C	X		
D	X		
E	X		

A.5. In this task we need to consider the azimuthal component of the drift velocity, which results from the radial component of the electric field. Since all points are at the same distance from the anode, all electrons experience the same static electric field. Hence only the radial component of the alternating field determines whether the angle between the electrons' position vectors would increase or decrease: If the radial component of the alternating field points inwards (towards the cathode), the azimuthal drift velocity will be positive (counterclockwise) and vice versa. Hence the electrons at A, B and C drift closer to each other in terms of angles, while those at D, E and F drift away from each other.

points	angle decreases	angle increases	indeterminate
AB	X		
BC	X		
CA	X		
DE		X	
EF		X	
DF		X	

A.6. Spokes will be created only in the regions where focusing occurs. By the result of the previous task, there are four spokes, as indicated in the attached Figure.



The electron drift sets the spokes in a counterclockwise rotation. The frequency of the alternating field is $f = 2.45$ GHz. By the time the alternating field flipped its sign (half a period), each spoke moves to the next cavity, corresponding to an angle of $\pi/4$. Therefore, the angular velocity of each spoke is

$\omega = \frac{\pi}{4} / \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} f = 3.85 \cdot 10^9 rad/s$. Each spoke performs a full rotation around the magnetron after four periods of the alternating field.

A.7. The magnitude of the electric field in the region considered, $r = (b+a)/2$, is the magnitude of the static field, that is, $E = V_0/(b-a)$, giving rise to an azimuthal drift velocity of magnitude $u_D = E/B_0 = V_0/[B_0(b-a)]$. Equating u_D/r with the angular velocity found in the previous task we find $V_0 = \pi f B_0(b^2 - a^2)/4$

Part B: The interaction of microwave radiation with water molecules

B.1. The torque at time t is given by $\tau(t) = -qd\sin[\theta(t)]E(t) = -p_0\sin[\theta(t)]E(t)$, hence the instantaneous power delivered to the dipole by the electric field is

$$H_i(t) = \tau(t)\dot{\theta}(t) = -p_0E(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) = E(t)\frac{d}{dt}\left(p_0\cos\theta(t)\right) = E(t)\frac{dp_x(t)}{dt}$$

B.2. Since the average dipole density (hence the average of each molecular dipole) is parallel to the field, the absorbed power density is (angular brackets, $\langle\cdots\rangle$, denote average over time)

$$\left\langle H(t)\right\rangle = \left\langle E_0\sin(\omega_f t)\frac{dP_x}{dt}\right\rangle = \left\langle E_0\sin(\omega_f t)\frac{d}{dt}\left(\beta\varepsilon_0E_0\sin(\omega_f t-\delta)\right)\right\rangle =$$

$$E_0^2\beta\varepsilon_0\omega_f\left\langle\sin(\omega_f t)\cos(\omega_f t-\delta)\right\rangle = 0.5E_0^2\beta\varepsilon_0\omega_f\left\langle\sin\delta+\sin(2\omega_f t-\delta)\right\rangle = 0.5E_0^2\beta\varepsilon_0\omega_f\sin\delta$$

B.3. The energy density of the electromagnetic field at penetration depth z, which is twice the electric energy density, is $2\times\varepsilon_r\varepsilon_0\langle E^2(z,t)\rangle/2 = \varepsilon_r\varepsilon_0E_0^2(z)\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \varepsilon_r\varepsilon_0E_0^2(z)/2$. Therefore, the time-averaged flux density at depth z is:

$$I(z) = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0E_0^2(z)\times\frac{c}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0cE_0^2(z),$$

where c is the speed of light in vacuum. I decreases with z due to the absorbed power calculated in the previous task we find

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\beta\varepsilon_0\omega E_0^2(z)\sin\delta = -\frac{\beta\omega\sin\delta}{c\sqrt{\varepsilon_r}}I(z),$$

hence $I(z) = I(0)\exp[-z\beta\omega\sin\delta/(c\sqrt{\varepsilon_r})]$.

B.4. Similarly to the previous task, the energy flux corresponding to the given field is

$$I(z) = \sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0c\langle E^2(z,t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0cE_0^2e^{-z\omega\sqrt{\varepsilon_r}\tan\delta/c}.$$

Equating the argument of the exponent in the last expression with the result of the previous task, and using the given approximation $\tan\delta \approx \sin\delta$ leads to $\beta = \varepsilon_r$.

B.5.

1. Using previous results, the radiation power per unit area is reduced to half of its $z = 0$ value at $z_{1/2} = c \ln 2 / (\omega \sqrt{\varepsilon_r} \tan \delta) = c \sqrt{\varepsilon_r} \ln 2 / (\omega \varepsilon_l)$. From the given graph, at the given frequency $\varepsilon_r \approx 78$ and $\varepsilon_l \approx 10$, hence $z_{1/2} \approx 12$ mm.

We have just found that the penetration depth is proportional to $\sqrt{\varepsilon_r}/\varepsilon_l$. From the given graph we thus find that:

2. Heating up pure water (continuous lines) decreases ε_l much more significantly than the corresponding decrease of $\sqrt{\varepsilon_r}$ at the given frequency. Thus, the penetration depth of pure water increases with temperature, allowing deeper penetration of the microwave radiation and heating up the water inner regions.

3. On the contrary, for a soup (dilute salt solution, dashed lines) ε_l at the given frequency increases with temperature while ε_r decreases. Thus, the absorption rate increases with temperature, the penetration depth decreases, and less microwave radiation reaches its inner regions.

material	$z_{1/2}$increases with temp.	$z_{1/2}$ decreases with temp.	$z_{1/2}$remains the same
water	X		
soup		X	

Thermoacoustic engine – Solution

Part A: Sound wave in a closed tube

A.1. The boundary conditions are: $u(0,t) = u(L,t) = 0$. As a result, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$, so we get $\lambda_{\text{max}} = 2L$.

A.2. We get

$$V(x,t) = S \cdot \big(\Delta x + u(x+\Delta x,t) - u(x,t)\big) = S\Delta x \cdot (1+u') = V_0 + V_0 u'.$$

Thus,

$$V(x,t) = V_0 + akV_0 \cos(kx)\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = akV_0 \cos(kx).$$

A.3. We use Newton's Second Law $\rho_0 \ddot{u} = -p'$ to deduce $p' = -\rho_0 \ddot{u} = \rho_0 a\omega^2 \sin(kx)\cos(\omega t)$, so that

$$p(x,t) = p_0 - a\frac{\omega^2}{k}\rho_0 \cos(kx)\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad p_1(x) = a\frac{\omega^2}{k}\rho_0 \cos(kx).$$

A.4. Using $a \ll L$, we obtain $\frac{p_1(x)}{p_0} = \gamma\frac{V_1(x)}{V_0}$. As a result, $\frac{\rho_0}{p_0}\frac{\omega^2}{k} = \gamma \cdot k$, and $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$.

A.5. The relative change in $T(x,t)$ is the sum of the relative changes in $V(x,t)$ and $p(x,t)$. As a result,

$$T_1(x) = \frac{T_0}{p_0}p_1(x) - \frac{T_0}{V_0}V_1(x) = (\gamma-1)\frac{T_0}{V_0}V_1(x) = ak(\gamma-1)T_0 \cos(kx).$$

A.6. The movement of the gas parcels inside the tube conveys heat along its boundary. To determine the direction of the convection, we combining the result of Task A.5 and the expression (1) for $u(x,t)$. We see that when $0 < x < \frac{L}{2}$, the gas is colder when the displacement $u(x,t)$ is positive. Likewise, when $\frac{L}{2} < x < L$, the gas is colder when the displacement $u(x,t)$ is negative. Hence, heat flows into the gas near the point B, cooling it down, and out of the gas near the points A and C, heating them up.

Part B: Sound wave amplification induced by external thermal contact

B.1. We get

$$T_{\text{env}}(t) = T_{\text{plate}}\big(x_0 + u(x_0,t)\big) = T_0 - \frac{\tau}{\ell}\cdot u(x_0,t),$$

so that:

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\ell}\sin(kx_0) = \frac{a\tau}{\ell\sqrt{2}}.$$

B.2. The gas will convey heat from the hot reservoir to the cold one if the parcels are colder than the environment when $u(x_0,t) < 0$, and hotter when $u(x_0,t) > 0$. This occurs precisely if

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

Plugging in the results of Tasks A.5 and B.1, we get

$$\frac{a\tau_{\text{cr}}}{\ell}\sin(kx_0) = ak(\gamma-1)T_0\cos(kx_0) \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{cr}} = k\ell(\gamma-1)T_0.$$

B.3. Using the first law of thermodynamics, we get

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt}.$$

Plugging in the relation $E = \frac{1}{\gamma-1}pV$, we see that:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(pV) + p\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\gamma-1}V\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\frac{dV}{dt} \approx \frac{1}{\gamma-1}V_0\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0\frac{dV}{dt}.$$

B.4. We plug the expression for $\frac{dQ}{dt}$ into the result of Task B.3. This gives:

$$\frac{1}{\gamma-1}V_0\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0\frac{dV}{dt} = \beta V_0(T_{\text{st}} - T_1)\cdot\cos(\omega t).$$

We now plug in the data given in equation (6), and get (by considering terms with $\cos(\omega t)$ and $\sin(\omega t)$ separately):

$$\frac{1}{\gamma-1}V_0p_a\omega + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0V_a\omega = \beta V_0(T_{\text{st}} - T_1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1}V_0p_b\omega - \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0V_b\omega = 0$$

and thus, we can already express V_b as

$$V_b = \frac{1}{\gamma}p_b\cdot\frac{V_0}{p_0}.$$

For V_a, we plug in the results of Tasks B.1 and B.2,

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\ell\sqrt{2}}(\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

giving:

$$V_a = \left(-\frac{1}{\gamma}p_a - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\beta}{\omega}\frac{a}{\ell\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\text{cr}})\right)\cdot\frac{V_0}{p_0}.$$

B.5. We want to integrate the mechanical work generated, $\int pdV$, and averaging the result over a long time. To do this, we substitute our expressions (6) for the perturbed p and V. Since the average of $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ is 0, and that of $\sin^2(\omega t)$ and $\cos^2(\omega t)$ is $\frac{1}{2}$, we get:

$$\frac{V_0}{S\ell}W_{\text{tot}} = -\pi\cdot(p_aV_b + p_bV_a).$$

Using the result of B.4, we get

$$\frac{V_0}{S\ell}W_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\omega}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\beta\frac{a}{\ell\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\text{cr}})\cdot V_0\frac{p_b}{p_0}.$$

To leading order, p_b is the unperturbed wave $p_b \approx p_1(x_0) = a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos(kx_0) = ak\gamma p_0\frac{1}{\sqrt{2}}$. Simplifying, we get

$$W_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\omega}S\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\beta\frac{a}{\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\text{cr}})\cdot\frac{p_b}{p_0} = \frac{\pi}{2\omega}(\gamma-1)\beta(\tau-\tau_{\text{cr}})ka^2S.$$

B.6. We want to compute the amount of heat convection over one cycle. This means that we need to take the amount of heat moving in or out of the parcel, and weigh it by the position of the parcel at that time. Thus, the total heat conveyed by the parcel, integrated along a cycle, is:

$$Q_{\text{tot}} = \frac{1}{\Delta x}\int\frac{dQ}{dt}u\cdot dt.$$

This expression can be computed to leading order using $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0(T_{\text{st}}-T_1)\cdot\cos(\omega t)$ and the unperturbed displacement $u(x_0,t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\omega t)$. This gives

$$Q_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\omega}\beta V_0(T_{\text{st}}-T_1)\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\omega}\beta V_0\cdot\frac{a}{\ell\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\text{cr}})\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\omega}\beta(\tau-\tau_{\text{cr}})\frac{a^2S}{\ell}.$$

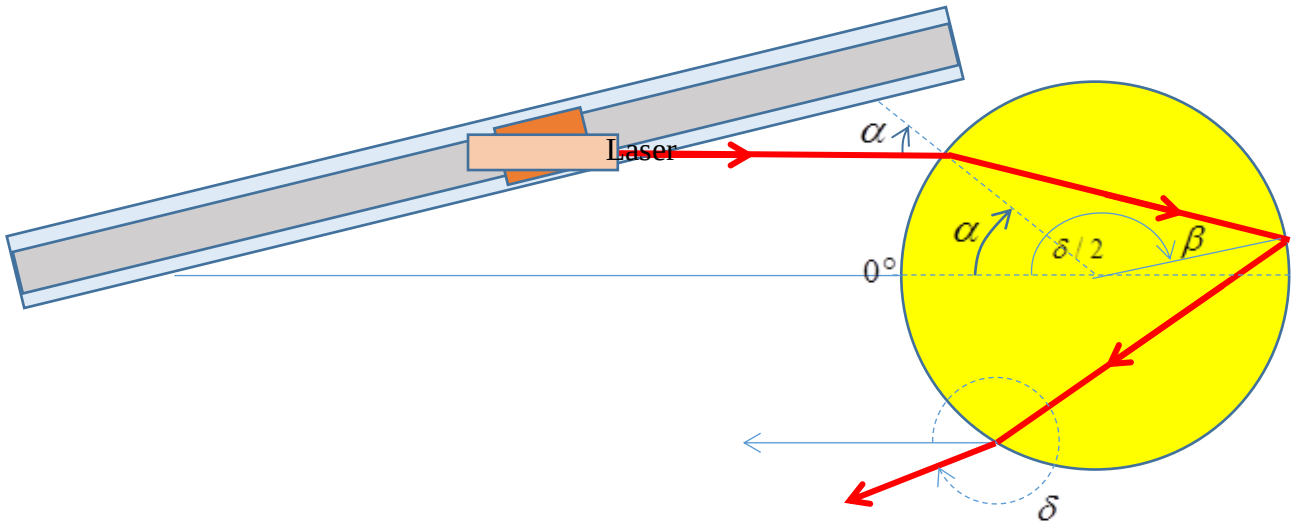
B.7. Dividing the results of Tasks B.5 and B.6, we obtain the expression:

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma-1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0} = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau}\cdot\frac{\tau}{T_0} = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau}\cdot\eta_c.$$

Optical Measurements – Solution

Part A: The refractive index of a disk

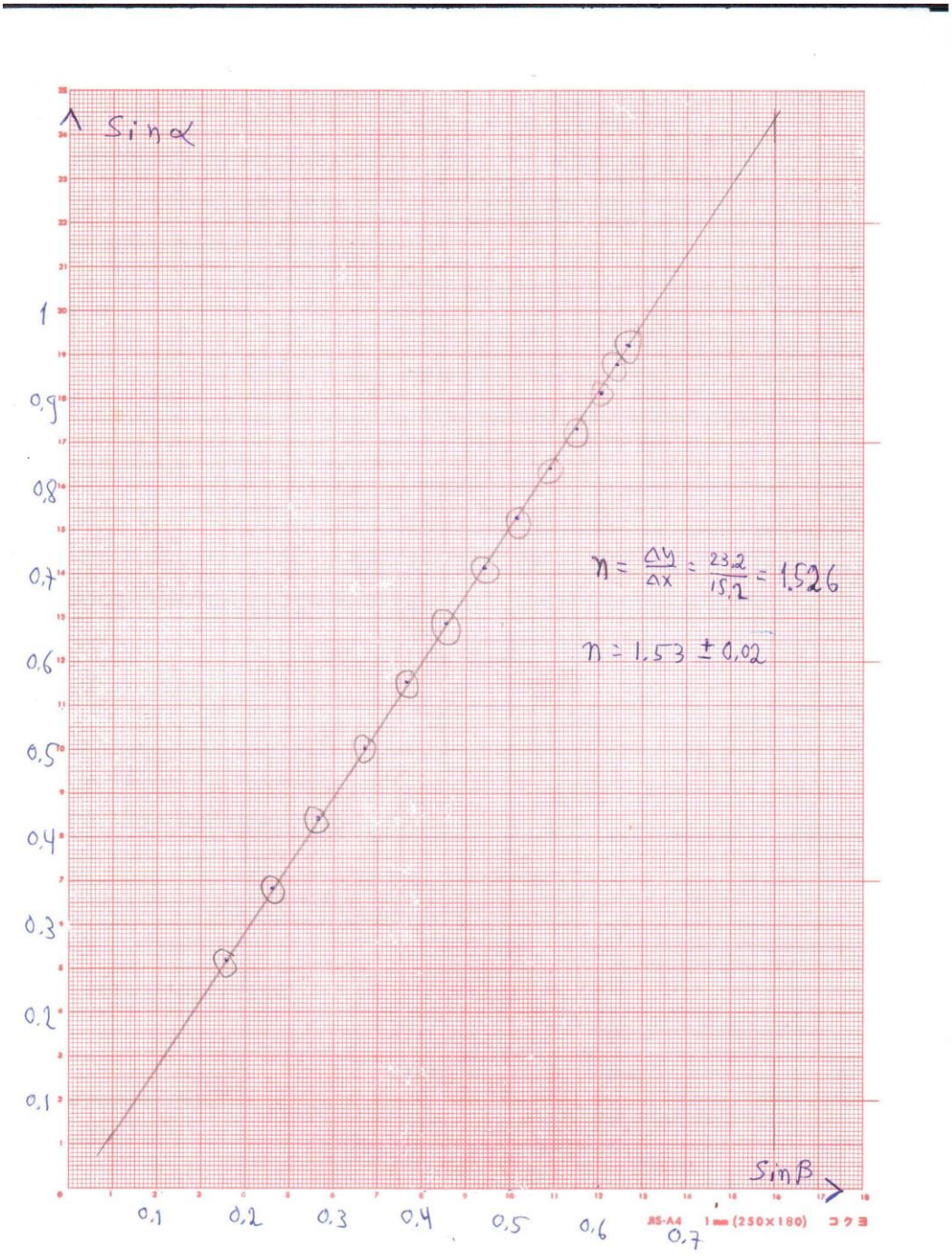
A.1: A sketch of the experimental setup for $N = 3$



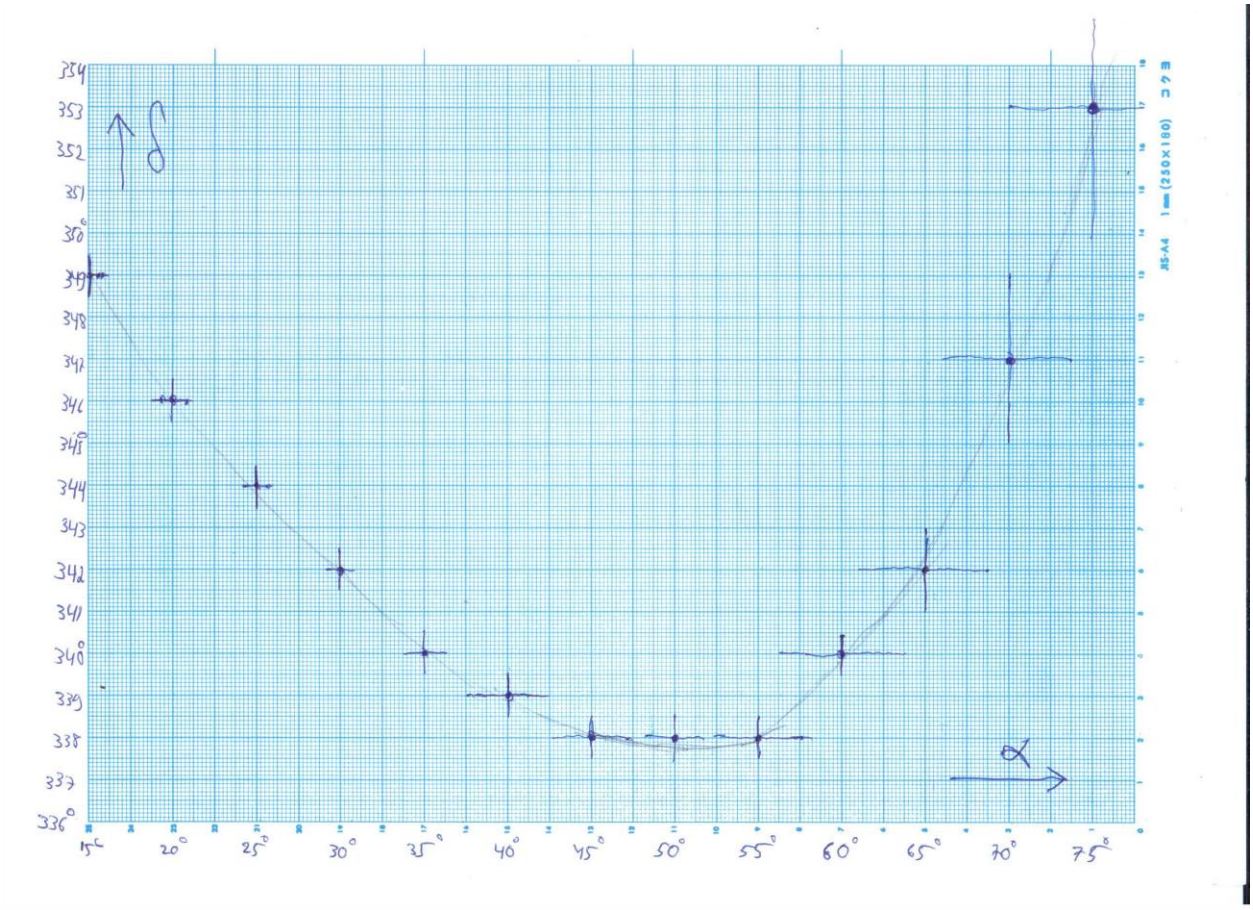
A.1: table of measured and calculated values

$\alpha(\circ)$	$\Delta\alpha(\circ)$	$\delta/2(\circ)$	$\Delta\delta/2(\circ)$	$\delta(\circ)$	$\Delta\delta(\circ)$	$\beta(\circ)$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$
15	0.25	174.5	0.25	349	0.5	10.25	0.259	0.178
20	0.25	173	0.25	346	0.5	13.5	0.342	0.233
25	0.25	172	0.25	344	0.5	16.5	0.423	0.284
30	0.25	171	0.25	342	0.5	19.5	0.500	0.334
35	0.5	170	0.25	340	0.5	22.5	0.574	0.383
40	1	169.5	0.25	339	0.5	25.25	0.643	0.427
45	1	169	0.25	338	0.5	28	0.707	0.469
50	1	169	0.25	338	0.5	30.5	0.766	0.508
55	1	169	0.25	338	0.5	33	0.819	0.545
60	1.5	170	0.25	340	0.5	35	0.866	0.574
65	1.5	171	0.5	342	1	37	0.906	0.602
70	1.5	173.5	1	347	2	38.25	0.940	0.619
75	2	176.5	1.5	353	3	39.25	0.966	0.633

A.2:



A.3:



By observing the remote screen, it is possible to identify the point in which δ is minimal at the highest accuracy.

The values we find are

$\alpha = 49° \pm 0.25°$ and $\delta = 338° \pm 0.5°$

A.4:

When δ is minimal, $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$.

Differentiating the relation $\delta = 2\alpha + (N-1)(180° - 2\beta)$ by α we get:

$2 - 2(N-1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ and therefore $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{N-1}$.

By differentiating Snell's law $\sin\alpha = n\sin\beta$ we get $\cos\alpha = n\cos\beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{n\cos\beta}{N-1}$

Squaring this result, as well as Snell's law and summing the expressions we get:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = n^2\sin^2\beta + \frac{n^2\cos^2\beta}{(N-1)^2}$$

Hence: $\frac{1}{n^2} = \sin^2\beta + \frac{\cos^2\beta}{(N-1)^2}$

We got an explicit relation between the refraction angle β and the refraction index of the material. Due to the multiple reflections inside the disk it is possible, by following all the point in which the beam hits the disk-air interface, to measure the angle β at very high accuracy.

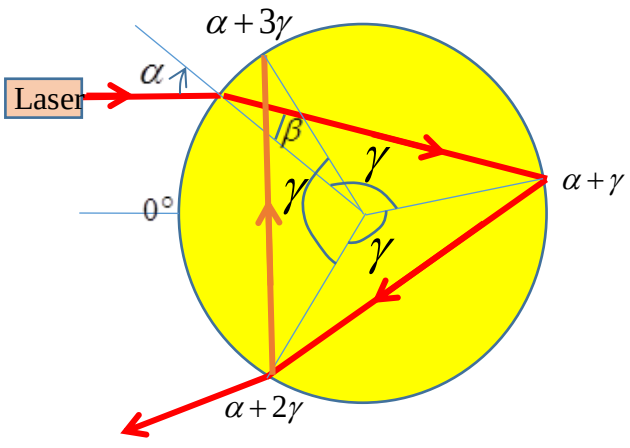
A.5: a sketch showing all the measured quantities:

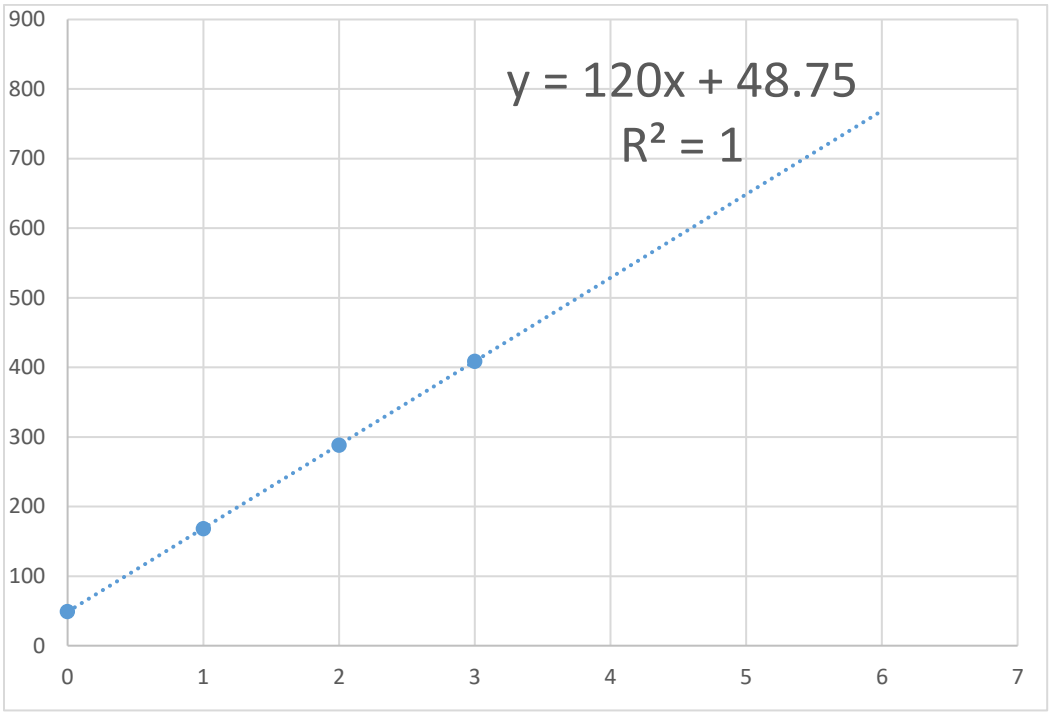
Define the angle $\gamma = 180° - 2\beta$, as shown in the sketch. In fact, after two reflections inside the disk the beam exits at a point very close to the entering point. We will measure the angular location of the points where the beam hits the interface after k reflection, for as many values of k as we can:

k	$\alpha + k\gamma$
0	49
1	168.5
2	288.5
3	409

Note: for the case of $N = 3$ it is not possible to measure for $k > 3$ as in this case, starting from $k = 3$ the impact points co-inside with previous points.

Next we draw a graph of $y = \alpha + k\gamma$ vs. k and find the linear regression slope, γ:



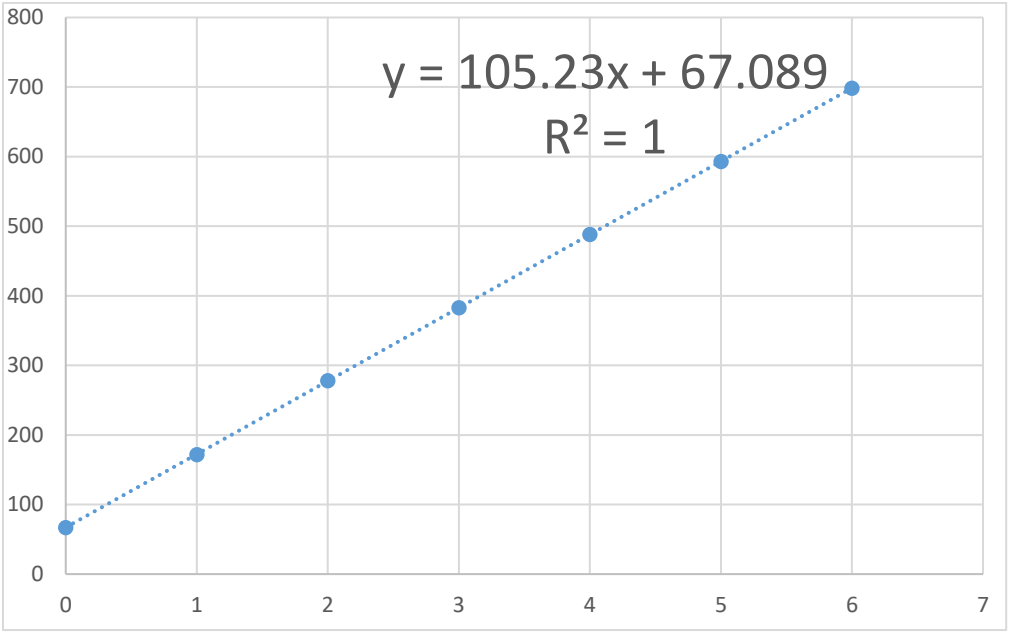


From $\gamma = 120°$ we get $\beta = 30°$, and using the equation we derived in A.4 we get:

$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.512$$

A.6: We will identify the beam exiting the disk after 4 refractions/reflections $(N = 4)$ and we will change the incident angle until we get δ_{min} for $N = 4$. We will measure $\alpha + k\gamma$ as a function of the number of times the beams hits the disk-air interface, k:

k	$\alpha + k\gamma$
0	67
1	172
2	278
3	383
4	488
5	593
6	698.5

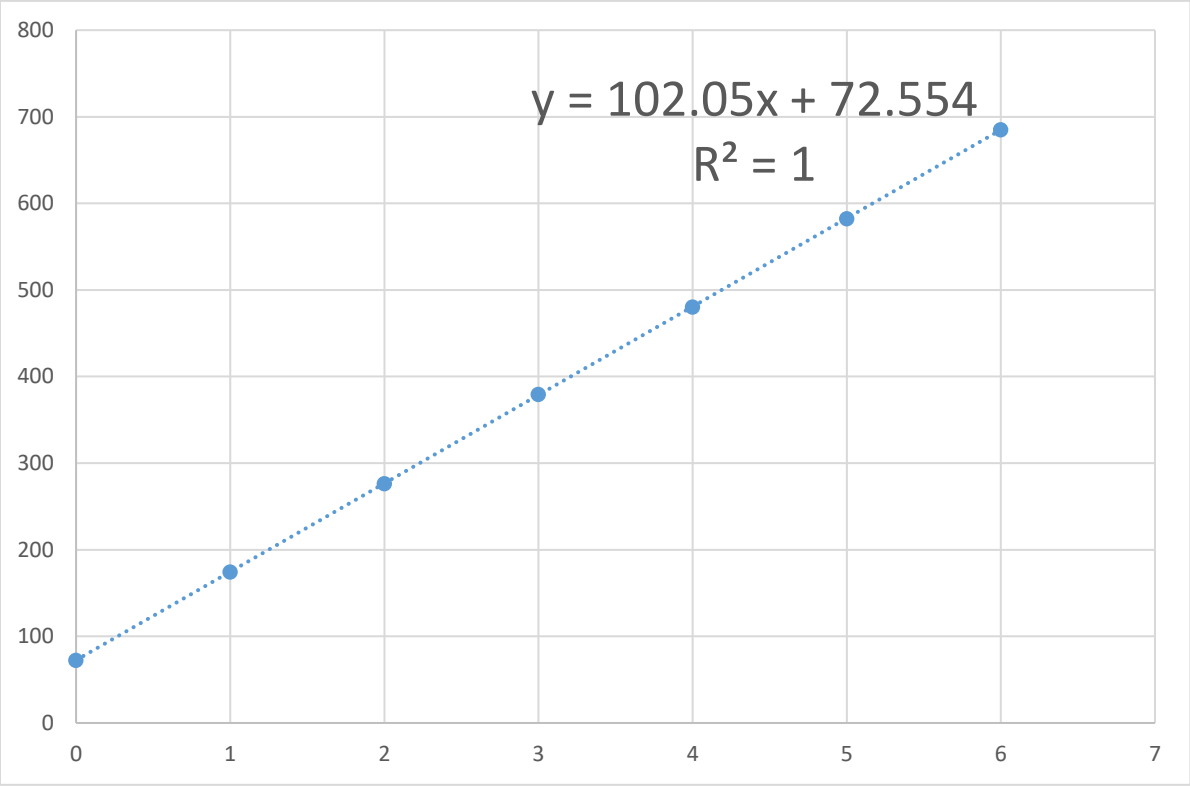


$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.511$$

We'll repeat this process for $N = 5$:

We will identify the beam exiting the disk after hitting the disk-air interface 5 times ($N = 5$) and measure $\alpha + k\gamma$ as a function of the number of hits, k:

k	$\alpha + k\gamma$
0	72.5
1	174.5
2	276.5
3	379.5
4	480.5
5	582.5
6	685

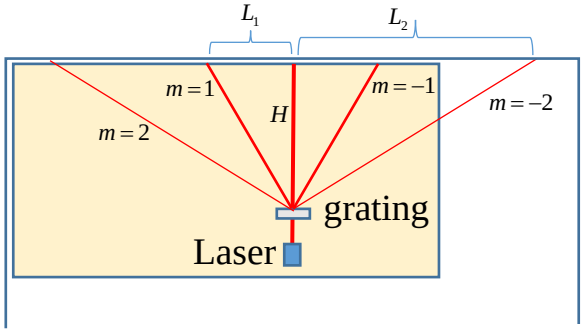


$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2/(N-1)^2}} = 1.519$$

Averaging the three results we get: $n = \frac{1.519+1.511+1.512}{3} = 1.514 \pm 0.004$

Section B – parameters of a diffraction grating

B.1: We will mark on the table a point Q, at a distance of about $H = 70cm$ from the screen – the wall of the experimental chamber - and at an equal distance from the chamber's side walls. Using the given measuring tape we will mark on the screen two points P_1 and P_2, at an equal distance of about 100cm from the left and form the right of the marked point Q. On the screen, we will mark a point P, placed in the middle of the interval P_1P_2. Then, we will aim a laser to go through the points QP. This beam will be perpendicular to the wall that will be used as a screen.



Standard method:

We will place the grating such that the beam passes through it. By gently rotating the grating we will make sure that diffraction ordered 1 and -1 as well as 2 and -2 will appear in symmetrically around the zero order point. Note that the position of the zero order on the screen does not depend on the angle α. In this situation it ok to assume that the incident angle of the beam on the grating is $\alpha = 0$.

As in the sketch, we will measure H, L_1 and L_2 and use the relation $d \sin\theta_m = m\lambda$.

The measured values are $2L_1 = 53.3\text{cm}$, $2L_2 = 163.5\text{cm}$ and $H = 60.8\text{cm}$.

For the first order we get $\frac{\lambda}{d} = 0.4015$. For the second order we get $\frac{\lambda}{d} = 0.4012$.

B.2: A second method

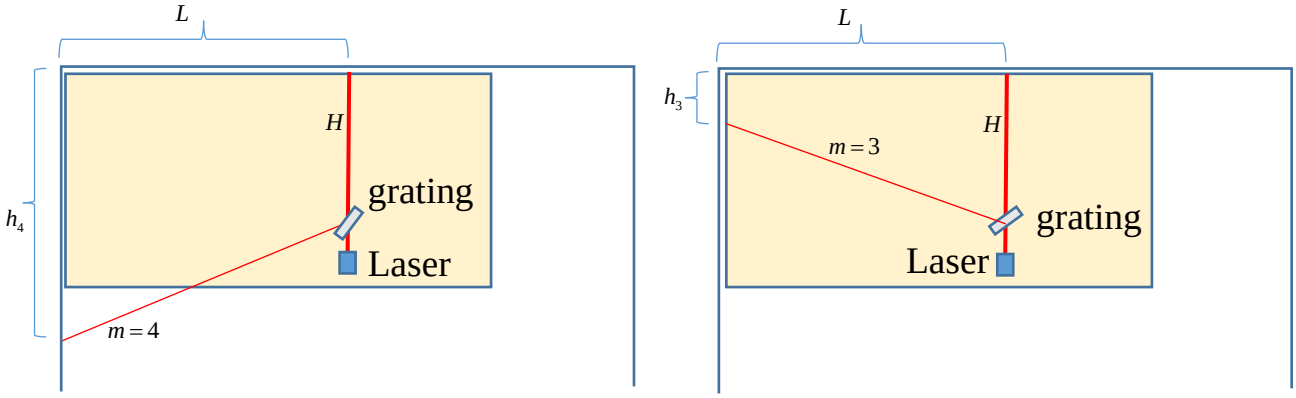
Getting higher orders is not possible at an incident angle of $\alpha = 0$. Thus we will change α and as a result the angle θ_m will change. There is an angle in which θ_m is minimal. By differentiating the relation $d\left(\sin\alpha + \sin(\theta_m - \alpha)\right) = m\lambda$ by α we get that at the minimum ($\frac{d\theta_m}{d\alpha} = 0$) one gets $\cos\alpha - \cos(\theta_m - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta_m}{2}$. From this we get $2d\sin(\frac{\theta_m}{2}) = m\lambda$.

Note that there is no need to measure the angle α, but rather to identify, by changing α, the minimum of θ_m.

Using this method it is possible to measure also ordered $m = 1$ and $m = 2$. For $m = 2$ and $m = -2$ we can verify that the beam is perpendicular to the screen by making sure the distance of these two ordered from the zero order is identical.

For $m = 3$, we will change α to get θ_{3min} and measure the distances L and h_3.

The measured values, as shown in the sketch below, are $H = 67.0\,\text{cm}$, $L = 100.2\,\text{cm}$, $h_3 = 37.8\,\text{cm}$.



We get $\tan\theta_{3\min} = \dfrac{L}{H - h3} = \dfrac{100.2}{67.0 - 37.8} = 3.432$ and hence $\theta_{3\min} = 73.75°$

Therefore: $\dfrac{\lambda}{d} = \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{\theta_{3\min}}{2} = \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{73.75°}{2} = 0.400$

For $m = 4$ we will change α to get $\theta_{4\min}$ and measure the distance h_4.

The measured values are $H = 67.0\,\text{cm}$, $L = 100.2\,\text{cm}$, $h_4 = 96.3\,\text{cm}$.

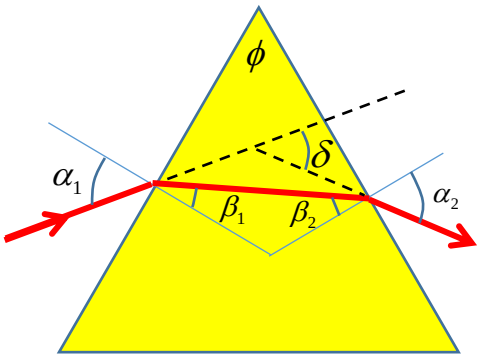
From the sketch we get $\tan(\theta_{4\min} - 90°) = \dfrac{h_4 - H}{L} = \dfrac{96.3 - 67.0}{100.2} = 0.2924$

Hence $\theta_{4\min} = 106.3°$, therefore $\dfrac{\lambda}{d} = \dfrac{2}{4}\sin\dfrac{\theta_{4\min}}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{106.3°}{2} = 0.400$

Section C – the refraction index of a triangular prism

C.1: From the sketch showing the path of the laser beam and from the principle the beam path reversal we get that the deflection angle δ from the direction of in the incoming beam will not change if we switch the angles α_1 and α_2. Thus we get that δ achieves an extremum value (in fact, a minimal value) when the situation is perfectly symmetric, that is when $\alpha_1 = \alpha_2$. In this case,

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\phi}{2}.$$



For the symmetric case, the incident angle α holds the relation $\alpha = \frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}$ and from Snell's law we get $\sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) = n \sin\frac{\phi}{2}$.

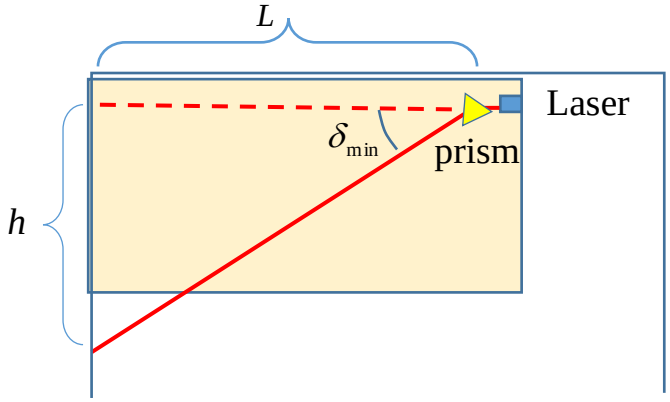
If the prism is not exactly equilateral, we will mark the angles of the prism by $\phi_i = 60° + 2\varepsilon_i$. From the sum of angles in a triangle we get $\sum \varepsilon_i = 0$. Additionally $\beta_i = 30 + \varepsilon_i$. In this case $\delta_{\min} = \delta_0 + 2\Delta_i$ where δ_0 is the minimal δ when $\phi = 60°$.

From Snell's law we get $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30° + \Delta_i + \varepsilon_i\right) = n \sin(30° + \varepsilon_i)$. Making the small angle approximation: $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30°\right) + \cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30°\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \sin 30° + n \cos 30° \cdot \varepsilon_i$

From the equation that holds for $60°$ prism we get $\cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30°\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \cos 30° \cdot \varepsilon_i$

Averaging for all three angles we get $\langle \Delta_i \rangle = 0$, and therefore $n = 2\sin\left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30°\right)$

C.2. We will use the full length of the table to magnify the distances as much as possible. We will build the setup, as described in the sketch, so that in the absence of the prism, the laser beam will hit the screen (the chamber's wall) perpendicularly. We will attach the prism holder base to the table using the adhesive tape. On it we will place the prism holder and the prism itself. We will rotate the prism to find the minimal deflection angle δ_{min}. We will then repeat the measurement of δ_{min} for each corner of the prism.



The measured values are given in the table:

Corner No.	L	h	$\delta_{\min}$
1	141.6 ± 0.2 cm	175.2 ± 0.3 cm	$51.05°\pm0.1°$
2	141.0 ± 0.2cm	167.1 ± 0.3cm	$49.84°\pm0.1°$
3	140.7 ± 0.2cm	171.4 ± 0.3cm	$50.62°\pm0.1°$

Calculation of the error in $\delta_{\min}$:

$$\tan\delta_{\min}=\frac{h}{L}\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\delta_{\min}}\Delta\delta_{\min}=\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2+\left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$$

Therefore, $\Delta\delta_{\min}=\cos^2\delta_{\min}\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2+\left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$

Substituting the measured values we get

$$\Delta\delta_{\min}=\cos^2 51.05°\sqrt{\left(\frac{0.3}{141.6}\right)^2+\left(\frac{175.2\cdot0.2}{141.6^2}\right)^2}=0.0017rad=0.1°$$

The error in the average value of the two angles is

$$\Delta\langle\delta_{\min}\rangle=\frac{0.1°}{\sqrt{3}}=0.06°=1\cdot10^{-3}rad$$

From the table we get that the average value of $\delta_{\min}$ is $\langle \delta_{\min} \rangle = 50.50°$

Therefore the refraction index of the prism is

$$n = 2\sin\left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30°\right) = 2\sin\left(\frac{50.50°}{2} + 30°\right) = 2\sin 55.25° = 1.6433$$

And the error in n : $\Delta n = 2\cos 55.25° \cdot 0.5\Delta \langle \delta_{\min} \rangle = \cos 55.25° \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4}$

Thus: $n = 1.6433 \pm 0.0006$

As the laser wavelength may vary between lasers up to a standard deviation of $\pm 10\,\text{nm}$, the value found in the literature is $n(\lambda \pm \Delta\lambda) = 1.6425 \pm 0.0007$.

1	0.3987	41	0.4008	81	0.3990	121	0.3967	161	0.3998
2	0.3987	42	0.4031	82	0.4004	122	0.4083	162	0.3998
3	0.4094	43	0.3991	83	0.4011	123	0.4075	163	0.4084
4	0.4020	44	0.3982	84	0.3988	124	0.4072	164	0.4084
5	0.3979	45	0.4034	85	0.3976	125	0.3999	165	0.3994
6	0.4093	46	0.4010	86	0.4004	126	0.4087	166	0.4191
7	0.3991	47	0.4001	87	0.4028	127	0.3988	167	0.4001
8	0.4008	48	0.4034	88	0.3987	128	0.3991	168	0.4191
9	0.4028	49	0.3996	89	0.4058	129	0.3976	169	0.3991
10	0.4005	50	0.4002	90	0.4004	130	0.3976	170	0.4080
11	0.3987	51	0.4037	91	0.4001	131	0.3996	171	0.4080
12	0.3982	52	0.4031	92	0.3987	132	0.4020	172	0.4005
13	0.3984	53	0.4019	93	0.3994	133	0.4062	173	0.4078
14	0.3982	54	0.3999	94	0.3998	134	0.4084	174	0.4083
15	0.4080	55	0.4020	95	0.3994	135	0.3968	175	0.3976
16	0.3994	56	0.3991	96	0.3998	136	0.4046	176	0.4074
17	0.3988	57	0.4028	97	0.4029	137	0.4077	177	0.4070
18	0.4065	58	0.4004	98	0.3987	138	0.3971	178	0.3984
19	0.3987	59	0.3999	99	0.3991	139	0.3967	179	0.3984
20	0.4026	60	0.4071	100	0.3987	140	0.4023	180	0.4081
21	0.4002	61	0.4005	101	0.4043	141	0.4074	181	0.4072
22	0.3974	62	0.4078	102	0.3996	142	0.4065	182	0.4068
23	0.4029	63	0.4001	103	0.3962	143	0.3994	183	0.3960
24	0.3987	64	0.3971	104	0.4062	144	0.3976	184	0.4058
25	0.3982	65	0.4077	105	0.4047	145	0.4075	185	0.3993
26	0.4064	66	0.4017	106	0.4078	146	0.4090	186	0.4010
27	0.3999	67	0.4032	107	0.4047	147	0.3996	187	0.4077
28	0.4011	68	0.3991	108	0.4067	148	0.3999	188	0.4074
29	0.4032	69	0.3990	109	0.4067	149	0.4087	189	0.4070
30	0.4022	70	0.4034	110	0.4002	150	0.3974	190	0.4089
31	0.3987	71	0.4002	111	0.3994	151	0.3965	191	0.3970
32	0.4019	72	0.4029	112	0.3982	152	0.4080	192	0.3993
33	0.4019	73	0.4019	113	0.3967	153	0.4005	193	0.3981
34	0.3982	74	0.4028	114	0.3979	154	0.3971	194	0.4077
35	0.3998	75	0.4062	115	0.3991	155	0.3988	195	0.4070
36	0.3998	76	0.4031	116	0.3998	156	0.4084	196	0.4080
37	0.4011	77	0.4010	117	0.4065	157	0.3973	197	0.4086
38	0.3979	78	0.4005	118	0.4010	158	0.3999	198	0.4008
39	0.4028	79	0.3990	119	0.3967	159	0.3888	199	0.3964
40	0.4035	80	0.4007	120	0.3974	160	0.4191	200	0.4010

201	0.3978	241	0.3996	281	0.3996	321	0.3998	361	0.3981
202	0.3984	242	0.4056	282	0.4080	322	0.3968	362	0.4080
203	0.3994	243	0.4070	283	0.3993	323	0.3974	363	0.3991
204	0.4052	244	0.3987	284	0.3981	324	0.4067	364	0.3998
205	0.4055	245	0.3974	285	0.3979	325	0.3996	365	0.3994
206	0.4047	246	0.4081	286	0.3973	326	0.4070	366	0.3976
207	0.3981	247	0.3984	287	0.4077	327	0.4072	367	0.3945
208	0.3998	248	0.4083	288	0.3991	328	0.3990	368	0.4035
209	0.4010	249	0.3998	289	0.3993	329	0.4046	369	0.4025
210	0.4059	250	0.4080	290	0.4077	330	0.4078	370	0.3976
211	0.3964	251	0.3967	291	0.3993	331	0.4077	371	0.4065
212	0.4047	252	0.4078	292	0.3998	332	0.3993	372	0.3999
213	0.4068	253	0.3985	293	0.4071	333	0.3970	373	0.3974
214	0.4041	254	0.4077	294	0.4058	334	0.3994	374	0.3978
215	0.4072	255	0.3984	295	0.4046	335	0.3981	375	0.3979
216	0.3993	256	0.3968	296	0.4043	336	0.4078	376	0.3982
217	0.4028	257	0.4080	297	0.3994	337	0.4032	377	0.4040
218	0.4025	258	0.3994	298	0.3996	338	0.3968	378	0.3994
219	0.4002	259	0.4080	299	0.4072	339	0.3993	379	0.3982
220	0.3994	260	0.3973	300	0.4083	340	0.4087	380	0.4047
221	0.3990	261	0.4080	301	0.4047	341	0.4026	381	0.3994
222	0.3985	262	0.4008	302	0.4020	342	0.3996	382	0.3981
223	0.3978	263	0.4087	303	0.4075	343	0.3993	383	0.4059
224	0.4080	264	0.4020	304	0.4081	344	0.3985	384	0.4011
225	0.3984	265	0.3982	305	0.4083	345	0.4094	385	0.4072
226	0.4074	266	0.4061	306	0.3976	346	0.3976	386	0.4020
227	0.3993	267	0.4064	307	0.3984	347	0.4007	387	0.4078
228	0.4087	268	0.4074	308	0.4059	348	0.4025	388	0.4084
229	0.3991	269	0.3999	309	0.4044	349	0.4077	389	0.3991
230	0.4083	270	0.4034	310	0.4013	350	0.4065	390	0.4089
231	0.3974	271	0.3991	311	0.4089	351	0.4017	391	0.4023
232	0.4008	272	0.4084	312	0.4062	352	0.3999		
233	0.4019	273	0.4020	313	0.4013	353	0.4090		
234	0.4037	274	0.4058	314	0.3979	354	0.4072		
235	0.3998	275	0.4086	315	0.4087	355	0.4097		
236	0.3981	276	0.3999	316	0.4019	356	0.3988		
237	0.4081	277	0.3981	317	0.4022	357	0.4047		
238	0.4061	278	0.3973	318	0.4023	358	0.3974		
239	0.4077	279	0.3982	319	0.4064	359	0.3998		
240	0.3998	280	0.4087	320	0.3981	360	0.3990		

S2-1

Wiedemann-Franz Law – Solution

Part A: Electrical conductivity of metals (1.5 points)

A.1 (1.0 points)

Magnet descend time:

Number	Copper [s]	Aluminum[s]	Brass [s]
1	17.77	9.23	6.1
2	17.96	9.39	5.83
3	18.16	9.22	6.04
4	18.15	9.37	5.86
5	17.76	9.36	6.16
6	18.2	9.44	5.92
7	17.67	9.65	5.9
8	17.9	9.18	6.08
9	17.67	9.41	5.86
10	18.36	8.96	5.99
Average	17.96	9.32	5.97

A.2 (0.5 points)

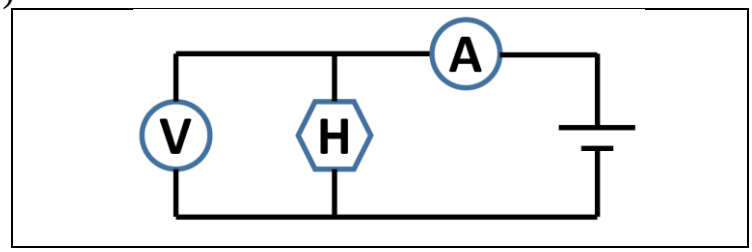
	Copper	Aluminum	Brass
Electrical conductivity $\left[\frac{1}{\Omega m}\right]$	5.97×10^7	2.98×10^7	1.60×10^7

Part B: Thermal conductivity of copper (3.0 points)

B.1 (0.1 points)

Rod 1 temperature : **22.76 [C]**

B.2 (0.5 points)



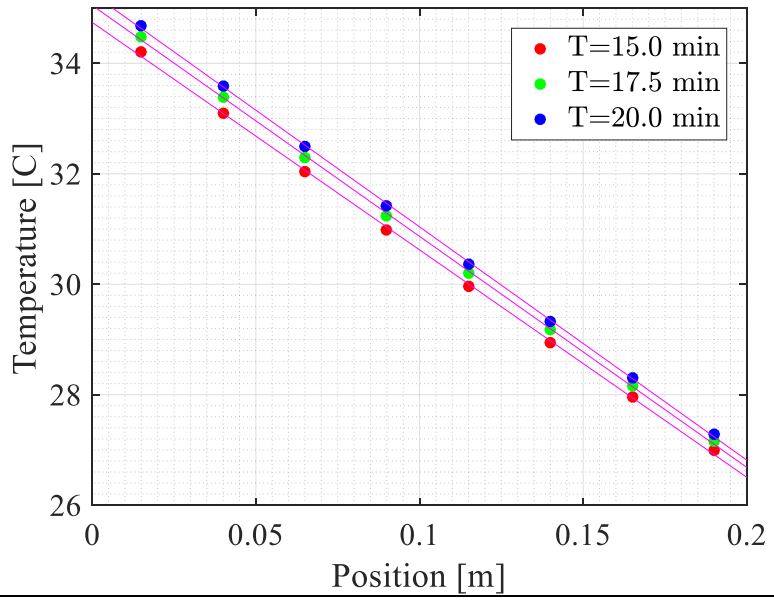
B.3 (0.1 points)

$P = I \cdot V = 5.51[\mathrm{W}]$

B.4 (0.5 points)

Time [S]	T1 [C]	T2 [C]	T3 [C]	T4[C]	T5 [C]	T6 [C]	T7 [C]	T8 [C]
900	26.98	27.96	28.95	29.96	30.98	32.03	33.10	34.20
1050	27.16	28.16	29.17	30.20	31.240	32.30	33.38	34.48
1200	27.29	28.30	29.33	30.37	31.42	32.49	33.58	34.68

B.5 (1.0 points)



B.6 (0.5 points)

$$\kappa_0 = -\frac{P}{A\frac{\Delta T}{\Delta x}} = -\frac{5.51[W]}{\pi\cdot\left(10^{-2}[m]\right)^2\cdot\left(-41.8\left[\frac{K}{m}\right]\right)} = 420\left[\frac{W}{mK}\right]$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{31.04[C]-30.62[C]}{5\cdot 60[s]} = 1.4\cdot 10^{-3}\left[\frac{K}{s}\right]$$

B.7 (0.3 points)

higher value

We expect a **higher value** of κ_0 compared with the real κ_{cu} because of 2 reasons:

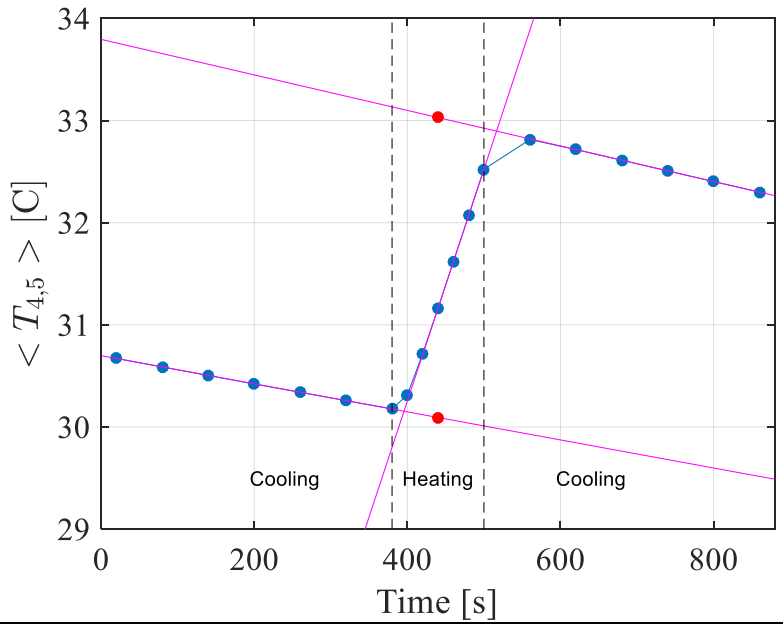
1. A part of the supplied heat power is lost through the side walls. Therefore, the heat transfer through the cross-section of the rod is smaller.
2. Since the system is not in a steady state ($\frac{\Delta T}{\Delta t} \neq 0$), the corresponding power involved should be subtracted from the power supplied by the heater.

Part C: Heat loss and heat capacity of copper (4.0 points)

C.1 (1.0 points)

$Time[s]$	$T_1[C]$	$T_2[C]$	$T_3[C]$	$T_4[C]$	$T_5[C]$	$T_6[C]$	$T_7[C]$	$T_8[C]$	$T_{av}[C]$
20				30.67	30.67				30.67
80				30.59	30.59				30.59
140				30.50	30.50				30.50
200				30.42	30.42				30.42
260				30.34	30.34				30.34
320				30.26	30.26				30.26
380				30.18	30.18				30.18
400				30.38	30.25				30.31
420				30.87	30.56				30.72
440				31.37	30.96				31.16
460				31.85	31.38				31.61
480				32.32	31.82				32.07
500				32.78	32.26				32.52
560				32.88	32.75				32.81
620				32.73	32.70				32.72
680				32.61	32.61				32.61
740				32.51	32.51				32.51
800				32.40	32.40				32.40
860				32.30	32.30				32.30

C.2 (1.0 points)



C.3 (1.0 points)

The purpose of this part is to correct to first order the result in part B. Hence, every solution within 10% accuracy is accepted (see marking scheme).

Solution 1 (using slopes):

$$P_{loss} = c_p \cdot m \cdot \left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling}$$

$$P_{in} = c_p \cdot m \cdot \left(\left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Heating} - \left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling} \right)$$

Where $\left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling}$ is the average of both cooling slopes.

$$c_p \cdot m = \frac{5.5[W]}{\left(2.27 \cdot 10^{-2}\left[\frac{K}{s}\right] + 1.6 \cdot 10^{-3}\left[\frac{K}{s}\right]\right)}$$

Solution 2 (using jump):

$$P_{loss} = c_p \cdot m \cdot \left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling}$$

$$P_{in} \cdot \Delta t = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

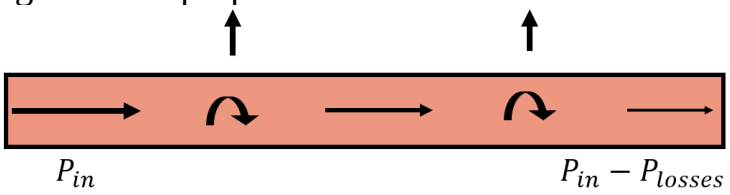
Where $\left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling}$ is the average of the two cooling slopes, and ΔT is the extrapolated jump in temperature half way though the heating time interval.

$$c_p \cdot m = \frac{P_{in} \cdot \Delta t}{\Delta T} = \frac{5.5[W] \cdot 120[s]}{2.94[K]} = 224\left[\frac{J}{K}\right]$$

$c_p \cdot m = 226\left[\frac{J}{K}\right] \Rightarrow c_p = 390\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$ Which is 1% off the correct value. $P_{loss} = 226\left[\frac{J}{K}\right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3}\left[\frac{K}{s}\right] = 0.32[W]$	$c_p = 386\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$ which is the correct value. $P_{loss} = 224\left[\frac{J}{K}\right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3}\left[\frac{K}{s}\right] = 0.31[W]$

C.4 (1.0 points)

The temperature gradient is proportional to the local heat flow.



To first order, the average temperature gradient will be proportional to the average heat flow. Therefore, the temperature gradient will be proportional to $P_{in} - \frac{1}{2}P_{losses}$:

$$\kappa = \frac{P_{in} - \frac{1}{2}P_{absorb} - \frac{1}{2}P_{loss}}{A \cdot (\Delta T / \Delta x)} = \frac{P_{in} - \frac{1}{2}c_p \cdot m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} - \frac{1}{2}\dot{Q}_{loss}}{A \cdot \Delta T / \Delta x} = \kappa_0 \cdot \frac{P_{in} - \frac{1}{2}c_p \cdot m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} - \frac{1}{2}\dot{Q}_{loss}}{P}$$

$$\kappa = 420\left[\frac{W}{mK}\right] \cdot \frac{5.51[W] - \frac{1}{2} \cdot 226\left[\frac{J}{K}\right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3}\left[\frac{K}{s}\right] - \frac{1}{2} \cdot 0.32[W]}{5.51[W]} = 396\left[\frac{W}{mK}\right]$$

Which gives an error of 2.5% error compared to expected $385\left[\frac{W}{mK}\right]$. We expect a 1% systematic error (see appendix).

Part D: Thermal conductivity of multiple metals (1.0 points)

D.1 (0.1 points)

$T = 22.65[C]$

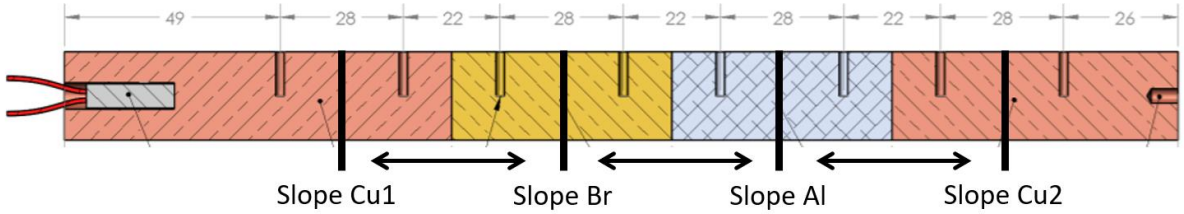
D.2 (0.2 points)

Time of measurement: $1041[s]$

$T_1[C]$	$T_2[C]$	$T_3[C]$	$T_4[C]$	$T_5[C]$	$T_6[C]$	$T_7[C]$	$T_8[C]$
41.68	40.51	38.51	34.65	32.47	30.71	29.63	28.62

$\Delta T_{cu1}/\Delta x$	$\Delta T_{Br}/\Delta x$	$\Delta T_{Al}/\Delta x$	$\Delta T_{cu2}/\Delta x$
$41.79\left[\frac{K}{m}\right]$	$137.86\left[\frac{K}{m}\right]$	$62.86\left[\frac{K}{m}\right]$	$36.07\left[\frac{K}{m}\right]$

D.3 (0.7 points)



$$\kappa_{Brass} = \kappa_{Copper} \cdot \frac{\frac{2}{3}(\Delta T_{cu1}/\Delta x)+\frac{1}{3}(\Delta T_{cu2}/\Delta x)}{\Delta T_{Br}/\Delta x} = 115\left[\frac{W}{mK}\right]$$

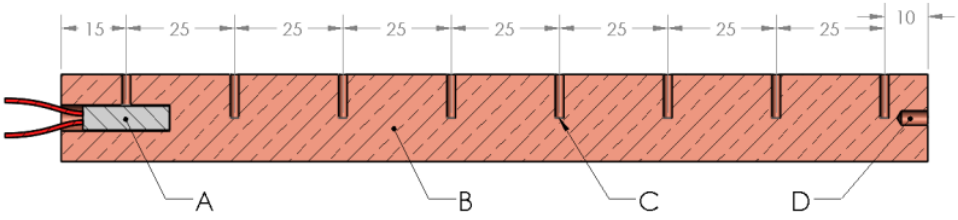
$$\kappa_{Aluminum} = \kappa_{Copper} \cdot \frac{\frac{1}{3}(\Delta T_{cu1}/\Delta x)+\frac{2}{3}(\Delta T_{cu2}/\Delta x)}{\Delta T_{Al}/\Delta x} = 239\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$$

Part E: The Wiedemann-Franz law (0.5 points)

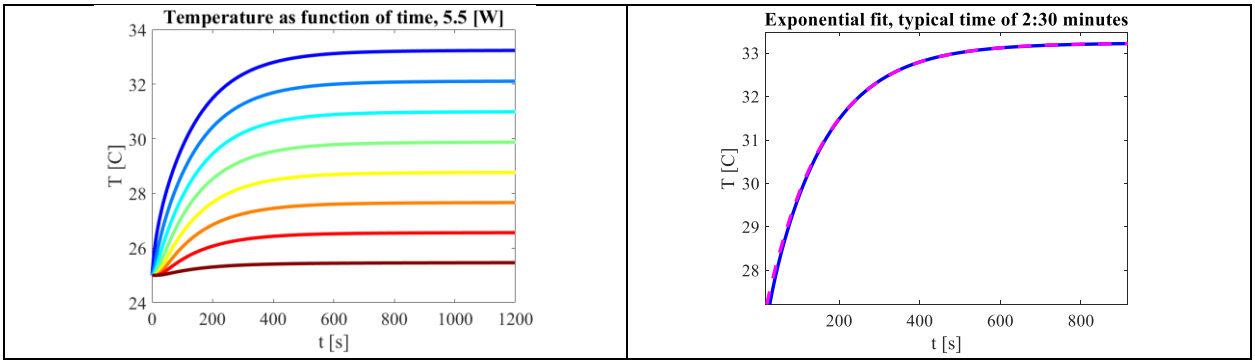
E.1 (0.5 points)

	Copper	Aluminum	Brass
$\sigma\ [\Omega^{-1}m^{-1}]$ Electric conductivity	5.97×10^{7}	2.98×10^{7}	1.60×10^{7}
$\kappa\ \left[\frac{W}{Km}\right]$ Heat conductivity	396	239	115
$L\left[\frac{W\Omega}{K^2}\right]$ Lorenz coefficient	2.21×10^{-8}	2.67×10^{-8}	2.40×10^{-8}

Wiedemann-Franz law – Appendix

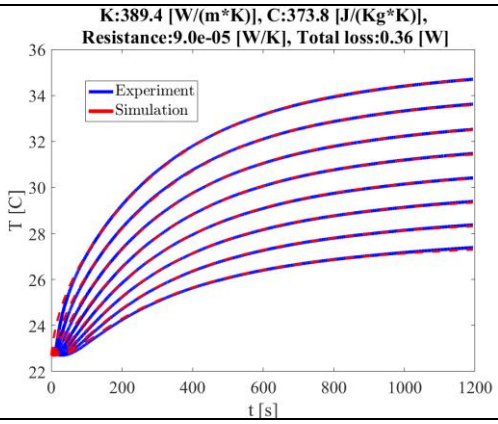


We will use a simple model to analyze the heat transport through the rod. A heater is suppling power P_0 at one end. At any given point $P = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x}$ where P is the heat current at point x. Ideally, PT should be constant along the rod. However, there are two mechanism that modify this: (a) loss of power that is used to change the temperature of the material; (b) loss of power to the environment, leading to $\frac{\partial P}{\partial x} = -c_p \cdot \rho \cdot A \frac{\partial T}{\partial t} - \left(T - T_0\right) \cdot K$, where c_p is the specific heat, ρ the density, K the radial heat loss parameter per unit length, and T_0 the environment temperature.



The time scale of the heating process is 2:30 minutes, so we get to 95% of final value after 7:30 minutes, as shown in the figure above. However, this is again only true for an ideal system properly coupled to a heat reservoir but otherwise insulated. In our system, the connection to the heat reservoir is not ideal, and we have radial heat loss. We model this system as a rod connected via thermal resistance to a short aluminum rod (representing the pot and heat sink material in the real setup) that is connected to a water reservoir. In the figure below we have simulated the realistic heating process, and compared it with the measured data.

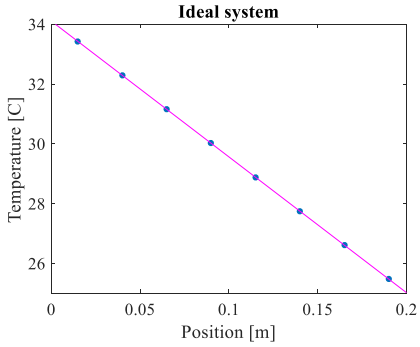




During the experiment we will see the numbers that are extracted from this simulation match our experimental results.

Part A

For an ideal system, a rod connected only to an ideal reservoir, we expect to get a constant temperature gradient:

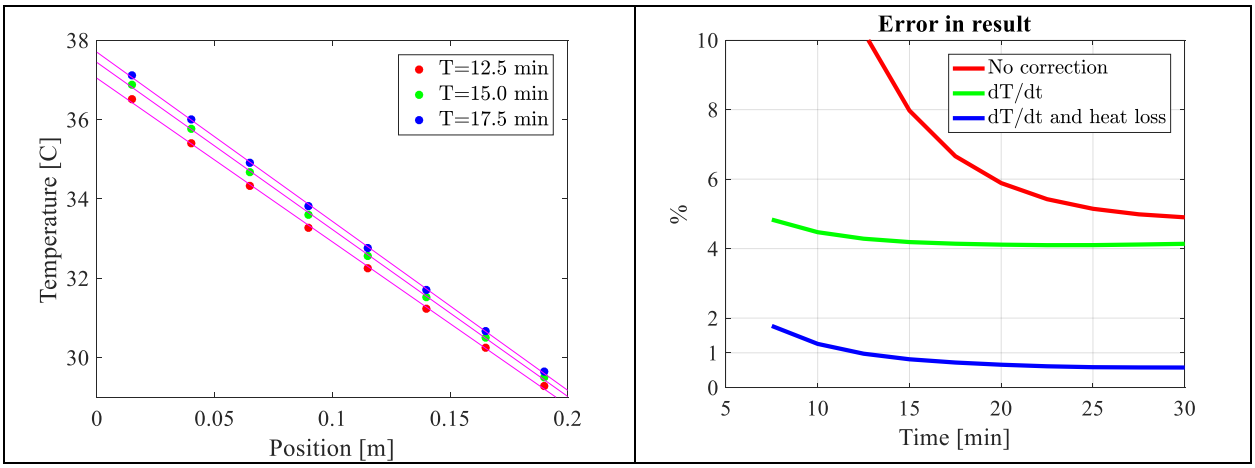


Which gives $\kappa = \frac{P}{Slope \cdot A} = 385 \frac{W}{m \cdot K}$

Let us now analyze the effects of the two mechanisms causing deviation from this ideal behavior. An important point here is that loss mechanisms affect the heat flux, but there is always a local relation between the temperature gradient and the local heat. Hence, the temperature gradient close to the heater is set by input power P, while the gradient close to the reservoir side will be set by power $P - P_{loss}$. For this reason, the slope will be corrected by (to first order in the gradient):

$$\kappa = \frac{P - \frac{1}{2} P_{absorb} - \frac{1}{2} P_{loss}}{\vec{\nabla} T \cdot A} = \frac{P - \frac{1}{2} c_p \cdot m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{2} P_{loss}}{\vec{\nabla} T \cdot A}$$

The figure below demonstrates that this approximation is very accurate for our system:

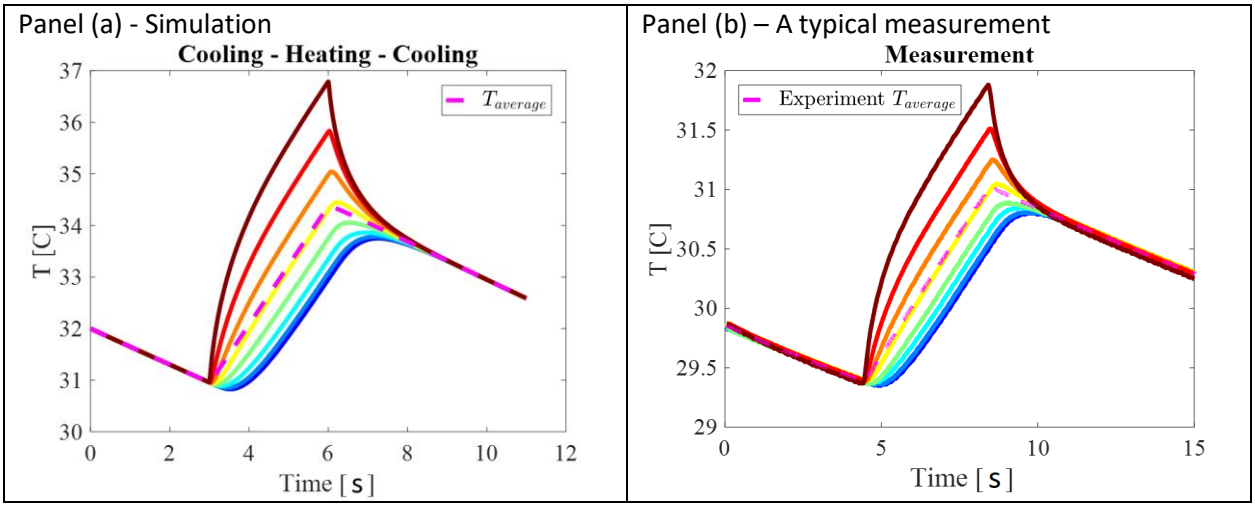


We see that with these two correction the accuracy is better than 1%, compared with 8% without correction, which is an order of magnitude improvement.

Part B: cooling – heating – cooling cycle

The purpose of this section is to obtain the heat loss and heat capacity of the rod in order to correct the 8% error in the previous section result. To do so, we will disconnect the rod from the heat reservoir, isolate its free end, and heat it up to approximately the temperature of the last section. In this section we do not aim for a 1% accuracy, because it is a first order correction for our result of the heat conductance, which is the main point of the experiment.

We will perform a cooling-heating-cooling cycle in order to obtain the heat capacity and the heat loss.



Panel (a) – a simulation of the cooling-heating-cooling cycle. Panel (b) – a typical cycle as measured in a real system. The different colors correspond to different thermometers.

The average reading (over all thermometers) is in principle the most suitable quantity for the analysis, since it approximately accounts for the total energy given to the rod by the heater. Unfortunately, we believe that it is technically difficult to write the full set of thermometer readings fast enough on paper, and we do not want the student to invest a lot of effort in this task. To a very good approximation the temperature in the center of the rod is very close to the average temperature, up to some small time delay. Hence, we hint that the student should use the temperature in the center (average of readings of thermometers T4 and T5).

There are a number of ways to use this data in order to extract the two quantities C, P_{loss}. We propose two approaches: (a) based on the slope of the $T(t)$ measurements during the cooling and heating process. In the former,

$$P_{loss} = -c_p \cdot m \cdot \left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling}$$

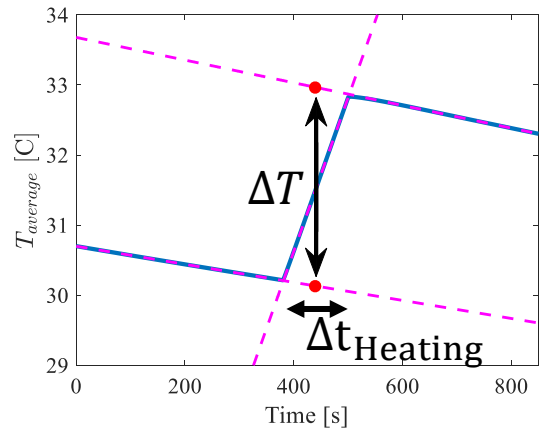
Hence in the latter:

$$P_{in} = c_p \cdot m \cdot \left(\left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Heating} - \left.\frac{\partial T_{av}}{\partial t}\right|_{Cooling} \right),$$

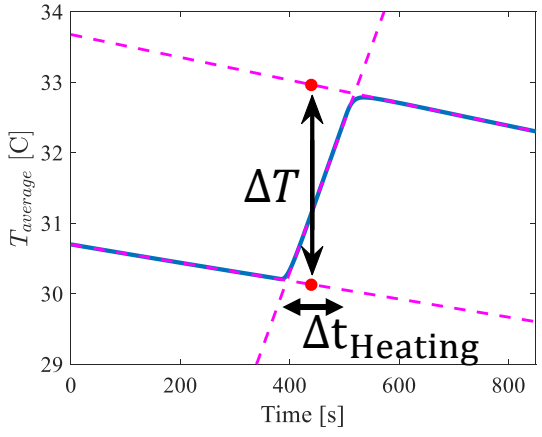
allowing one to extract $c_p \cdot m$.

(b) Alternatively, the total heat input during the heating time interval, $P_{\text{in}} \cdot \Delta t_{\text{Heating}}$ is related to the $\Delta T_{\text{Heating}}$, the difference between the vertical shift between the linear cooling $T(t)$ graphs before and after the heating (see figure below) through $P_{\text{in}} \Delta t_{\text{Heating}} = c_p m \Delta T_{\text{Heating}}$. Since the slope during the relatively short heating time interval is not needed here, this method is slightly more accurate. However, both approaches will be accepted.

Average over all thermometers:



Average over thermometer 4,5



Both methods reproduce the heat conductivity within 1%, $386\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$.

Using this heat capacity we can get the total heat loss $P_{loss} = -c_p \cdot m \cdot \frac{\partial T_{av}}{\partial t}\Big|_{Cooling} = 0.34\left[\frac{J}{s}\right]$

Note that a significant contribution to the heat capacity originates from the insulation and other components in the system, and for this reason we instruct the students to use an effective mass that is larger than the real mass. This matters only in order to get proper c_p, but it is irrelevant for the rest of the experiment where we only need $c_p \cdot m$.

Depending on the method, the result of C will deviate by 5%. This will produce less than $\sim 0.5\%$ negligible error in the result of the heat conductivity.