IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-1

CHN (China)

激光干涉引力波天文台 LIGO-GW150914（10 分）

在 2015 年，激光干涉引力波天文台 (LIGO) 第一次侦测到一个经过地球的引力波 (GW) 事件。该事件 (GW150914) 是由两个黑洞在一个近圆轨道互相环绕运行产生的引力波。本题将从检测到的信号特性估算该系统的一些物理参数。

A 部分：牛顿 (守恒性) 轨道（3.0 分）

A.1 双星系统中，两星质量分别为 M_1, M_2，与质心距离分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，即 1.0pt

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\,. \tag{1}$$

假若这个双星系统是一个孤立系统，以非相对论效应低速运行。利用牛顿定律，M_1 星的加速度矢量可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\,, \tag{2}$$

其中 $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$, 求出方程式中的整数 $n \in \mathbb{N}$ 的值（N 表示整数），并求出表达式 $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$，其中 G 是牛顿引力常数 [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$]

A.2 这个双星系统以圆轨道互相环绕运行，其总能量可表达为： 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\,, \tag{3}$$

其中

$$\mu \equiv \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}\,, \qquad M \equiv M_1 + M_2\,, \tag{4}$$

其中 μ 是系统的约化质量，M 是系统的总质量，Ω 是双星的角速度，L 是双星之间的距离 $L = r_1 + r_2$。推导出表达式 $A(\mu, \Omega, L)$，用 μ，Ω 及 L 表示。

A.3 方程式 3 可以简化成 $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$，求出式中 β 的数值。 1.0pt

B 部份：引入相对论耗散（7.0 分）

关于引力的正确理论是 1915 年爱因斯坦提出的广义相对论。该理论预测到引力交互作用是以光速来传播的，携带交互作用信息的信使称为引力波 GW。每当星体加速时，便会发出引力波而导致整个系统的能量减少。

假设孤立系统内有两个可作为质点处理的星球，爱因斯坦证明了这个系统内质点的速度若足够慢时，系统所发出来的引力波具有如下特征：

1）引力波的频率等于这对星球旋转时的轨道角频率的 2 倍；

2）引力波可以通过发光来描述，发射功率为 $\mathcal{P}$，其可以利用爱因斯坦的四极矩方程式表示：

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\,. \tag{5}$$

DELEGATION PRINT

其中光速 $c \simeq 3 \times 10^8$m/s. 对于旋转轨道在 $x-y$ 平面上的两质点系统，$Q_{ij}(i,j$ 代表第 i 行第 j 列) 可写成：

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3}\left(2x_A^2 - y_A^2\right), \qquad Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3}\left(2y_A^2 - x_A^2\right), \qquad Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3}\left(x_A^2 + y_A^2\right), \tag{6}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A\, x_A\, y_A\,, \tag{7}$$

对于所有的其他情况，则有 $Q_{ij} = 0$. 这里，(x_A, y_A) 是质心系中的质量 A 的位置。

B.1 对于 A.2 中描述的圆轨道，Q_{ij} 的分量可由下述的关于时间 t 的函数表示： 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2}\left(a_i + b_i \cos kt\right), \qquad Q_{ij} \overset{i\neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2}\, c_{ij} \sin kt\,. \tag{8}$$

求出定 k 的表达式，以 Ω 表示。并求出常数 a_i，b_i，c_{ij} 的数值。

B.2 系统所发出的引力波功率 $\mathcal{P}$，可用以下表达式表示： 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6\,. \tag{9}$$

求出方程式中 ξ 的数值。(若本小问中未能求得 ξ 的数值，在后面的解题过程中，请取 $\xi = 6.4$)。

B.3 在不考虑系统发出引力波 GW 的情况下，这对星体的环绕轨道是一个固定的圆轨道。但当考虑系统发出引力波时，双星系统便会由于发出引力波而失去能量，并使其圆轨道慢慢变小。这时，轨道角速度的变化率 $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 满足下式： 1.0pt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} \left(GM_{\mathrm{c}}\right)^5, \tag{10}$$

其中 M_{c} 称为啁啾质量。推导出啁啾质量 M_{c} 的表达式，用 M 及 μ 表示。这个啁啾质量决定了该系统在圆轨道慢慢变小过程中频率的增加。[「啁啾」一词来自于小鸟所发出的高音（频率上升）]

B.4 使用以上数据，试求出轨道角速度 Ω 与引力波的周期性频率 f_{GW} 的关系。要知道，对于任何光滑函数 $F(t)$ 在 $a \neq 1$ 的情况下： 2.0pt

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \chi F(t)^a \qquad \Rightarrow \qquad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0)\,, \tag{11}$$

其中 χ 是常数，t_0 是积分常数，利用上述关系证明方程式 (10) 所对应的引力波频率为：

$$f_{\mathrm{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \tag{12}$$

并求出常数 p 的数值。

在 2015 年 9 月 14 日，由两条长 4 公里 L 型臂构成的 LIGO 探测器记录了 GW150914 事件。事件中两臂相对长

DELEGATION PRINT

度的变化，如图 1 所示。探测器的两臂与经过的引力波发生线性响应，利用该线性响应对引力波进行了仿真模拟。该引力波由 2 个以近圆轨道互相环绕运动的黑洞产生；因引力波辐射而导致能量流失直至轨道渐渐收窄并最后相撞。图 1 中，D 点后的最高值代表碰撞的一刻。

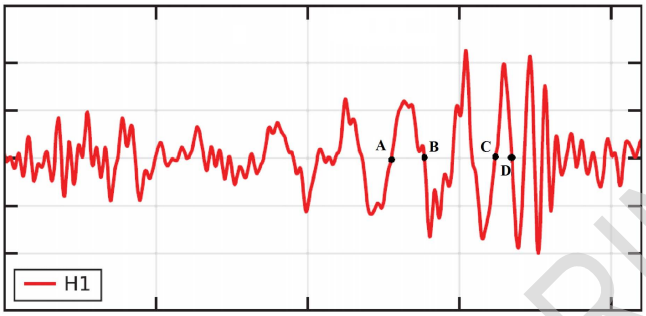


图 1，LIGO 探测器 H1 所侦测到的两臂长度的相对改变量。其中水平轴代表时间，点 A，B，C，D 分别代表时间 $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ 秒。

B.5 利用图 1 分别估算在时刻 1.0pt

$$t_{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{t_{\mathrm{B}} + t_{\mathrm{A}}}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{\mathrm{CD}}} = \frac{t_{\mathrm{D}} + t_{\mathrm{C}}}{2} \,. \tag{13}$$

的 $f_{\mathrm{GW}}(t)$ 的值。
假设在相撞前方程式 (12) 也是有效的（虽然严格来讲不是这样的），且 2 个星体拥有相同的质量。估算出该系统的啁啾质量 M_c 以及总质量的数值，以太阳质量 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg 表示。

B.6 试估算 $t_{\overline{\mathrm{CD}}}$ 时，2 个星体之间的最小轨道距离值。并利用此距离来估算每个星体的最大半径值 R_{max}。再以此半径计算太阳半径与该星体的最大半径之比 $R_\odot / R_{\mathrm{max}}$(太阳半径 $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km)。估计同一时刻每个星体在最小轨道距离时的轨道线速度 v_{col}，并计算该速度与光速之比值，v_{col}/c 1.0pt

从以上计算可得出结论：这两个星体均是致密而且是非常高速地运动着的。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-1

CHN (China)

中微子去了哪里?

当两个质子在大型强子对撞机（LHC）中以非常高的能量碰撞时，该碰撞可能会产生多个粒子，例如电子，μ子，中微子，夸克，以及它们各自的反粒子。大多数这些粒子可以被设在碰撞点周围的粒子探测器探测到。例如，在夸克经历一个称为强子化的过程中，夸克们变成了亚原子粒子的簇射，称为“喷注”。

另外，探测器中存在的强磁场甚至使非常高能量的带电粒子弯曲到足以确定其动量。ATLAS 探测器使用超导螺线管系统，能在探测器内部的碰撞点周围产生恒定均匀的 2.00 特斯拉磁场。但会使动量在某一数值以下的带电粒子强烈弯曲，以至于它们在磁场中不停转动并且极可能不被探测到。由于中微子的特性，它通过探测器逃逸时不会发生相互作用，因而完全不会被检测到。

数据：电子静止质量 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; 基本电荷，$e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

光速 $c = 3.00 \times 10^{8}$ m s^{-1} ; 真空介电常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m^{-1}，

A 部分 ATLAS 探测器物理

A.1 当磁场垂直于电子运动速度时，推导出电子圆形轨道的回旋运动半径 r 的表达式，将该半径表示为其动能 K；电荷量 e；质量 m 和磁场 B 的函数。假设电子是非相对论的经典粒子。 0.5pt

实际必须用相对论来处理 ATLAS 探测器内部产生的电子。然而，当考虑相对论动量时，回旋运动半径的公式也适用于相对论运动。

A.2 计算能使电子沿径向逃离探测器内部的动量最小值。探测器内部呈圆柱形，半径为 1.1 米，电子恰好在圆柱体中心的碰撞点产生。用 MeV/c 表达你的答案。 0.5pt

当加速度垂直于速度时，电荷 e 和静止质量 m 的相对论粒子发射电磁辐射，称为同步辐射。发射功率是

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

其中 a 是加速度，$\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$。

A.3 当粒子速度非常接近于光速时，称其为超相对论粒子。对于超相对论粒子，发射功率可表示为： 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2 ,$$

其中 ξ 是实数，n, k 是自然数, E 是带电粒子的能量，B 是磁场。求出 ξ, n 及 k 的值。

A.4 在超相对论极限中，电子能量的时间函数是： 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t} ,$$

其中 E_0 是电子的初始能量。推导出 α 的表达式，它是以 e, c, B, ϵ_0 和 m 表示的函数形式。

DELEGATION PRINT

A.5	考虑在碰撞点处产生的电子，沿径向方向射出，其能量为 100GeV。当电子逃离探测器内部时，估算其因同步辐射而损失的能量值，以 MeV 为单位。	0.5pt

A.6	在超相对论极限下，推导出电子回旋角频率的表达式，它是一个关于时间的函数。	0.5pt

B 部分. 寻找中微子

在图 1 中，两个质子之间的碰撞会产生顶夸克（t）和反顶夸克（$\bar{t}$），它们是迄今为止检测到的最重的基本粒子。顶夸克会衰变成 W^+ 玻色子和底夸克（b），而反顶夸克衰变成 W^- 玻色子和反底夸克（$\bar{b}$）。在图 1 所示的情况中，W^+ 玻色子衰变为反 μ 子（μ^+）和中微子（ν），W^- 玻色子衰变为夸克和反夸克。本题的任务是使用一些检测到的粒子动量来重建中微子的所有动量。**为简单起见，除顶夸克和 $W^\pm$ 玻色子外，本题中的所有粒子和喷注都将被视为无质量的。**

除了中微子沿 z 轴的动量分量，其他所有顶夸克衰变产物的动量可以通过实验来确定（见下表）。探测器探测到的终态粒子的总线性动量仅在横向平面（xy 平面）上为零，而沿着碰撞线方向（z 轴）则不为零。因此，人们可以从横向平面中的缺失动量中找到中微子的横向动量。

在 2015 年 6 月 4 日，LHC 的 ATLAS 实验在 00:21:24 GMT+1 时记录了质子 - 质子碰撞，如图 1 所示。

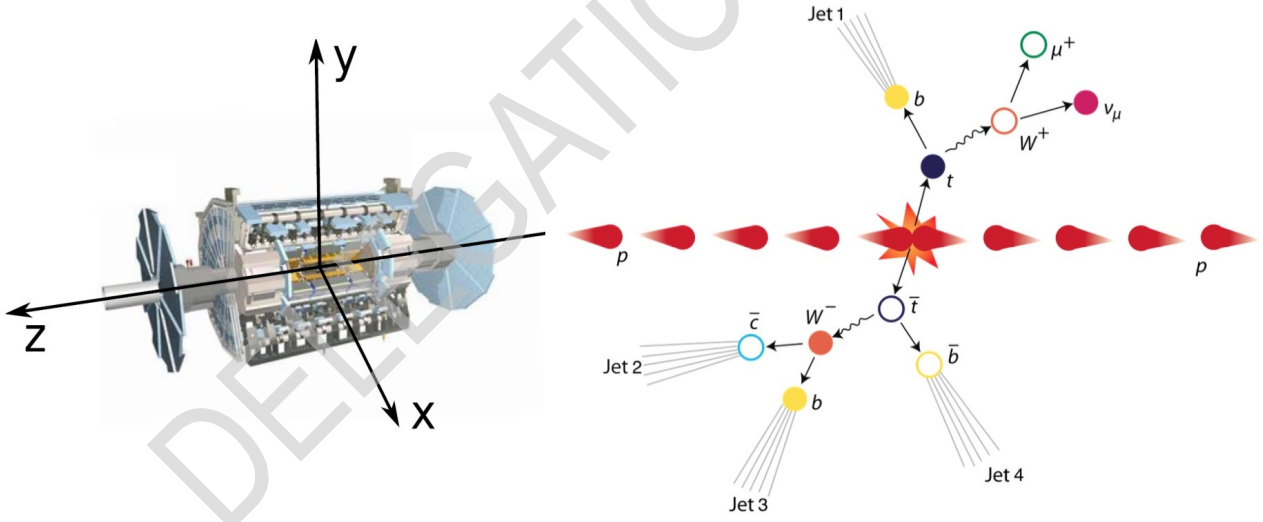


图 1. ATLAS 探测器的坐标系（左）和质子 - 质子碰撞（右）的示意图。

来自顶夸克衰变的三个终态粒子的动量，包括中微子的，其各部分分量写在下面。

粒子	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
反 μ 子（μ^+）	-24.7	-24.9	-12.4
喷注 1 (j_1)	-14.2	$+50.1$	$+94.1$
中微子（ν）	-104.1	$+5.3$	—

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-3

CHN (China)

B.1 推导出一个方程，将 W^+ 玻色子质量平方 m_{W}^2 与上表中的中微子和反 μ 子动量分量联系起来。用中微子和反 μ 子横向动量、 1.5pt

$$\vec{p}_{\mathrm{T}}{}^{(\nu)} = p_x{}^{(\nu)}\hat{\imath} + p_y{}^{(\nu)}\hat{\jmath} \text{ 和 } \vec{p}_{\mathrm{T}}{}^{(\mu)} = p_x{}^{(\mu)}\hat{\imath} + p_y{}^{(\mu)}\hat{\jmath},$$

以及它们的 z 轴动量分量，$p_z{}^{(\mu)}$ 和 $p_z{}^{(\nu)}$ 来表示你的答案。

B.2 假设 W^+ 玻色子质量 $m_{\mathrm{W}} = 80.4\,\mathrm{GeV}/c^2$，计算出沿 z 轴的中微子动量分量即 $p_z{}^{(\nu)}$ 的两个解的数值，以 GeV/c 为单位表示你的答案。 1.5pt

B.3 1.0pt

计算前面两个解各自所对应的顶夸克质量。用单位 GeV/c^2 表示你的答案。
[如果你没有在 B.2 中得出这两个解，使用

$$p_z{}^{(\nu)} = 70\,\mathrm{GeV}/c \quad \text{and} \quad p_z{}^{(\nu)} = -180\,\mathrm{GeV}/c$$

对于顶夸克质量的测量，归一化的碰撞事件的频数（由实验测定的），有两个部分：称为“信号”(相应于顶夸克衰变) 和“背景”(相应于其他过程而不包括顶夸克事件) 。实验数据则包含了这两个过程，见图 2。

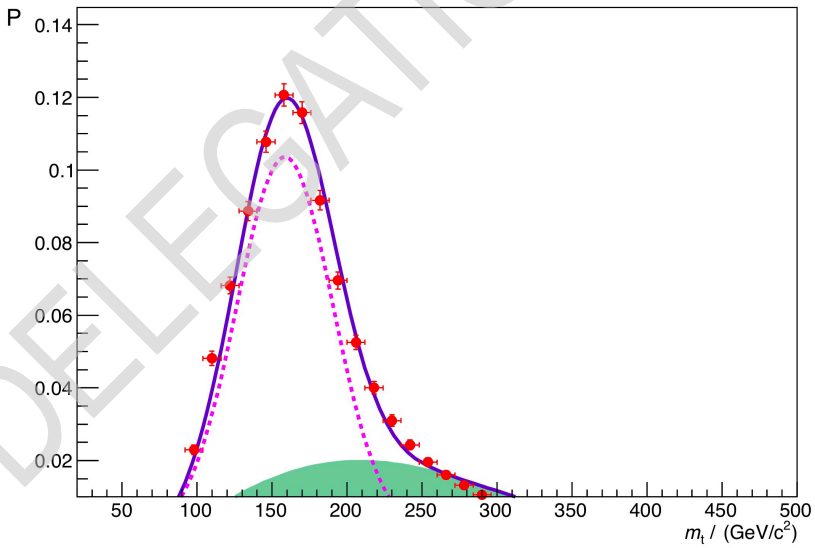


图 2. 由实验测定的顶夸克质量分布，即，不同顶夸克质量的事件发生的频数的归一化图。图中点对应于数据。虚线对应于“信号”，阴影对应于背景。

B.4 根据图中顶夸克的质量分布，前面得出的两个解中，哪一个更可能是正确的？对于更可能是正确的解，由图估计其概率。 1.0pt

B.5 利用那个更可能正确的解，计算顶部夸克在衰变前行进的距离。假设顶夸克静止时的平均寿命为 5×10^{-25} s. 1.0pt

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-1

CHN (China)

生命系统中的物理学

数据：大气压强 $P_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa $= 760$ mmHg

A 部分. 血液流动的物理学

在这一部分，考虑两个简化模型，来分析血管中的血液流动。血管的形状近似圆柱形，我们知道，在刚性圆柱体中，对于稳定的、非湍流的不可压缩流体，圆柱体两端流体的压强差可由下面公式给出：

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q \,, \tag{1}$$

其中 ℓ 和 r 是圆柱体的长度和半径，η 是流体粘度系数，Q 是体积流动速率，即单位时间内通过圆柱截面的流体体积。血管内的压强差，通过这个表达式，是通常能够得到正确的数量级的，无论是否考虑脉搏、血管的可压缩性和形状的不规则，也无需考虑血液不是一种简单的流体，而是细胞和血浆的混合物。此外，这个表达式与欧姆定律有着相同的形式，可以将体积流动速率理解为电流，压强差理解为电压，因子 $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ 理解为电阻。

以图 1 所示的对称的小动脉网络为例，该动脉网络将血液输送到人体组织的毛细血管床。在这个网络中，在每个分支中每个血管分成两个相同的血管。而较高级次的血管更细且更短：考虑两个连续级次 i 和 $i+1$，其血管半径和长度满足关系 $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ 与 $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$

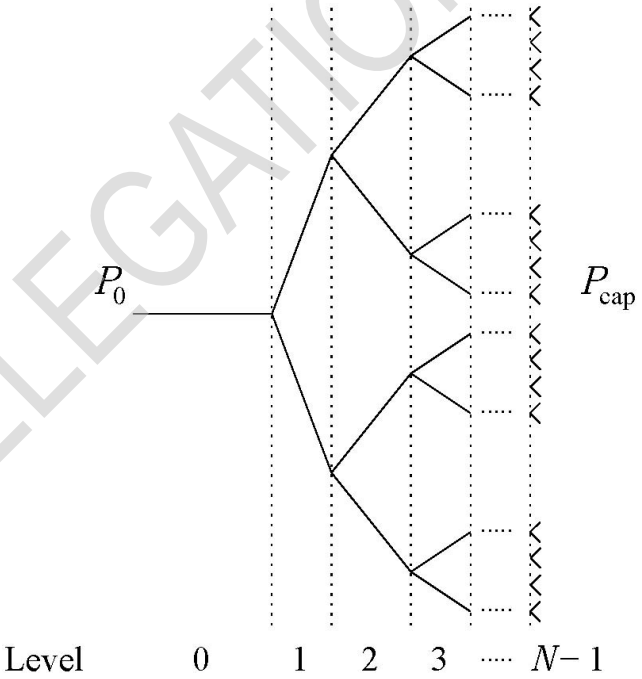


图 1. 小动脉网络

A.1	求出在任一级次 i 的血管内体积流动速率 Q_i 的表达式，它是总的级次数 N、粘度系数 η、第 0 级的血管半径 r_0 和长度 ℓ_0、以及 0 级小动脉压强 P_0 和毛细血管床压强 P_{cap} 之间的压强差 $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ 的函数。	1.3pt

DELEGATION PRINT

A.2 如果 0 级小动脉的半径为 6.0×10^{-5} m，长度 2.0×10^{-3} m，计算 0 级小动脉中体积流动速率 Q_0 的数值。已知小动脉入口处的压强为 55mmHg，血管网络有 N =6 个级次连接小动脉和毛细血管床，毛细血管的压强为 30mmHg，血液粘度 $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1}，计算出 Q_0 的数值结果，以 ml/h 为单位。 0.5pt

血管的 LCR 等效电路

由于一些原因，刚性圆柱血管的近似是不精确的。特别重要的是，必须考虑到流量随时间变化，以及在由心脏驱动的血液循环中压强变化时血管直径的变化。此外，实际情况中，在较大的血管内，一个循环中的血压变化很大，而在较小的血管中，压强波动的幅度要小得多，而且流动几乎不随时间变化。

当一个弹性血管的压强增大时，它的直径会增加，从而允许在血管中储存更多的血液，并在压强下降时将其输送出去。可以通过在我们前面描述的模型中加入一个电容，来考虑血管的弹性行为。此外，当考虑到血液流动速率与时间有关时，还必须考虑到：血液的惯性正比于它的密度 $\rho = 1.05 \times 10^3$ kg m^{-3}。在我们的这个模型中，惯性可以用电感来描述。在图 2 中，我们画出了这个模型中单个血管的等效电路。等效电容和电感分别由下式给出：

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}\,, \tag{2}$$

其中，h 为血管壁厚度，E 为动脉血管的杨氏模量，该系数描述了施加外力时血管组织大小的变化。杨氏模量具有压强单位，小动脉的杨氏模量在 $E = 0.06$ MPa 量级。

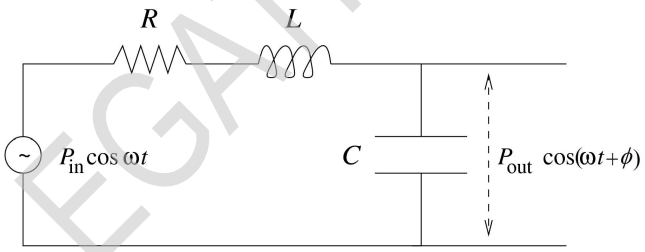


图 2. 单个血管的等效电路

A.3 对于一个角频率为 ω 的血液流动，在平衡时，求出血管出口的压强的振幅 P_{out} 的表达式，它是入口处压强的振幅 P_{in}、等效电阻 R、电感 L 和电容 C 的函数。在低频时，要保证出口处的压强振幅小于入口处的压强振幅，那么 η、ρ、E、h、r 和 ℓ 这几个参量之间要满足一个条件，求出这个条件。 2.0pt

A.4 对于 **A.2** 中的血管网络，估算最大的动脉壁厚度 h，以使得 **A.3** 中的条件得到满足 (假设 h 与级次无关)。 0.7pt

B 部分 肿瘤生长

肿瘤的生长是一个非常复杂的过程，细胞增殖和自然选择等生物学机制与物理学机制交织在一起。事实上，要定量地描述肿瘤生长，就必须考虑血流动力学、血氧和营养的扩散、细胞和施加在组织上的力。在这部分问题中，我们将考虑一个简化的肿瘤生长模型，它可以解决实体肿瘤中常见的压强增加的问题。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-3

CHN (China)

一组正常的细胞形成一个组织，被不可扩展的基底膜包围，基底膜迫使这个组织始终保持相同的形状：一个半径为 R、大小不变的球体 (图 3)。

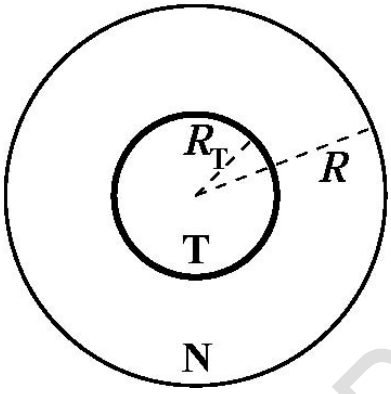


图 3. 简化的肿瘤

最初，组织所受到的净力为 0，也就是每个点的压强都等于大气压。

当 $t = 0$ 时，肿瘤在这个球体的中心开始生长，随着它的生长，组织内的压强增加。考虑到组织 (包括正常组织，用 N 表示，和肿瘤组织，用 T 表示) 是可压缩的，这样它们的密度 ρ_{N} 和 ρ_{T}, 随着压强而线性增长:

$$\rho_{\mathrm{N}} = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_{\mathrm{N}}}\right), \quad \rho_{\mathrm{T}} = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_{\mathrm{T}}}\right), \tag{3}$$

其中 ρ_0 是周围未受压的正常组织密度，p 是受压缩组织压强与大气压强的压强差，$K_{\mathrm{N}}, K_{\mathrm{T}}$ 分别为是正常和肿瘤组织的压缩系数 (或体积模量)。一般来说，肿瘤较硬，所以体积模量较高。

B.1 当肿瘤生长时，正常细胞的质量不会改变。求出肿瘤体积与总组织体积的比值 $v = V_{\mathrm{T}}/V$，它是 μ 和 κ 的函数。μ 为肿瘤质量 (M_{T}) 和正常组织质量 (M_{N}) 的比值，$\mu = M_{\mathrm{T}}/M_{\mathrm{N}}$；κ 为正常组织和肿瘤组织体积模量的比值，$\kappa = K_{\mathrm{N}}/K_{\mathrm{T}}$ 1.0pt

热疗有时与化疗和放治一起用于治疗癌症。在热疗中，癌细胞被选择性地从正常体温 37 °C 加热到 43 °C 以上，从而导致癌细胞死亡。研究人员目前正在开发一种碳纳米管药物，在碳纳米管上面覆盖着能够与肿瘤细胞结合的特殊蛋白质。当组织受到近红外辐射时，纳米管会比周围的组织吸收更多的辐射，因此可以有选择地加热与它们连在一起的肿瘤细胞。

考虑肿瘤组织、正常组织以及周围组织具有相同的恒定导热系数 k，即在本题的模型中, 在单位时间内通过半径为 r 的球面的单位面积的能量等于温度关于 r 的导数乘以 k。碳纳米管在肿瘤组织内均匀分布，并在单位体积内释放功率为 $\mathcal{P}$ 的热能。

B.2 稳态条件下，求出肿瘤中心的温度，它是 $\mathcal{P}$、k、人体温度、以及肿瘤半径 R_{T} 的函数。 1.7pt

B.3 对一个半径为 5.0cm 的肿瘤块加热到 43.0° C 以上，计算单位体积所需要的最小功率 $\mathcal{P}_{\mathrm{min}}$ 的值。已知肿瘤组织的热导率为 $k = 0.60$ W K^{-1}m^{-1}. 0.5pt

考虑肿瘤由 **A.1** 问题中所示的枝状结构的血管网络供血。随着肿瘤的增长，当其压强 p 大于最细的毛细血管的压强 P_{cap} 时，这些血管的半径将减少 δr。如果肿瘤的压强 p 达到一个临界值 p_{c}(相应的半径减少 δr_{c})，最细的

SELECTION PRINT

Q3-4

毛细血管就会崩溃，严重影响肿瘤的供血。压强和半径的变化可以通过以下唯象关系来关联：

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_{\text{c}}}{P_{\text{cap}}} - 1\right)\left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_{\text{c}}}\right)\frac{\delta r}{\delta r_{\text{c}}}\,. \tag{4}$$

考虑当肿瘤压强增加时，只是最小的血管 (级次 $N-1$) 半径发生了改变。

B.4 在线性区域内 (即认为 $p - P_{\text{cap}}$ 很小)，求出最细的血管的流动速率的相对下降率，$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$，它是肿瘤体积比值 $v = V_{\text{T}}/V$、以及 K_N,N ,p_{c}, δr_{c}, r_{N-1}, P_{cap} 的函数。 2.3pt

DELEGATION PRINT

纸晶体管 (10 分)

现代社会的电子技术建立在一种简单而强大的器件之上: 晶体管。晶体管可以作为开关和放大器。开关模式可用于存储和处理数字信息。

在此我们将分析两种场效应晶体管 (FETs)：JFET(结型场效应晶体管) 和 TFT(薄膜场晶体管)。

我们将简要地解释一下 FET 是如何工作的。一个 FET 是一种非线性的 3 极器件 (三个极分别称作栅极 G; 源极 S; 漏极 D)，通过作用在栅极和源极间的电压来控制源极和漏极之间的电流。用一个简单的，虽然不太完美的比喻，一个 FET 的工作原理类似于水龙头，旋钮相当于栅极，用来控制水流。

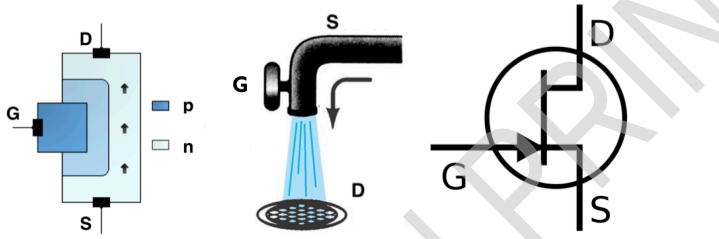


图 1. n-通道 JFET 的原理图 (左)，其流水控制类比模型 (中) 和电路符号 (右)。JFET 结构图中的箭头表示源极 (S) 和漏极 (D) 之间的电流流过窄的 n-通道 （或者沟道）。沟道的宽度取决于栅极 (G) 和源极 (S) 之间所施加的电压。

结型场效应晶体管（JFET）依赖于两种半导体材料（比如 p 和 n 型掺杂硅）之间的结的特性，因此而得名。JFET 有一个狭窄的通道，电流通过该通道在源极和漏极之间流动，在 n 沟道 FET 中，该沟道由 n 型半导体构成。沟道宽度可以通过在栅极和源极之间施加一个**负**电压 $V_{GS} = V_G - V_S$ 来精确控制。对于固定的 V_{GS}，源极和漏极之间的电流与这两个极之间的电压 $V_{DS} = V_D - V_S$ 的关系不是线性的。然而，对于小的 V_{DS} 电压，可以认为电流与所施加的电压成线性关系，因此 JFET 表现为欧姆行为。然而，输出电阻 $R_{DS} = V_{DS}/I_{DS}$ 很大程度上取决于所施加的 V_{GS} 电压，近似遵循以下规律:

$$R_{DS} = \frac{R_{DS}^0}{1 - V_{GS}/V_P}, \tag{1}$$

其中 R_{DS}^0 为 $V_{GS} = 0$ 时的输出电阻，$V_P < 0$ 是 JFET 的一个参数，称为夹断电压。显然，在夹断电压下，FET 会阻止电流流动。

对于任何固定的 $V_{GS} > V_P$ 时，随着 V_{DS} 的增大，源极和漏极之间的电流将开始偏离线性关系，在某一时刻会趋于饱和，从而达到一个几乎恒定的值。将 $V_{GS} = 0$ 时的饱和电流记为 I_{DSS}。在饱和情况下 (施加大的 V_{DS})，饱和电流将依赖于 V_{GS}, 公式如下:

$$I_{DS} = I_{DSS}\,(1 - V_{GS}/V_P)^2\,. \tag{2}$$

我们应该强调 JFET 的两个非常重要的特征。虽然控制输出电阻的电压可以很低，但是其输入电阻 ($R_{GS} = V_{GS}/I_{GS}$) 却极其高，通常大于 $10^9\ \Omega$，所以这个器件只需要很少的输入电流。此外，小型 JFET 的电容非常低，这使其成为非常快速的器件，其开关速度大于 MHz。

现在我们继续介绍不同类型的 FET，TFT(薄膜晶体管) 的工作原理。

和其它 FET 一样，TFT 通过在第三个电极 (即栅极) 上所施加的电压来控制源极和漏极之间的电流。

栅极与半导体层在物理上被绝缘体分开，它允许建立一个垂直的电场来控制半导体中存在的自由载流子 (场效应)。绝缘层可以被一种电解质膜所取代，例如存在移动离子的纸张 (见图 2)，在这种情况下，在栅极上施加的电压将会把带有相反电荷的离子推向半导体界面，产生一层离子电荷，这样就可以调节半导体材料中自由载流

DELEGATION PRINT

子的浓度（这称为电解质门控晶体管- EGTs)。里斯本诺瓦大学 (Universidade Nova) 的研究人员是 2008 年“纸晶体管”研究的先驱，也是国际上该领域的领跑者。

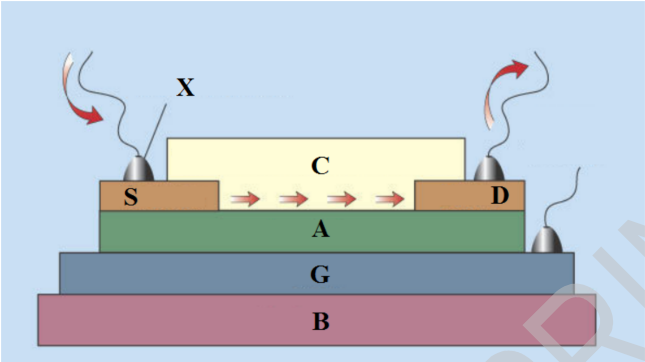


图 2. 在这个问题中要用到的纸薄膜晶体管 (TFT) 的原理图。S -源极；D –漏极；G –栅极；A-纸（绝缘体)；B-衬底；C-半导体层 (镓-铟-氧化锌 (GIZO))：X-金属触点。箭头表示电流流动方向。

与 JFETs 类似，TFT 晶体管可以在两种基本的操作模式下工作，线性模式和饱和模式。与 JFET 相比，TFT 的固有电容是与设备性能有关的一个参数。

在本实验题中，你将研究 n 沟道 JFET 和纸薄膜晶体管 (TFT) 的工作原理。

你将通过在栅极 G 和漏极 D 分别施加不同的电压 (V_{GS}) 和 (V_{DS})，来测量 S 和 D 之间的电流 (I_{DS})，从而确定这些器件的特征曲线 (CCs)。

最重要的两个特征曲线是输出和转移曲线:

- **输出曲线：**在此曲线中，源极和漏极之间的电流 (I_{DS}) 将被测量，并绘出该电流随着源极和漏极之间电压 (V_{DS}) 变化的函数关系。测量时，V_{DS} 从 0 V 逐步增大到 +3V，同时保持 V_{GS} 恒定。
- **转移曲线：**对于这条曲线，要求测量 I_{DS}，并绘制其随着 V_{GS} 变化的关系曲线。测量中，V_{DS} 保持为一个合适的值，使晶体管工作在**饱和模式**，且 V_{DS} 保持不变；而 V_{GS} 从-3V 逐步增大到 0V.

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-3

CHN (China)

装置

本实验题提供了以下一套实验装置 (图 3):

1. 万用表

2.JFET 晶体管 (放在贴有标签的塑料袋中)

3. 带有鳄鱼夹的导线（图中编号 10）

4. 扁平鳄鱼夹（编号 4，装在塑料袋里)

5. 电池组 (4 节 1.5 V)

6. 电池座

7. 带支架的小面包板

8. 小型电路面包板中用于连接的跳线（编号 3）

9.HB 铅笔

10．银线笔 (电路划线笔)

11 计时器

12 带有印刷电路并嵌入 TFT 的纸张，该 TFT 用纸作为绝缘层 (图 4) 13 用于书写的袋子 (内含一支水笔，一支铅笔，一块橡皮/卷笔刀，一把尺）

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-4

CHN (China)

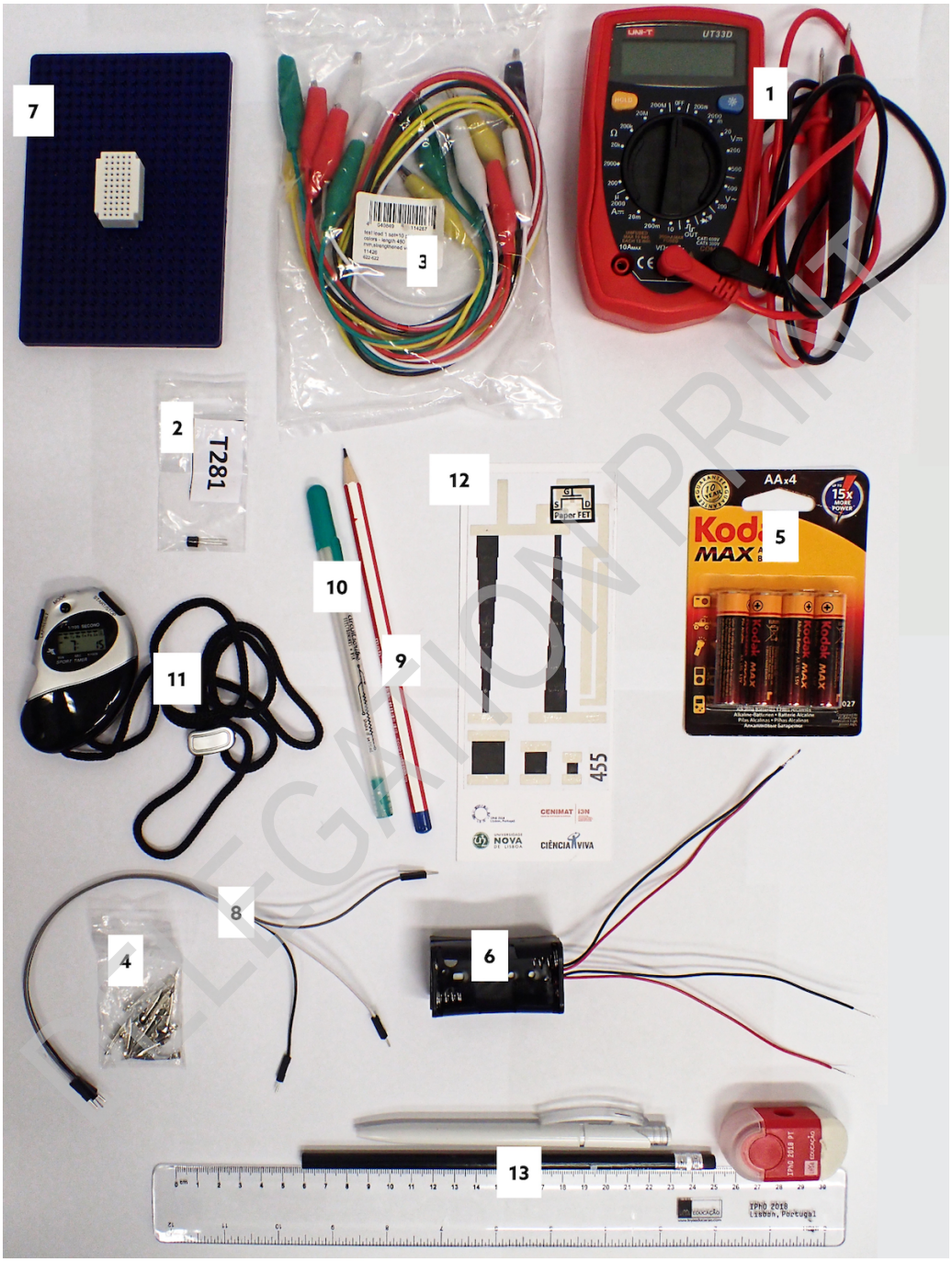


图 3 实验装置

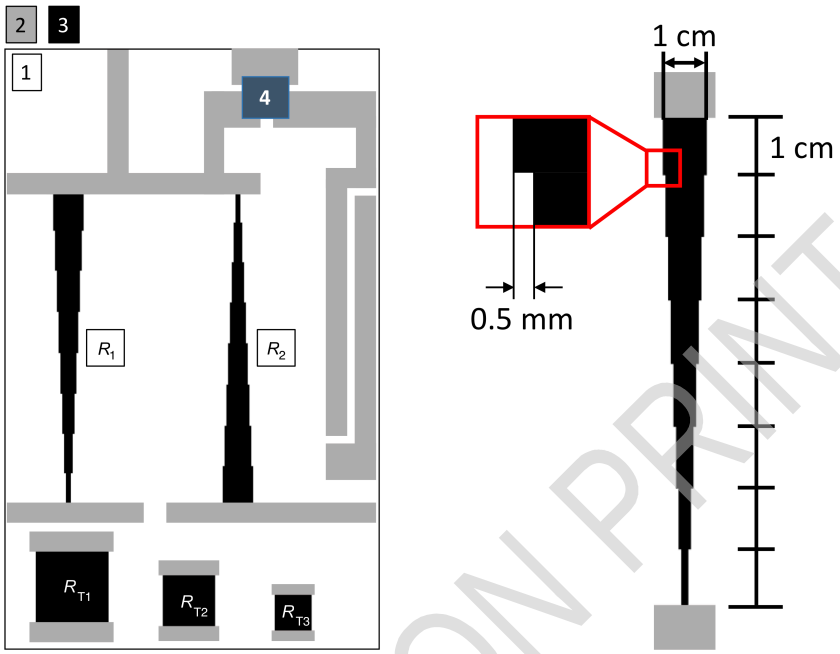


图 4。左边：实验装置中带有印刷电路的纸张：纸 (1)，银导线 (2)，碳电阻轨道 (3), 纸晶体管 (4), 分压电阻（R_1 和 R_2）。右边: 分压电阻的几何尺寸示意图（段与段之间的宽度之差恒定为 0.5 毫米）

重要的预防措施: 不要折叠带有印刷电路并嵌入晶体管的纸张，因为这样很容易损坏它。在测量过程中让它尽可能地保持平整，以便达到最好的测量结果。

测量时，必须考虑以下**重要信息**。

DELEGATION PRINT

- 万用表应始终在**直流模式**下操作。
- 万用表不能自动转换量程，你应该仔细为测量值选择最适合的量程。如果发生超量程现象，万用表将显示“1”或“-1”(显示为左对齐)，分别对应正值和负值，为此，你应该将测量值调到更低的范围。
- 低电流范围由一根 315mA 的保险丝保护。**必须避免在电池和万用表之间造成短路**，因为短路时的高电流会把保险丝烧断!
- 在电压模式下工作时，万用表的内阻为 $10\ \mathrm{M\Omega}$。
- 当用作安培计时，不同电流时万用表的内阻见下表所示。

量程	R_{int}/Ω
200 mA	1.0
20 mA	10
2 mA	100

表 1. 当万用表作为电流表使用时，不同电流时的万用表内阻。

因此，当万用表用作直流电流表模式时，对于三个可用的直流量程的任何一个量程，在满量程时，万用表的接线端之间都会有高达 200 mV 的压降。

DELEGATION PRINT

A 部分 确定电路

为了获取所需的 V_{DS} 和 V_{GS} 电压，需要使用打印在纸上的两个碳电阻 (R_1, 和 R_2，见图 4) 和分压电路来测量正确的电压降。R_1 和 R_2 是电压分压电路的总电阻 (R_{tot})。当在 R_1 上施加一个恒定电压 (在本例中为 3 V 的电池), 电阻 R_1 上将有一个从约 3V(V_{in}，电池的正极电压) 到地 (0 V, 从现在开始，我们指定两个电池组的共同接触点为接地点) 的电压降。为了得到想要的电压 V_{out}，可以将 R_{tot} 分为两个电阻 (R_{x}, R_{y})(图 5)。

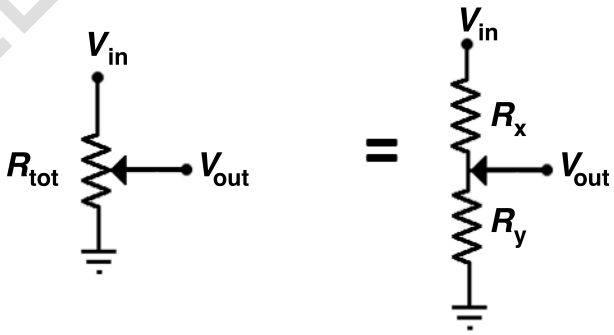


图 5. 分压电路。

A.1 推导输出电压 V_{out} 的表达式，它是关于 V_{in} 和“电阻 R_{x} 和 R_{y}”的函数。 0.2pt

A.2	用万用表测量纸张底部的三个测试电阻 (R_{T2}, R_{T2} 和 R_{T3}) 的阻值。在银触点的不同位置上，进行多次测量。将测量值填入到答题卡中。对于每个测试电阻，计算其平均值并估计不确定度。	0.5pt

A.3	证明一个电阻率为 ρ 的正方形薄膜的电阻与它的边长无关。这种与边长无关的电阻称为薄膜电阻，用 $R_{\square}$ 来表示。	0.3pt

A.4	从 A .2 的数据中计算出碳膜电阻的平均值，并计算得到碳膜的电阻率 ρ，并估计其不确定度 (认为碳膜厚度 t 为 20 ± 1 μm)。	0.4pt

A.5	证明电阻 R_1、R_2 的理论值为 $R_1 = R_2 = \kappa R_{\square}$, $\kappa \sim 14.2897$。测定 R_1 和 R_2，并将值记录在答题卡中。确定 κ 的实验值，并与理论值进行比较。	0.5pt

使用所提供的银线笔，沿所提供的每个电阻器绘制 7 条等距的导电线 (如图 6 所示)。这些独立的线将作为分压器的接触点。

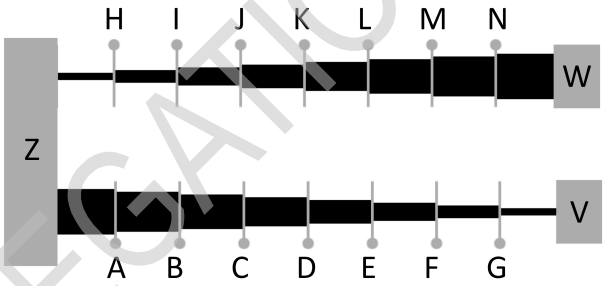


图 6. 接触点的画线示例和命名。

A.6	测定所有接触点的电阻 R_x 和 R_y。R_x 定义为接触点与点 V(电阻 1) 或 W(电阻 2) 之间的电阻，R_y 定义为接触点与点 Z 之间的电阻。将测量值填入答题卡的表格中。	0.3pt

将 4AA 电池插入电池盒中。请仔细观察正确的电池极性并且确保没有短路。然后，按图 7 中所示，连接好电池。确保不要用鳄鱼夹损坏银导线。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-8

CHN (China)

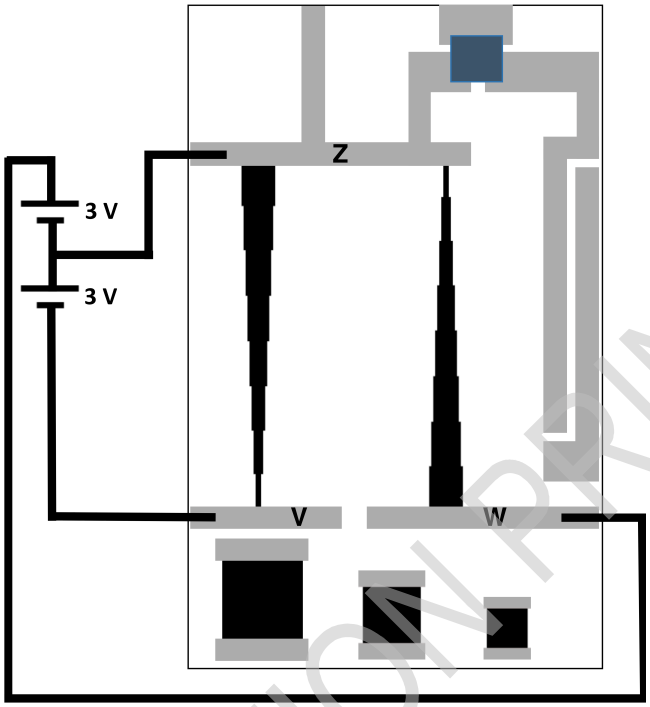


图 7. 电池连接

A.7	测定每个接触点的输出电压 V_{out}，V_{out} 为相对于 Z 点的电压测量值，将数值填入答题卡的表格中。	0.3pt

电路的测量到此结束，下面你可以开始测量 JFET 晶体管的特征曲线了。

B 部分. 描述 JFET 晶体管的特征曲线。

为描述 JFET 晶体管的特征，要用到如图 8 所示的装置。首先，在提供的 JFET 晶体管上识别 S，D 和 G 三个电极——**注意要正确识别这三个电极，因为器件并不是对称的！**你可以使用所提供的小面包板安装 JFET 晶体管。提供的跳线将与小面包板一起使用。

使用提供的导线将晶体管的栅极和源极连接到地（电路中的点 Z 为 0 V）。在整个 B 部分的实验过程中，JFET 的源极应该始终与地面保持连接。

DELEGATION PRINT

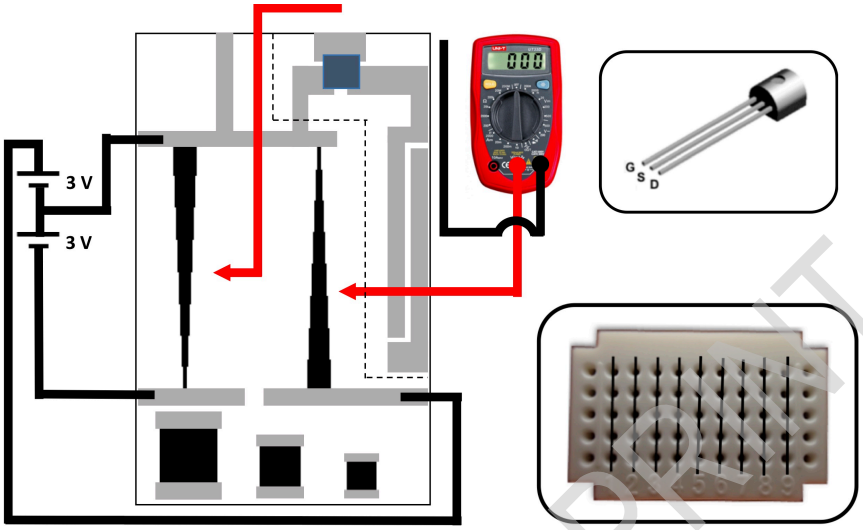


图 8. 用于确定 JFET 特征曲线的实验装置。包含 TFT 在内的虚线区域内的电路部分不会在实验题的 B 部分中使用。右上插图显示了如何识别 JFET 晶体管的栅极 G、源极 S 和漏极 D。右下的插图显示了迷你面包板的孔是如何连接的。在同一编号的列上的所有孔都是在内部相连接的，而与其他列的孔则是隔绝开的。图中万用表仅仅是说明：使用万用表旋转档位，以选择合适的测量模式和范围。

B.1	将晶体管的栅极 G 连接到地 ($V_{GS} = 0$)。然后在直流电流模式下, 将万用表的一个表笔连接到晶体管的漏极，而另一根表笔则连接分压器的最高电压处。在答题纸卡上记录电流 I_{DS} 的值。	0.2pt

B.2	保持 $V_{GS} = 0$，在漏极加上不同的正电压，测定相应的电流 I_{DS}。然后改变电路，在晶体管的栅极和源极之间施加一个负电压（$V_{GS} < 0$），并重复电流 I_{DS} 的测量，I_{DS} 是漏极和源极之间所施加的正电压的函数。在答题卡的表格中填入你的测量值。	0.8pt

当分压电路连接到低电阻负载时（图 9），电压分压器所提供的电压值 V_{out}^{L} 与负载为高电阻时所测量到的标称值 V_{out} 不同，比如高阻抗电压表的情况。

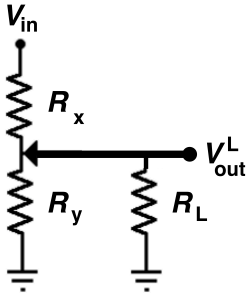


图 9. 带负载的分压器

DELEGATION PRINT

B.3	考虑将电压分压器连接到负载 R_L 的情况。推导校正因子 $f = V_{out}^{L}/V_{out}$ 的表达式，它是 R_L、R_x 和 R_y 的函数。	0.2pt

当 $V_{GS} = 0$ 时，JFET 晶体管具有很小的输出电阻 $R_{DS}^{0} \sim 50\,\Omega$。然而，当栅极相对源极的极性为负时，这个输出电阻会显著增加。对于 $V_{GS} < 0$，输出电阻与方程（1）给出的规律非常符合。

B.4	使用适当的校正因子，测定所有在 B.2 中测量点的 V_{DS}，即漏极和源极之间的电压降。该问中所用的 JFET 的标称数据参考如下：$R_{DS}^{0} = 50\,\Omega$，$V_P = -1.4$ V	1.2pt

B.5	绘制 JFET 晶体管的输出曲线 $I_{DS}(V_{DS})$	0.5pt

B.6	考虑晶体管在小 V_{DS} 时的工作特性。对于不同的 V_{GS}，测量 JFET 的 R_{DS} 的值，并依据数据画出 V_{GS} 关于 R_{DS} 的关系图。	0.5pt

B.7	取 $V_{DS} \sim +3$ V，绘制 JFET 晶体管的转移曲线（$I_{DS}(V_{GS})$）。	0.3pt

当 JFET 晶体管处于饱和状态时，电流 I_{DS} 与方程（2）给出的规律非常符合。

B.8	从测量的数据中，确定 I_{DSS} 和夹断电压 V_P。将该 V_P 与其标称值相比较。	0.4pt

JFET 晶体管的一个重要参数，特别是当在放大器中使用它时，就是所谓的晶体管转导率 g，其定义为

$$g = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}}. \tag{3}$$

对于两个变量的函数 $f(x, y)$，符号 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示 f 对 x 的偏导，此时 y 保持不变。

B.9	依据测量的转移曲线，计算 $V_{GS} = -0.50$ V 时的转导率。将其与从模型方程（2）中获得的计算值进行比较。	0.4pt

C 部分. 纸质薄膜晶体管（2.0 分）

从现在开始，不再考虑 JFET，所有的任务和问题都与位于印刷电路右上角的纸质薄膜晶体管（TFT）有关。TFT 栅极、源极和漏极都在图 10 中标出了。将 TFT 栅极和源极接地。在这部分问题中，薄膜 TFT 的源极应该始终与电池组的公用端相连接，该端电压为 0 V，如图 10 所示。通过分压器（图 10），将晶体管极性调整为 $V_{DS} > 0$。检查安培表有电流通过。

DELEGATION PRINT

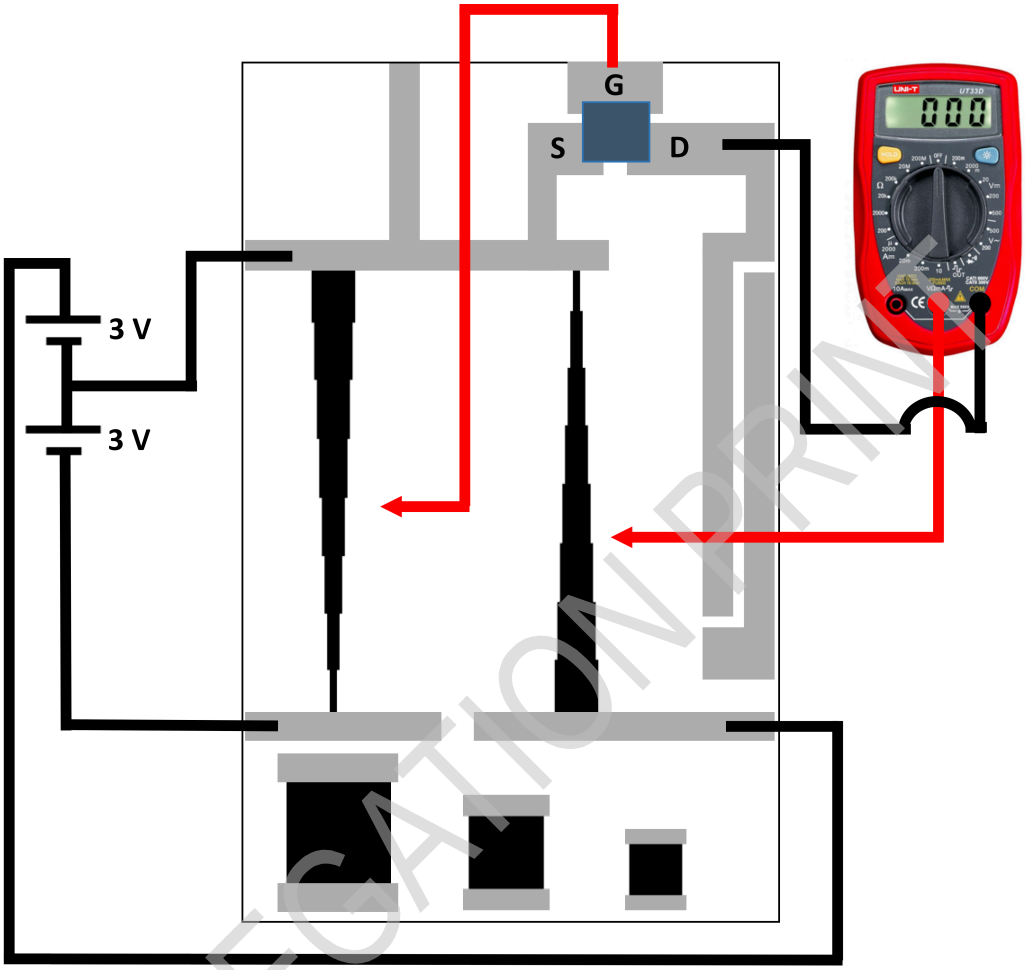


图 10. 纸质 TFT 的测量装置。万用表的图片仅仅是为了定性说明: 在万用表的旋转档位中必须选择合适的测量方式和范围。

DELEGATION PRINT

C.1	设定 $V_{DS} = +3.0$ V. 通过加上电压 $V_{GS} = -3.0$ V 来关断晶体管。等待 1 分钟，这样晶体管就会关断。在答题纸上写下关断时的电流值（称为电流剩余值）I_{closed}。然后，使得 $V_{GS} = 0$，开通晶体管，同时保持 $V_{DS} = +3.0$ V。从打开晶体管的瞬间开始到至少 5 分钟，测量数据 $I_{DS}(t)$），它是随着时间而变化的函数，并记录在答题卡上。	0.8pt

C.2	作图 $I_{DS}(t)$。$I_{DS}(t)$ 是两个随时间变化的 e 指数过程的叠加，其中一个 RC 电路的时间常数（τ_2）比另一个 RC 电路的时间常数（τ_1）大很多，确定较短的时间常数 τ_1。	1.2pt

D 部分. 反转电路

在微电子电路中，最重要的电路之一是反转器，它能够对输入的数字进行反转。例如，如果 V_{in}=high，那么 V_{out}=low，反之亦然。晶体管再次被用在这样的电路中, 最简单的设计之一是所谓的公用源（即源极接地）放大器, 如图 11 所示, 使用了晶体管和负载电阻 (R_L)。在这种情况下，V_{in}=V_{GS} 并且 V_{out} 是晶体管的漏极电压。因此，在这一部分中，我们将监测 V_{GS} 从-3 到 0 V 变化的情况下 V_{out} 发生的变化。

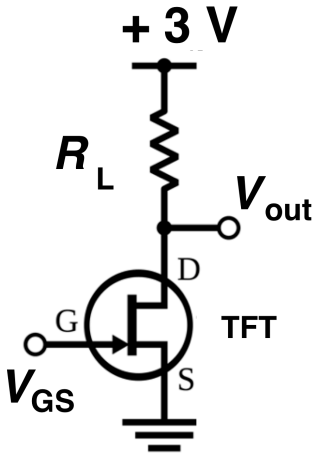


图 11. 公用源 (源极接地) 放大器和反转电路。

在图 11 的装置中，晶体管是纸质 TFT，R_L 是你现在要手工添加的负载电阻，通过将晶体管的漏极与 $_{in}$ 极用铅笔划线连接起来，如图 12 所示。当你在纸张上划线时，实际上在纸上沉积了薄薄的导电石墨层，所以你在纸上描的层越多，电阻就会越低。在用铅笔画电阻 R_L 时，一定要持续地监控它的电阻值。为了使 $_{out}$ 尽可能接近于 0 V，负载电阻应该足够大。因此，在画电阻时，你可以用铅笔画得重些来减少 R_L 或橡皮擦除来增加它。你的目标应该是获得一个与目标值相差不超过 10

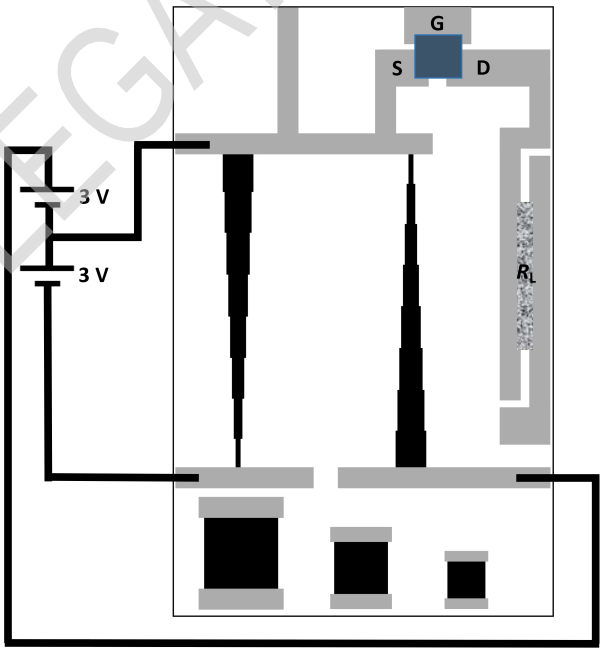


图 12. 用于反转的公用源（源极接地）放大器装置。

使用 HB 铅笔，手工绘制一个具有 $R_L \simeq 200\ \mathrm{k}\Omega$ 的碳电阻器，作为纸薄膜 TFT 的负载电阻，来构建反转电路（见图 12）。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-13

CHN (China)

D.1	在答题卡上写下你测定的 R_L 值。使用碳迹电阻和纸薄膜 TFT 搭建反转电路（图 12）。在测量之前，请记住，必须通过应用 $V_{GS} = -3$ V 来完全关闭晶体管，并等待大约 1 分钟。然后让 V_{GS} 从-3 伏到 0V 变化，测量对应的 V_{out}，对每一个测量点，稳定时间大于 100s，然后读出 V_{out}。在答题卡上写下测量值。	0.5pt
D.2	绘制出 V_{out}（V_{in}）电压转移曲线，并通过数据点画出平滑的趋势。	0.5pt

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-1

CHN (China)

聚合物制成的细线的粘弹性 (10 points)

请注意，在实验开始之前不得将细线拉紧！

现在就打开电子秤 (预热时间大约是 10 分钟)。不要改变电子秤的设置。

引言

当固体材料受到外力时，它会产生形变。对于小的外力，这种形变与力成比例（胡克定律）并且是可逆的，当外力被移除时，材料恢复到其初始形状。

对于固体，使用应力和应变的概念可更方便地描述其性质。应力 σ 定义为：每单位面积 S 的外作用力 F，而应变 ϵ，则是长度的相对变化量：

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{and} \qquad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad , \tag{1}$$

其中 ℓ 和 ℓ_0 分别是最终和原始长度。在简单的弹性行为中，应力与应变成正比，即 $\sigma = E\,\epsilon$（胡克定律），而比例因子，E，称为杨氏模量。

胡克定律中所描述的弹性行为是一个近似，仅对足够小的应变有效。对于更大的应变，它会达到塑性状态，而逐渐变得不可逆，在这种情况下，分子运动开始不受约束，类似于粘性流体。也就是说，如果拉伸或压缩超过了弹性极限，材料会渐近地变得像流体。

粘弹性材料

某些材料结合了弹性固体的某些性质，具有类似粘性流体的特征，因此被称为具有粘弹性。

在处理粘弹性材料时，要合理地分开考虑纯弹性行为和附加粘性行为，这意味着产生应变 ϵ 所需的总应力 σ，是纯弹性项 $\sigma_0 = E_0\,\epsilon_0$ 和粘弹性项 σ_1 的总和：

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \tag{2}$$

假设上述两个应力项对应着相同的应变 $(\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1)$。然而，对应于粘弹性项的应变 ϵ_1，通常被建模为纯弹性应变 $\epsilon_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1/E_1$，和纯粘性应变 ϵ_1^{v} 的和（二者均受到相同的应力 $\sigma_1 = \sigma_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1^{\mathsf{v}}$）

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\mathsf{e}} + \epsilon_1^{\mathsf{v}} \tag{3}$$

在纯粘性过程中，应力与应变的时间导数之间存在线性关系（与粘性流体中的相似）

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{\mathrm{d}\epsilon_1^{\mathsf{v}}}{\mathrm{d}t},$$

其中 η_1 是粘度系数。

DELEGATION PRINT

这个描述线性粘弹性的唯象模型，称为标准线性固体模型，如图 1 所示，其中弹簧代表纯弹性组分，而罐子代表纯粘性部分。

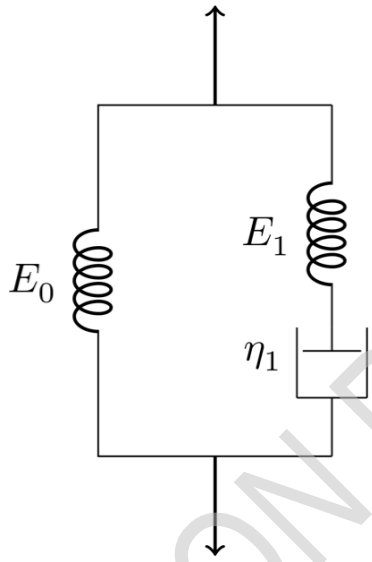


图 1. 线性粘弹性的标准线性固体模型。

根据以上等式，得到以下关系：

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_1}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \tag{4}$$

因此，在标准的粘弹性线性模型中，可以得出：

$$\sigma = E_0\epsilon + \tau_1(E_0 + E_1)\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \tau_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

其中 $\tau_1 = \eta_1/E_1$。该微分方程表明，应变和应力之间的关系不再是线性的，应变和应力都是时间的函数。要得到 $\epsilon(t)$，必须给定函数 $\sigma(t)$，反之亦然。

有两个实际感兴趣的特殊情况，就是 $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$ 或 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$ 两种情况，通常分别称为应力弛豫条件和蠕变条件。在应力弛豫条件下，对材料突然施加不随时间变化的应变 ϵ，即 $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$。在这种情况下，函数 $\sigma(t)$ 仅取决于介质的粘弹性参数和方程 (5) 的解:

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1\mathrm{e}^{-t/\tau_1}) \tag{6}$$

其中，在 $t = 0$ 时，只有弹性部分会对应力产生影响，因此 $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$。这个解表明粘弹性应力随时间呈指数衰减，衰减时间常数为 τ_1。

多重粘弹性过程

如图 2 所示，标准线性模型可以很容易地扩展到包括多重粘弹性过程。

DELEGATION PRINT

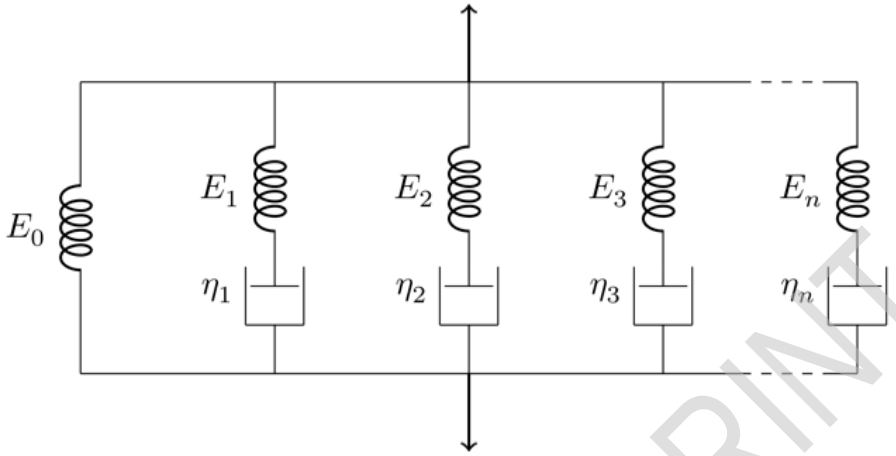


图 2. 多重粘弹性过程的广义模型。

因此，考虑到 N 种不同的粘弹性成分，有

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{7}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_k}\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$，并且，$\frac{\mathrm{d}\epsilon_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}$.

因此可对方程 (5) 进行推广：

$$\sigma = E_0\epsilon + \eta_t\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \sum_k \tau_k\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t}, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

其中 $\eta_t = \sum_k \eta_k$，及 $\tau_k = \eta_k/E_k$.

在应变不变的条件下，各种粘弹性应力仍应随时间呈指数衰减，$\sigma_k = A_k\mathrm{e}^{-t/\tau_k}$，从而得出解：

$$\sigma(t) = \epsilon\left(E_0 + \sum_k E_k\mathrm{e}^{-t/\tau_k}\right), \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

式中，假设在 $t = 0$ 时，只有那些弹性分量对总应力有贡献，因此 $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$。所得到的粘弹性响应明显是非线性的。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-4

CHN (China)

装置

在本实验题中，提供了以下一系列装置（见图 3）

1. 1 个立式结构，带有一个支撑系统，用来固定激光器，和另一个上支撑系统，用于保持实验所用的线被垂直拉伸，并在电子秤上方具有恒定的应变;
2. 1 个质量组件，由一个空心圆柱状物体和一个系上线的固定螺丝组成;
3. 1 个长的热塑性聚氨酯（TPU）细线，细线连接到质量组件和另一个固定螺丝，用于将线状物挂在上支撑系统上;
4. 1 个连接了固定螺丝的短的 TPU 线;
5. 1 个激光指示器和相应的支撑;
6. 1 个电子秤
7. 2 个平面镜;
8. 1 个计时器;
9. 1 把尺子
10. 1 把金属卷尺;
11. 1 张作为屏幕的 A4 纸;
12. 1 个用来固定和打开激光器的弹簧夹

DELEGATION PRINT



图 3. 本实验题所用的装置。

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-6

CHN (China)

A 部份：应力松弛测量 (1.2 分)

注意：在开始实验前，请勿对聚合物细线施加任何压力。若在实验前不小心对聚合物细线施加了压力，请向在场人员提出更换，更换该细线会导致时间上的损失，因此会减少你实验的时间。
在测量开始前，请仔细阅读「D 部份：数据分析」的内容，以便计划好如何进行整个测量过程。

A.1 测定聚合物细线在没有被拉长状态下，在两个螺丝头之间的长度，然后加上两个螺丝头内部的 5mm 长的线段，求得线段的总长度为 ℓ_0。请把该系线的总长度及其误差值写在答题卡上。 0.3pt

A.2 测定砝码的总重量 P_0，并以克力单位作表示。记住，1 克力是对应于 1 克质量的力，($1\,\text{gf} = 9.80 \times 10^{-3}\,\text{N}$)，请把这个测量值及其误差值写在答案纸上。 0.3pt

为了观察各种弛豫元件，有必要对其进行长时间的应力测量。在这种情况下，需要在大约 **45 分钟**内对应力变化情况进行测量。

你应该同时进行步骤 1 及 2，开始前，请仔细阅读说明。

重要提示: 如果实验因任何原因被中断，则无法继续。重新测量时必须使用一根新的线，这种情况下，可以向监考老师索要一根备用的线。

同时进行以下实验过程：

1. 请把连接了线段的质量组件放在电子秤上，并如图 4 中所示，把线段的另一端的螺丝头安置在支架上，线段将因此而被拉伸。
2. 在进行步聚 1 的时候，请利用计时器计时。

DELEGATION PRINT



图 4、把线段安放在支架上并同步进行计时。

A.3	在答案卡上的表格内，记录电子秤上随时间改变的质量读数 P(t) 以及对应的时间 t (实验时间约 45 分钟)。	1.0pt

A.4	测定被拉长的线段长度 ℓ，并估算其误差值。请把该长度测量值及其误差值写在答案卡上。	0.3pt

B 部份：测量被拉长线段的横截面直径 (1.5 分)

切勿直接观看激光！在不使用的情况下，请关掉激光笔
如果你在获得衍射图样方面有困难，请要求一个新的激光笔。

在这一部分，你将使用光的衍射，来测量聚合物细线的直径。未拉伸的细线的标称直径为 0.5 mm。正如你所知道的，宽度为 d 的矩形狭缝的衍射图样与直径为 d 的圆柱形物体的衍射图样相似。在远场 (夫琅禾费衍射) 的情况下，在放置在远场的光屏上（其与细线的距离远大于细线的直径）观察衍射图样。在小角衍射情况下，衍射暗纹条件由下列公式给出：

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{10}$$

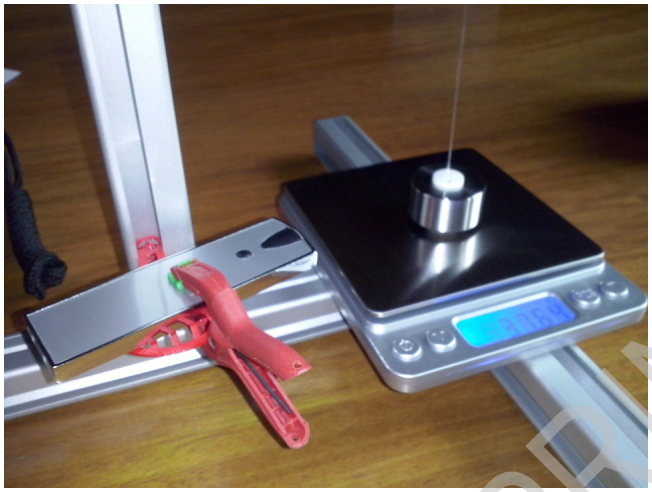
式中，θ 是衍射角。

实验中你所使用的激光的波长为 λ=650 ± 10nm。

要执行这一部分，请按以下步骤进行：

1. 请利用弹簧夹把激光笔夹好，并开启激光（见图 5）
2. 把激光对准并直射于拉伸了的聚合物细线上。
3. 利用所提供的实验材料，设计一个方法，把衍射图案投射于纸屏上，为了能够用公式（10）来计算出细线的横截面直径，测量所需要物理量的值。

DELEGATION PRINT



图五、利用弹簧夹把激光指示器夹好并打开激光器。

B.1	在答题卡上画出你所设计的方法的草图。	0.6pt
B.2	测定细线与衍射图案之间的距离 D，请把该距离及其误差值写在答题卡上。	0.3pt
B.3	计算衍射暗纹之间的平均间距 $\bar{x}$ 及其误差值。请把该平均间距及其误差值写在答题卡上。	0.3pt
B.4	利用方程式（10）以及已经测量的衍射数据，计算出拉伸了的线段横截面直径 d 及其误差值。请把该直径及其误差值写在答题卡上。	0.3pt

C 部份：使用不同长度的聚合物细线 (0.3 分)

在进行 D 部份的数据分析前（**Part D**），你必须准备好一个实验装置，以便使用更短的细线进行测量（**Part E**）。

把质量组件与聚合物细线的螺丝扭松，再将该砝码连接到一条较短的聚合物细线上，并再把螺丝拧紧 (请参考图 6)。

如果你无法将线插入孔中，请寻求帮助

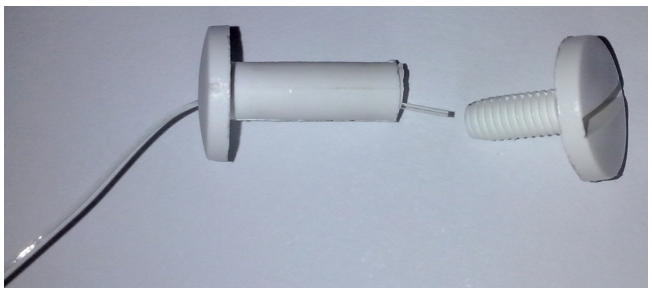


图 6、利用螺丝把聚合物细线安装好。

DELEGATION PRINT

C.1	重复 **A.1** 的步骤，测定该根细线的总长度 ℓ_0'。请把该细线的总长度及其误差值写在答题卡上。	0.3pt

把这条新的细线挂在上面的支撑架上，这样在质量作用下就会产生恒定的应力。当你进行数据分析时，细线最终会到一个静止的应变 $\epsilon = \sigma/E$，当你做数据分析的时候，**它应该至少挂起了 30 分钟**

D: 数据分析 (5.7 points)

里斯本的重力加速度是 $g = 9.80\,\mathrm{ms}^{-2}$.

D.1	在 A.3 图表中，计算作用于聚合物细线的力 F（以 gf 为单位），并填入于表中的对应列。	0.3pt
D.2	在答题卡内提供的方格纸上，绘制函数 $F(t)$。	0.4pt

由于电子秤不动，可以假设测量的应变不变，并可使用公式（9）。比率 $\frac{\sigma}{\epsilon}$ 可写为 $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$，其中 β 是常数。因此

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E_2 \mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E_3 \mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \ldots \tag{11}$$

为了方便，上面的加和项是按照 $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots)$ 排序的。

D.3	**求恒定的应变 (constant strain)** ϵ 并估算它的误差，并将结果填入答题卡中。	0.3pt
D.4	计算因子β 的值。其中 σ 用 SI 单位、F 用 gf 单位。在答题卡上写出 (不需计算误差)	0.3pt
D.5	查看 D.2 中使用的图表中的数据：它不能用纯弹性过程来解释。在答案纸中提供的方格纸内画出你所期望的 $F(t)$ 在纯弹性下的情况。	0.4pt

如果考虑 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 而不是 $F(t)$，数据会更容易被分析。这意味着弛豫参数 (relaxation parameters) 可逐步计算得到。为此，应在每个点计算时间导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$。这可以通过图形处理或数值计算方式完成。当数据点以相等时间间隔纪录的情况下，数据点 t_i 的函数 $f(t)$ （一系列数据 $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \cdots$) 的导数数值可由下式近似给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{12}$$

式中 h 是两点之间的间隔（常数），N 是数据点的总点数。

如果记录数据点的时间间隔是不同的，则导数的数值可近似为

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{13}$$

DELEGATION PRINT

IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-10

CHN (China)

式中 $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$and $h_- = (t_i - t_{i-1})$，N 是数据的总数目。该表达式表示左右导数的平均值，用时间间隔的倒数加权。

要分析数据并提取相关参数，必须遵循一系列步骤。因此，根据方程（11），请进行以下计算：

D.6	假设你测量的一系列数据的纪录时间超过了 τ_2，请计算 $t > 1000$ s 时数据点的导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$。并填写在 A.3 中的表格中。如用图形方法计算 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$，请使用答题卡中提供的方格纸。	0.5pt
D.7	在答题卡中，推导在单个粘弹性过程中，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 的依赖于时间的表达式。	0.3pt
D.8	使用图形方法从 D.6 的数据中确定参数 E_1 和 τ_1，以国际单位表示。在答题卡上写下 E_1 和 τ_1 的值（不需要计算误差）。	1.0pt
D.9	从 D.6 的数据中确定参数 E_0，以国际单位表示。将其写在答题卡上（不需要计算误差）。	0.3pt
D.10	$y(t)$ 表示为 $F(t)$ 减去弹性和最长的粘弹性分量的值，请在 A.3 表格中的列 $y(t)$ 填入对应的值。（这里不需要考虑 D.6 中已使用的数据）。	0.3pt
D.11	使用图形方法，从 $y(t)$（见 D.10）中确定第二粘弹性成分 E_2 和 τ_2 的值，以国际单位表示。将 E_2 和 τ_2 写在答题卡上（不需要计算误差）。	1.0pt

其余的粘弹性分量可以用类似的方式求得。

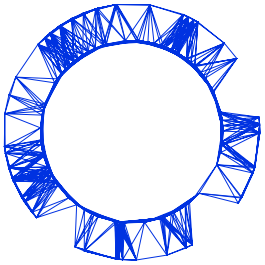
D.12	找出与第三个粘弹性分量相关的时间间隔 $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$。在答题卡上写下 t_i 和 t_f（不需要计算任何误差）。	0.3pt
D.13	从 D.11 的图中估算 τ_3 的值，用国际单位表示，在答题卡上写出（不需要计算误差）	0.3pt

E 部分：使用扭摆测量 E（0.6 points）

回到 C 部分中的较短的细线，确保细线被悬挂后至少过了 30 分钟，这样你就可以认为这根线的应变达到了稳定值 $\epsilon = \sigma/E$

E.1	根据拉伸的细线的长度，直接确定 E. 在答题卡上写下其数值，以及在 D 部分计算的 E_0 值的相对变化量（不需要计算误差）。	0.6pt

DELEGATION PRINT



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Solutions to Theory Problem 1

LIGO-GW150914

(V. Cardoso, C. Herdeiro)

July 15, 2018

v6.0

Confidential

GW150914 (10 points)

Part A. Newtonian (conservative) orbits (3.0 points)

A.1 Apply Newton's law to mass M_1:

$$M_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \,. \tag{1}$$

Use, from eq. (1) of the question sheet

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\vec{r}_1 \,, \tag{2}$$

in eq. (1) above, to obtain

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2 r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1} \,. \tag{3}$$

A.1 1.0pt

$$n = 3, \qquad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2} \,.$$

A.2 The total energy of the system is the sum of the two kinetic energies plus the gravitational potential energy. For circular motions, the linear velocity of each of the masses reads

$$|\vec{v}_1| = r_1\Omega \,, \qquad |\vec{v}_2| = r_2\Omega \,, \tag{4}$$

Thus, the total energy is

$$E = \frac{1}{2}(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{L} \,, \tag{5}$$

Now,

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2 \,. \tag{6}$$

Thus,

$$E = \frac{1}{2}\mu L^2\Omega^2 - G\frac{M\mu}{L} \,. \tag{7}$$

A.2 1.0pt

$$A(\mu,\Omega,L) = \frac{1}{2}\mu L^2\Omega^2 \,.$$

A.3 Energy (3) of the question sheet can be interpreted as describing a system of a mass μ in a circular orbit with angular velocity Ω, radius L, around a mass M (at rest). Equating the gravitational acceleration to the centripetal acceleration:

$$G\frac{M}{L^2} = \Omega^2 L \,. \tag{8}$$

This is indeed Kepler's third law (for circular orbits). Then, from (7),

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M\mu}{L} \,. \tag{9}$$

A.3 1.0pt

$$\beta = -\frac{1}{2} \,.$$

Confidential

Part B - Introducing relativistic dissipation (7.0 points)

B.1 Some simple trigonometry for the x, y motion of the masses (in an appropriate Cartesian system) yields:

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)) \,, \qquad (x_2, y_2) = -r_2(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)) \,. \tag{10}$$

Then,

$$Q_{ij} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cos^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\sin^2(\Omega t) & 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & 0 \\ 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & \frac{4}{3}\sin^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\cos^2(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} , \tag{11}$$

or, using some simple trigonometry and (6),

$$Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} . \tag{12}$$

B.1 1.0pt

$$k = 2\Omega \,, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3} \,, a_3 = -\frac{2}{3} \,, \quad b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0 \,, c_{12} = c_{21} = 1, c_{ij} \overset{\text{otherwise}}{=} 0 \,.$$

B.2 First take the derivatives:

$$\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} = 4\Omega^3 \mu L^2 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Then perform the sum:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{5c^5}(4\Omega^3 \mu L^2)^2 [2\sin^2(2\Omega t) + 2\cos^2(2\Omega t)] = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6 \,. \tag{14}$$

B.2 1.0pt

$$\xi = \frac{32}{5} \,.$$

B.3 Now we assume a sequency of Keplerian orbits, with decreasing energy, which is being taken from the system by the GWs.

First, from (9), differentiating with respect to time,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{GM\mu}{2L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \,, \tag{15}$$

Since this loss of energy is due to GWs, we equate it with (minus) the luminosity of GWs, given by (14)

$$\frac{GM\mu}{2L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6 \,. \tag{16}$$

We can eliminate the L and $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ dependence in this equation in terms of Ω and $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$, by using Kepler's third law (8), which relates:

$$L^3 = G\frac{M}{\Omega^2} \,, \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{L}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \,. \tag{17}$$

Confidential

Substituting in (16), we obtain:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 \equiv \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} \left(GM_\mathrm{c}\right)^5 . \tag{18}$$

B.3 1.0pt

$$M_\mathrm{c} = (\mu^3 M^2)^{1/5} .$$

B.4 Angular and cycle frequencies are related as $\Omega = 2\pi f$. From the information provided above: *GWs have a frequency which is twice as large as the orbital frequency*, we have

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f_\mathrm{GW}}{2} . \tag{19}$$

Formula (10) of the question sheet has the form

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \chi \Omega^{11/3} , \qquad \chi \equiv \frac{96}{5} \frac{(GM_\mathrm{c})^{5/3}}{c^5} . \tag{20}$$

Thus, from (11) of the question sheet

$$\Omega(t)^{-8/3} = \frac{8}{3} \chi (t_0 - t) , \tag{21}$$

or, using (20) and the definition of χ gives

$$f_\mathrm{GW}^{-8/3}(t) = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5} \left(\frac{GM_\mathrm{c}}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t) . \tag{22}$$

B.4 2.0pt

$$p = 1 .$$

B.5 From the figure, we consider the two Δt's as half periods. Thus, the (cycle) GW frequency is $f_\mathrm{GW} = 1/(2\Delta t)$. Then, the four given points allow us to compute the frequency at the mean time of the two intervals as

	$t_{\overline{\mathrm{AB}}}$	$t_{\overline{\mathrm{CD}}}$
t (s)	0.0045	0.037
f_GW (Hz)	$(2 \times 0.009)^{-1}$	$(2 \times 0.006)^{-1}$

Now, using (22) we have two pairs of (f_GW,t) values for two unknowns (t_0,M_c). Expressing (22) for both $t_{\overline{\mathrm{AB}}}$ and $t_{\overline{\mathrm{CD}}}$ and dividing the two equations we obtain:

$$t_0 = \frac{A t_{\overline{\mathrm{CD}}} - t_{\overline{\mathrm{AB}}}}{A - 1} , \qquad A \equiv \left(\frac{f_\mathrm{GW}(t_{\overline{\mathrm{AB}}})}{f_\mathrm{GW}(t_{\overline{\mathrm{CD}}})}\right)^{-8/3} . \tag{23}$$

Replacing by the numerical values, $A \simeq 2.95$ and $t_0 \simeq 0.054$ s. Now we can use (22) for either of the two values $t_{\overline{\mathrm{AB}}}$ or $t_{\overline{\mathrm{CD}}}$ and determine M_c. One obtains for the chirp mass

$$M_\mathrm{c} \simeq 6 \times 10^{31} \text{ kg} \simeq 30 \times M_\odot . \tag{24}$$

Thus, the total mass M is

$$M = 4^{3/5} M_\mathrm{c} \simeq 69 \times M_\odot . \tag{25}$$

This result is actually remarkably close to the best estimates using the full theory of General Relativity! [Even though the actual objects do not have precisely equal masses and the theory we have just used is not valid very close to the collision.]

Confidential

B.5 1.0pt

$$M_c \simeq 30 \times M_\odot \,, \qquad M \simeq 69 \times M_\odot \,.$$

B.6 From (8), Kepler's law states that $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$. The second pair of points highlighted in the plot correspond to the cycle prior to merger. Thus, we use (19) to obtain the orbital angular velocity at $t_{\overline{\text{CD}}}$:

$$\Omega_{t_{\overline{\text{CD}}}} \sim 2.6 \times 10^2 \text{ rad/s} \,. \tag{26}$$

Then, using the total mass (25) we find

$$L \sim 5 \times 10^2 \text{ km} \,. \tag{27}$$

Thus, these objects have a maximum radius of $R_{\text{max}} \sim 250$ km. Hence they have over 30 times more mass and,

$$\frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3 \tag{28}$$

they are 3000 times smaller than the Sun and!

Their linear velocity is

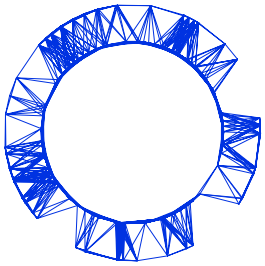
$$v_{\text{col}} = \frac{L}{2}\Omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s} \,. \tag{29}$$

They are moving at over 20% of the velocity of light!

B.6 1.0pt

$$L_{\text{collision}} \sim 5 \times 10^2 \text{ km} \,, \qquad \frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3 \,, \qquad \frac{v_{\text{col}}}{c} \sim 0.2 \,.$$

Confidential



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Solutions to Theory Problem 2

Where is the neutrino?

(Miguel C N Fiolhais and António Onofre)

July 24, 2018

v1.2

Confidential

Where is the neutrino? (10 points)

Part A. ATLAS Detector physics (4.0 points)

A.1

The magnetic force is the centripetal force:

$$m\frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}\,.$$

First express the velocity in terms of the kinetic energy,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}\,,$$

and then insert it in the expression above for the radius to get

A.1	0.5pt
$$r = \frac{\sqrt{2Km}}{eB}\,.$$	

A.2

The radius of the circular motion of a charged particle in the presence of a uniform magnetic field is given by,

$$r = \frac{mv}{eB}\,.$$

This formula is valid in the relativistic scenario if the mass correction, $m \to \gamma m$ is included:

$$r = \frac{\gamma mv}{eB} = \frac{p}{eB} \Rightarrow p = reB\,.$$

Note that the radius of the circular motion is half the radius of the inner part of the detector. One obtains [1 MeV/$c = 5.34 \times 10^{-22}$ m kg s^{-1}]

A.2	0.5pt
$p = 330$ MeV/$c\,.$	

A.3

The acceleration for the particle is $a = \frac{evB}{\gamma m} \sim \frac{ecB}{\gamma m}$, in the ultrarelativistic limit. Then,

$$P = \frac{e^4c^2\gamma^4B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3\gamma^2 m^2} = \frac{e^4\gamma^2c^4B^2}{6\pi\epsilon_0 c^5 m^2}.$$

Since $E = \gamma mc^2$ we can obtain $\gamma^2c^4 = \frac{E^2}{m^2}$ and, finally,

Confidential

$$P = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E^2 B^2.$$

Therefore,

A.3 1.0pt

$$\xi = \frac{1}{6\pi}\,, \quad n = 5 \text{ and } k = 4.$$

A.4

The power emitted by the particle is given by,

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E^2 B^2\,.$$

The energy of the particle as a function of time can be calculated from

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{1}{E^2}\mathrm{d}E = -\int_0^t \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} B^2 \mathrm{d}t\,,$$

where $E(0) = E_0$. This leads to,

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}\, t \quad \Rightarrow \quad E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t}\,,$$

with

A.4 1.0pt

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}\,.$$

A.5

If the initial energy of the electron is 100 GeV, the radius of curvature is extremely large ($r = \frac{E}{eBc} \approx 167$ m). Therefore, in approximation, one can consider the electron is moving in the inner part of the ATLAS detector along a straight line. The time of flight of the electron is $t = R/c$, where $R = 1.1$ m is the radius of the inner part of the detector. The total energy lost due to synchrotron radiation is,

$$\Delta E = E(R/c) - E_0 = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 \frac{R}{c}} - E_0 \approx -\alpha E_0^2 \frac{R}{c}$$

and

A.5 0.5pt

$$\Delta E = -56 \text{ MeV}\,.$$

Confidential

A.6

In the ultrarelativistic limit, $v \approx c$ and $E \approx pc$. The cyclotron frequency is,

$$\omega(t) = \frac{c}{r(t)} = \frac{ecB}{p(t)} = \frac{ec^2B}{E(t)}$$

A.6 0.5pt

$$\omega(t) = \frac{ec^2B}{E_0}\left(1 + \frac{e^4B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}E_0 t\right) .$$

Confidential

Part B. Finding the neutrino (6.0 points)

B.1

Since the W^+ boson decays into an anti-muon and a neutrino, one can use principles of conservation of energy and linear momentum to calculate the unknown $p_z^{(\nu)}$ of the neutrino. Moreover, the anti-muon and the neutrino can be considered massless, which implies that the magnitude of their momenta (times c) and their energies are the same. Therefore, the conservation of linear momentum can be expressed as

$$\vec{p}^{\,(W)} = \vec{p}^{\,(\mu)} + \vec{p}^{\,(\nu)} ,$$

and the conservation of energy as,

$$E^{(W)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} .$$

In addition, one can also relate the energy and the momentum of the W^+ boson through its mass,

$$m_W^2 = (E^{(W)})^2/c^4 - (p^{(W)})^2/c^2$$

which leads to a quadratic equation on $p_z^{(\nu)}$,

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \left[(p^{(\mu)} + p^{(\nu)})^2 - (\vec{p}^{\,(\mu)} + \vec{p}^{\,(\nu)})^2\right]/c^2 \\ &= \left(2p^{(\mu)}p^{(\nu)} - 2\vec{p}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}^{\,(\nu)}\right)/c^2 \end{aligned}$$

B.1 1.5pt

$$m_W^2 = \frac{1}{c^2}\left(2p^{(\mu)}\sqrt{(p_\mathrm{T}^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2} - 2\vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\nu)} - 2p_z^{(\mu)}p_z^{(\nu)}\right) .$$

B.2

The numerical substitution directly in the answer of B.1, using

$$p^{(\mu)} = 37.2\,\mathrm{GeV}/c \quad m_W^2c^2 = 6464.2\,(\mathrm{GeV}/c)^2 \quad p_\mathrm{T}^{(\nu)\,2} = 10\,864.9\,(\mathrm{GeV}/c)^2$$

$$\vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\nu)} = 2439.3(\mathrm{GeV}/c)^2 \quad p_z^{(\mu)} = -12.4\,\mathrm{GeV}/c ,$$

leads to

$$6464.2 = 74.4\sqrt{10\,864.9 + p_z^{(\nu)\,2}} - 4878.6 + 24.8p^{(\nu)} .$$

This is a quadratic equation, equivalent to

$$0.88889\,p_z^{(\nu)\,2} + 101.64\,p_z^{(\nu)} - 12378 = 0$$

whose solutions are:

Confidential

B.2 1.5pt

$$p_z^{(\nu)} = 74.0 \text{ GeV}/c \qquad \text{or} \qquad p_z^{(\nu)} = -188.3 \text{ GeV}/c.$$

The general solution of the equation above in B.1 leads to

$$\begin{aligned} p_z^{(\nu)} &= \frac{2\vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\nu)} p_z^{(\mu)} + m_W^2 c^2 p_z^{(\mu)}}{2(p_\mathrm{T}^{(\mu)})^2} \\ &\pm \frac{p^{(\mu)} \sqrt{-4(p_\mathrm{T}^{(\mu)})^2 (p_\mathrm{T}^{(\nu)})^2 + 4(\vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\nu)})^2 + 4\vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{\,(\nu)} m_W^2 c^2 + m_W^4 c^4}}{2(p_\mathrm{T}^{(\mu)})^2} \end{aligned}$$

Numerical substitution leads to the above mentioned values for $p_z^{(\nu)}$.

B.3

The final state particles of the top quark decay are the anti-muon, the neutrino and jet 1. Since the neutrino is now fully reconstructed the energy and linear momentum of the top quark can be calculated as,

$$\begin{aligned} E^{(\mathrm{t})} &= cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)} \\ \vec{p}^{\,(\mathrm{t})} &= \vec{p}^{\,(\mu)} + \vec{p}^{\,(\nu)} + \vec{p}^{\,(j_1)}. \end{aligned}$$

The top quark mass is,

$$\begin{aligned} m_\mathrm{t} &= \sqrt{(E^{(\mathrm{t})})^2/c^4 - (\vec{p}^{\,(\mathrm{t})})^2/c^2} \\ &= c^{-1}\sqrt{\left(p^{(\mu)} + p^{(\nu)} + p^{(j_1)}\right)^2 - \left(\vec{p}^{\,(\mu)} + \vec{p}^{\,(\nu)} + \vec{p}^{\,(j_1)}\right)^2}. \end{aligned}$$

The substitution of values leads to two possible masses:

B.3 1.0pt

$$m_\mathrm{t} = 169.3 \text{ GeV}/c^2 \qquad \text{or} \qquad m_\mathrm{t} = 311.2 \text{ GeV}/c^2$$

B.4

According to the frequency distribution for signal (dashed line), the probability of the $m_\mathrm{t} = 169.3$ GeV/c^2 solution is roughly 0.1 while the probability of the $m_\mathrm{t} = 311.2$ GeV/c^2 solution is below 0.01. Therefore,

B.4 The most likely candidate is the $m_\mathrm{t} = 169.3$ GeV/c^2 solution. 1.0pt

Confidential

B.5

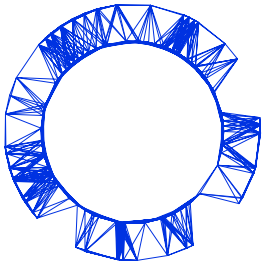
The top quark energy for the most likely candidate is $E^{(\mathrm{t})} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)} = 272.6$ GeV .

$$d = vt = v\gamma t_0 = \frac{p^{(\mathrm{t})}}{m_{\mathrm{t}}} t_0 = ct_0 \sqrt{\frac{{E^{(\mathrm{t})}}^2}{m_{\mathrm{t}}^2 c^4} - 1}\,.$$

B.5	1.0pt
$d = 2 \times 10^{-16}$ m .	

Confidential

IPhO 2018
Lisbon, Portugal



Confidential

Solutions to Theory Problem 3

Physics of Live Systems

(Rui Travasso, Lucília Brito)

July 24, 2018

v1.0

Physics of Live Systems (10 points)

Part A. The physics of blood flow (4.5 points)

A.1

Since the vessel network is symmetrical, the flow in a vessel of level $i+1$ is half the flow in a vessel of level i.

In this way, we can sum the pressure differences in all levels:

$$\Delta P = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i R_i = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{2^i}.$$

Introducing the radii dependences yields

$$\Delta P = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i\eta}{2^i\pi r_i^4} = Q_0 \frac{8\ell_0\eta}{\pi r_0^4} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} = Q_0 N \frac{8\ell_0\eta}{\pi r_0^4}\,.$$

Therefore

$$Q_0 = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{8N\ell_0\eta}\,.$$

Hence, the flow rate for a vessel network in level i is

A.1 1.3pt

$$Q_i = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{2^{i+3}N\ell_0\eta}\,.$$

A.2

Replace values in the formula and change units appropriately

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\Delta P \pi r_0^4}{8N\ell_0\eta} = \\ &= \frac{(55-30)\times 1.013\times 10^5 \times 3.1415 \times (6.0\times 10^{-5})^4}{760 \times 48 \times 2.0\times 10^{-3} \times 3.5 \times 10^{-3}} = 4.0\times 10^{-10}\ \mathrm{m^3/s} \end{aligned}$$

to obtain the final value in the requested unites:

A.2 0.5pt

$$Q_0 \simeq 1.5\ \mathrm{m\ell/h}\,.$$

Confidential

A.3

The current is given by

$$I = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} .$$

The pressure difference in the capacitor is

$$P_{\text{out}} e^{i(\omega t+\phi)} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1} .$$

The amplitude is

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

To be smaller than P_{in}, for $\omega \to 0$:

$$(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2 > 1 \iff -2CL + C^2 R^2 > 0 .$$

Replacing the expressions for L, C, and R we get: $\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1$.

A.3 2.0pt

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

Condition:

$$\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1 .$$

Alternative way to obtain P_{out}:

The amplitude of the current in the equivalent circuit is $I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{Z}$, where

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

is the modulus of the impedance. Hence, the voltage amplitude in the capacitor is

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{\omega C} \times I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} .$$

A.4

The previous condition can also be expressed as

$$h < \frac{64\eta^2 \ell^2}{3Er^3\rho} .$$

For the network referred to in **A.2**

$$h < \frac{64\eta^2 \ell_0^2 \times 2^i}{3 \times 2^{2i/3} E r_0^3 \rho} = \frac{64 \times (3.5\times10^{-3})^2 \times (2.0\times10^{-3})^2}{3 \times 0.06 \times 10^6 \times (6.0\times10^{-5})^3 \times 1.05\times10^3} \times 2^{i/3} = 7.7\times10^{-5} \times 2^{i/3} .$$

Confidential

For $i = 0$, in the worse case scenario,

$$h_{\text{max}} = 7.7 \times 10^{-5} \times 2^{0} = 7.7 \times 10^{-5} \text{ m}$$

This value is certainly observed in these vessels since their radius range from 18 μm to 60 μm. A wall width smaller than 80 μm is certainly reasonable.

A.4	Maximum $h = 8 \times 10^{-5}$ m	0.7pt

Part B. Tumor growth (5.5 points)

B.1

The expressions for the masses of tumour and normal tissue are written as:

$$\begin{cases} M_{\text{T}} = V_{\text{T}}\rho_{\text{T}} = V_{\text{T}}\rho_0(1 + \frac{p}{K_{\text{T}}}) \\ \\ M_{\text{N}} = V\rho_0 = (V - V_{\text{T}})\rho_0(1 + \frac{p}{K_{\text{N}}}) \end{cases}$$

The pressure, p, can be expressed as

$$p = \frac{M_{\text{T}}\, K_{\text{T}}}{V_{\text{T}}\, \rho_0} - K_{\text{T}}$$

and, then, used in the equation for M_{N}:

$$M_{\text{N}} = (V - V_{\text{T}})\, \frac{M_{\text{N}}}{V} \left[\left(1 - \frac{K_{\text{T}}}{K_{\text{N}}} \right) + \frac{M_{\text{T}}\, V K_{\text{T}}}{V_{\text{T}}\, M_{\text{N}}\, K_{\text{N}}} \right]$$

Simplifying and rearranging the terms, the equation for v becomes

$$(1 - \kappa)\; v^2 - (1 + \mu)\; v + \mu = 0\,,$$

for which the solution is (the other solution of the quadratic equation is not physically relevant since does not lead to $v = 0$ for $\mu = 0$)

B.1	$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu\,(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}\,.$$	1.0pt

B.2

For $r < R_{\text{T}}$, the conservation of energy implies that

$$4\pi r^2 (-k) \frac{\text{d}T}{\text{d}r} = \mathcal{P} \frac{4}{3} \pi r^3\,.$$

Confidential

Therefore, the temperature difference to 37 °C = 310.15 K, $\Delta T(r)$, is given by

$$\Delta T(r) = -\frac{\mathcal{P} r^2}{6k} + C\,,$$

where C is a constant.

For $r > R_\mathrm{T}$, the conservation of energy implies that

$$4\pi r^2 (-k)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{T}^3\,.$$

Therefore, the temperature difference to 37 °C is

$$\Delta T(r) = \frac{\mathcal{P} R_\mathrm{T}^3}{3kr}\,.$$

In this case there is no constant, since very far away the increase in temperature is zero.

Matching the two solutions at $r = R_\mathrm{T}$ gives

$$C = \frac{\mathcal{P} R_\mathrm{T}^2}{2k}\,.$$

Therefore the temperature at the centre of the tumour, in SI units, is

B.2	Temperature: $310.15 + \frac{\mathcal{P} R_\mathrm{T}^2}{2k}$.	1.7pt

B.3

The increase in temperature at the tumour surface (the lower temperature in the tumour) is

$$\Delta T(R_\mathrm{T}) = \frac{\mathcal{P} R_\mathrm{T}^2}{3k}\,.$$

This increase should be equal to 6.0 K. Therefore,

$$\mathcal{P} = \frac{3\Delta T k}{R_\mathrm{T}^2} = \frac{3\times 6\times 0.6}{0.05^2} = 4.3\ \mathrm{kW/m^3}.$$

B.3	$\mathcal{P}_\mathrm{min} = 4.3$ kW/m^3.	0.5pt

B.4

We can relate δr with the pressure in the tumour, using the relation given in the text up to leading order in $p - P_\mathrm{cap}$: $\delta r = \frac{p - P_\mathrm{cap}}{2(p_\mathrm{c} - P_\mathrm{cap})}\,\delta r_\mathrm{c}$. Therefore, if $p - P_\mathrm{cap}$ is very small, also it is δr.

The pressure can be related with the volume. We know that

$$\frac{M_\mathrm{N}}{V_\mathrm{N}} = \frac{\rho_0 V}{V - V_\mathrm{T}} = \frac{\rho_0}{1 - v} = \rho_0\left(1 + \frac{p}{K_\mathrm{N}}\right)\,.$$

Confidential

And so $p = \frac{K_N v}{1-v}$.

When the thinner vessels are narrower, the flow rate in the main vessel is altered:

$$\Delta P = (Q_0 + \delta Q_0) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = (Q_0 + \delta Q_0) \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \left(\sum_{i=0}^{N-2} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} + \frac{2^{4(N-1)/3}}{2^{N-1} 2^{(N-1)/3} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0/2^{(N-1)/3}}\right)^4} \right)$$

$$\implies \Delta P \simeq (Q_0 + \delta Q_0) \frac{\Delta P}{N Q_0} \left(N - 1 + 1 + \frac{4\,\delta r}{r_{N-1}} \right)$$

Noting that $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{\delta Q_0}{Q_0}$, we obtain

$$1 + \frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{1}{1 + \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}}} \simeq 1 - \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}} \,.$$

And so:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}} \,.$$

Putting all together

B.4 2.3pt

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{2}{N} \frac{K_N v - (1-v) P_{\text{cap}}}{(1-v)(p_c - P_{\text{cap}})} \frac{\delta r_c}{r_{N-1}} \,.$$

Confidential