## 暗物质

暗物质存在的第一个证据是Fritz Zwicky通过观测Coma星系团的动力学提供的. Coma星系团是一个包含约一千个星系的星系团. Zwicky利用维里定理(Virial theorem)估计了星系团的质量. 作为维里定理的一个简单例子，考虑太阳和行星组成的系统，行星绕太阳做圆周运动. 维里定理在这个系统中体现为行星动能和引力势能之间的精确关系. 更一般地，如果一个系统中，很多粒子被相互作用约束在一起，那么维里定理是系统总动能的时间平均与系统总势能的时间平均之间的关系.

在1933年，通过观测位于Coma星系团边缘的星系运动速度，Zwicky估计：和光学观测可以看到的质量相比，星系团实际上具有更大的质量. 可见物质（星系）之间的引力太小，不足以解释星系之间的高速运动. 为了解释星系之间的运动速度，必须引入具有质量的、不可见的物质. 这些不可见的物质就是暗物质.

### A. 星系团

考虑一个半径为$R$，总质量为$M$的球状星系团. 这个星系团包含$N$个星系（$N$很大），以及暗物质. 假设星系和暗物质在星系团中的分布是均匀的. 设每个星系的平均质量为$m$(包括可见物质和暗物质).

| | | |
|---|---|---|
| A.1 | 假设星系团中的物质是连续分布的。利用$M$和$R$计算星系团的总引力势能. | 1.0 pt. |

由于宇宙膨胀，相对与地球上的观测者而言，所有遥远的天体会向远离我们的方向运动，其运动速度与观测者与天体之间的距离有关. 考虑星系团中第$i$个星系（其中$i = 1, \ldots, N$）中，一颗IA型超新星发射的光线：设我们观测到该光线的一条拉曼谱线(Lyman，氢原子发射光谱上的一条谱线)频率为$f_i$. 而在地球上，对应的同一条拉曼谱线频率为$f_0$.

| | | |
|---|---|---|
| A.2 | 利用$f_i$ ($i = 1, \ldots, N.$)，$f_0$和$N$，求整个星系团远离地球的平均速度$V_{cr}$. 注意：星系的运动速度远远小于光速$c$. | 0.5 pt. |
| A.3 | 假设相对星系团中心而言，每个星系向各个方向运动的概率相同. 利用$N$，$f_i$ ($i = 1, \ldots, N.$)和$f_0$，求星系相对于星系团中心的方均根速率$v_{rms}$. 利用$v_{rms}$和$m$，求星系相对于星系团中心的平均动能. | 1.5 pt. |

为了求出星系团的总质量，可以用维里定理. 该定理说明，对一个由自身保守力约束的多质点系统，有

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

其中$\langle K \rangle_t$是总动能的时间平均值，$\langle U \rangle_t$ 是总势能的时间平均值, 而 $\gamma$ 是常数. 对一个由自身保守力约束的多质点系统，这个定理可以由以下假设导出，即系统中每个质点的位置和动量大小都是有限的，从而如下定义的量

$$\Gamma = \sum_i \vec{p_i} \cdot \vec{r_i}$$

也是有限的.

| | | |
|---|---|---|
| A.4 | 长时间来看，$d\Gamma/dt$ 的时间平均值为0，即 $\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = 0$,请以此确定引力相互作用情况下，上述维里定理中的 $\gamma$.(提示：试着只对很少的几个星系作$\Gamma$ 中的求和). | 1.7 pt. |
| A.5 | 用之前的结果，确定星系中暗物质的总质量，用$N$、 $m_g$、 $R$ 和 $v_{rms}$ 表示. 其中$m_g$ 是一个星系的平均可见总质量. 请注意暗物质的方均根速率与星系的方均根速率是相同的. | 0.5 pt. |

## B. 星系中的暗物质

一个星系中也有暗物质. 考虑一个球状星系，可见边界半径为$R_g$ (在此几乎最大的半径内仍然可见大量恒星，但请注意此半径$R_g$之外仍有少量恒星分布). 假设星系内的恒星可以看作是质量为$m_s$ 的质点.星系中的恒星均匀分布，数密度为$n$，并且假设都做圆轨道运动.

| | | |
|---|---|---|
| B.1 | 设星系中只有恒星，计算距离星系中心距离为$r$处的一个恒星的速度$v(r)$，并且画出 $v(r)$随$r$变化的曲线，其中距离区间要包含 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$. | 0.8 pt. |

由观察画出的$v(r)$图称为星系旋转曲线(the galaxy rotation curve)，从这个图上能推断出暗物质的存在. 下图显示了一个常见的星系旋转曲线. 为了简化，假设$r \leq R_g$时，$v(r)$简化为线性函数，$r > R_g$时，$v(r)$ 可以作为常数 $v_0$ 处理.

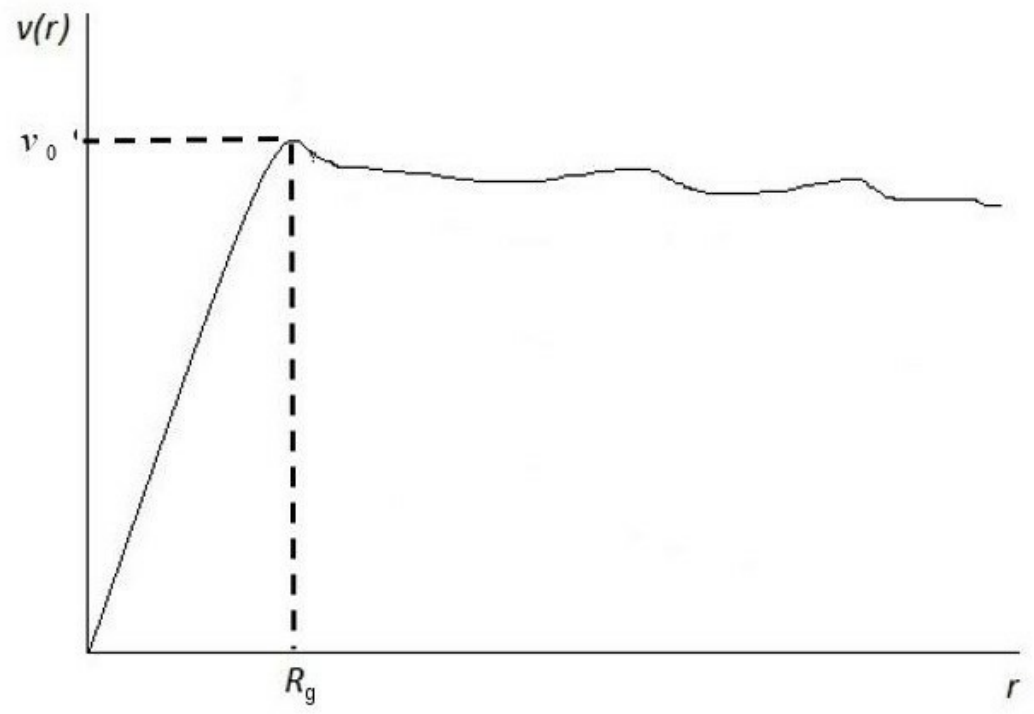



图 1 一个星系的星系旋转曲线.

| | | |
|---|---|---|
| B.2 | 用$v_0$和$R_g$, 求出落在半径为$R_g$的球形内的星系总质量$m_R$ . | 0.5 pt. |

B.2 中的图和B.1 中得到的图不同，这意味着存在暗物质.

| | | |
|---|---|---|
| B.3 | 定出暗物质的质量密度，将其作为$r$、$R_g$ 、 $v_0$、$n$、和$m_s$的函数，需考虑 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$. | 1.5 pt. |

## C. 星际气体和暗物质

现在考虑一个年轻的星系，其质量主要由星际气体和暗物质构成（忽略恒星的质量）. 星际气体假定由相同的粒子组成，单个粒子质量为 $m_p$ . 气体的粒子数密度 $n(r)$ 和温度 $T(r)$ 依赖到星系中心的距离 $r$. 尽管气体中有很多物理过程发生，我们可以假定，由于自身压强和星系万有引力作用，气体处于流体静力学平衡。

| | | |
|---|---|---|
| C.1 | 求解出气体压强梯度 $dP/dr$，用 $m'(r)$，$r$ 和 $n(r)$ 表达.这里，$m'(r)$ 是以星系中心为球心、半径为 $r$ 的球体内的气体和暗物质的总质量. | 0.5 pt. |

| | | |
|---|---|---|
| C.2 | 假定星际气体是理想气体，求解出 $m'(r)$，用 $n(r)$ ，$T(r)$ 和它们对 $r$ 的导数来表示。 | 0.5 pt. |

接下来为简单起见，假定气体是温度为 $T_0$ 的等温分布，星际气体的数密度由下式给出：

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

，

这里 $\alpha$ 和 $\beta$ 是常量。

| | | |
|---|---|---|
| C.3 | 求解出星系内暗物质的质量密度随 $r$ 的变化。 | 1.0 pt. |

# 地震，火山和海啸

印尼的自然灾害就像超市里的商品一样种类繁多. 几乎各种自然灾害都在印尼发生过，如火山喷发，地震和海啸.

## A. 默拉皮（**Merapi**）火山喷发



**图 1**: 默拉皮火山喷发时的火山碎屑云, 感谢日惹(Yogyakarta, BPPTKG)火山办公室提供照片

日惹的默拉皮火山是爪哇(Java)地区最活跃的火山之一. 火山碎屑流是大家熟知的火山喷发特征。火山碎屑流是从火山流出的气体和岩石的炽热混合物. 2010年10月26日，默拉皮火山用独特的方式展现了其喷发行为，喷出了高达12km的火山灰烟柱(图1)，和一条火山碎屑流，导致火山附近20,000多人撤离.

---

2010年那次喷发是默拉皮火山最大的一次喷发，让我们看看其原因. 地球物理学家知道，外部水流入岩浆的作用会强烈影响火山喷发的行为(被称为水岩浆喷发). 我们假设火山是由岩浆粒子和水混合组成的系统，并且以火山口的通道结构和大气作为边界. 将喷发过程分为两个阶段, (1) 一个瞬间的岩浆-水相互作用过程，和 (2) 系统膨胀过程. 在第一阶段, 质量为($m_m$)、绝对温度为($T_m$)的岩浆和质量为 ($m_w$ ) 、绝对温度为($T_w$)的水混合. 设瞬间达到热平衡. 这个过程可以理解为几乎体积不变的过程. 气体蒸发的潜热和岩浆融化的潜热可以被忽略.

| | | |
|---|---|---|
| A.1 | 求出第一阶段达到平衡时的温度，用水和岩浆的质量，以及水的单位质量热容$c_{Vw}$ 和岩浆的单位质量热容 $c_{Vm}$ 来表示. | 0.5 pt. |
| A.2 | 假设混合物可以模型化为理想气体，定出第一阶段平衡时的压强. 设混合物的摩尔体积为 $v_e$. | 0.3 pt. |

系统膨胀过程(第二阶段)可能以几种方式发生，一种方式是热爆炸. 尽管这个过程相当复杂, 我们还是可以凭经验定性分析喷出混合物的特征速度. 喷发过程中这个气体特征速度依赖于火山通道中混合气体的压强 $p$ ，质量 $m$ ，和体积 $V$.

| | | |
|---|---|---|
| A.3 | 求出喷发过程中的特征速度，用 $p$, $m$, $V$ 和一个无量纲比例系数 $\kappa$ 来表达. | 0.5 pt. |

观测到的压强量级为100 MPa. 这使得喷发的特征速度可以达到弹道速度.

## B. 日惹的地震

2006年日惹地震的震级为$M_w$ = 6.4, 摧毁了Bantul和日惹地区的很多建筑，这次地震发生于当地时间05:54:00.00，即世界标准时(UTC)22:54:00.00 . 这次地震是由Opak断层的一次突然移动引起的(见图2). 震源位于地表以下15 km.

地震仪能记录在地壳上传播的地震波. 地震仪得到的图称之为地震曲线图 (图2和3下方的图). 地震曲线图记录的是地表竖直方向上的速度随时间的变化，图2是Gamping Station Yogayakarta地震台(标记为YOGI)的记录，图3是Denpasar, Bali地震台(标记为DNP)的记录. 一般来说，地震波由三种波组成：纵波或初波 ( $P$-波)，横波或次波 ( $S$-波) 和表面波. $P$-波和 $S$-波在地表下传播，而表面波则沿地球表面传播. 通过地表下各层传播并到达地震台的地震波可以被分成以下几种：沿直线传播的，被某一层边界反射的，和被下一层折射回来的. 纵波或初波速度最大，而表面波速度最小，大约是 $P$-波的60% .

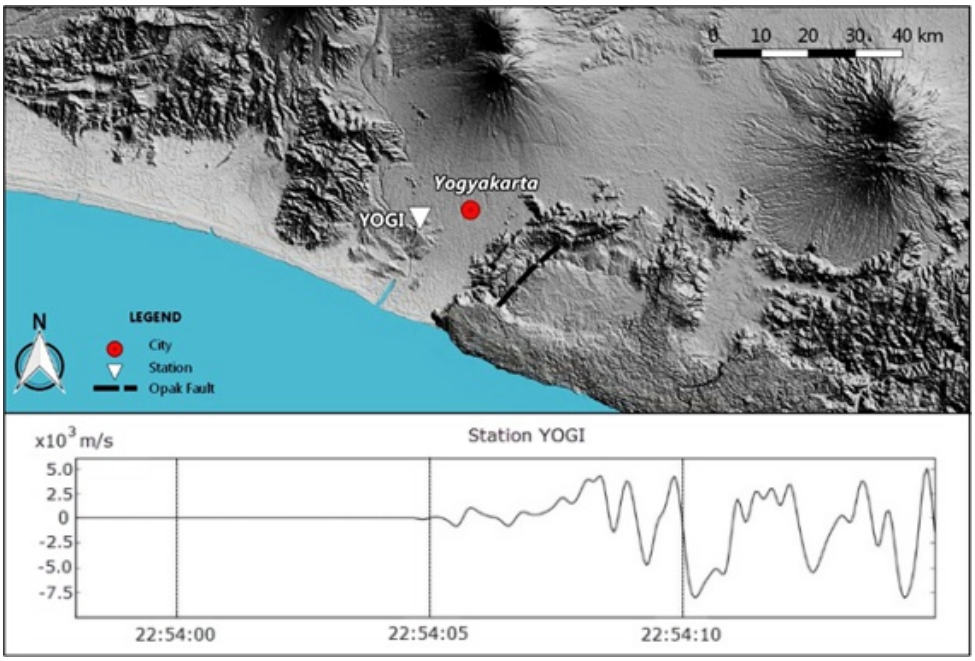



图2 地图上YOGI的位置

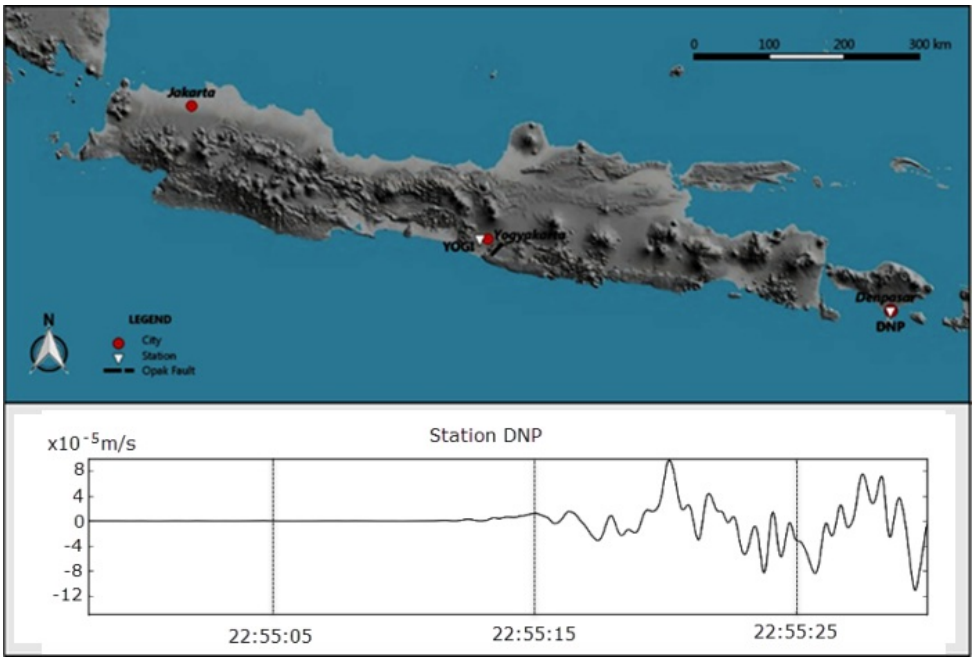



图3 地图上DNP (Denpasar) 的位置

震中（震源在地表的投影）与YOGI以及DNP地震台的距离分别为 22.5 km 和 500 km . 在印度尼西亚爪哇，地壳的深度是 30 km . 在地壳下方是地幔层. 同其它波动现象类似，地震波也满足斯涅耳定律（Snell's law). 地震波也能被地幔层反射. 在本题中我们忽略地表的曲率（curvature).

| | | |
|---|---|---|
| B.1 | 图 2 给出了YOGI地震台的地震曲线图. 利用其中的数据求解出地壳中 $P$-波的速度. | 0.5 pt. |
| B.2 | 求解出由于日惹地震引起的到达Denpasar DNP地震台的直接传播的 $P$ 波的传播时间和反射波的传播时间. | 0.6 pt. |

假定地球只有两层结构组成：地壳和地幔. 初波在地壳和地幔内以不同的速度匀速传播. 在地幔中的速度要比在地壳中的速度快. 注意：折射角为90度时，折射到地幔中的 $P$ 波会沿地壳-地幔边界传播，在整个边界传播路径上的每一点，该波都会部分地折射回地壳.

| | | |
|---|---|---|
| B.3 | 求解出地幔内 $P$-波的速度. | 1.2 pt. |

考虑更实际的地球结构，地壳可以分成很多薄层，地震波的速度作为深度 $z$ 的函数可以表示成 $v(z) = v_0 + az$ ，这里 $a$ 是一个常数，震源近似地认为在表面。在这个模型中，波线是弯曲的(curving).

| | | |
|---|---|---|
| B.4 | 定义波线参数 $p = \sin\theta(z)/v(z)$ ，这里的 $\theta(z)$ 是波线和法线之间的夹角.假设地震波到达地震台时的波线参数是 $p$ ，求解地震台到震源的距离，用 $p$ 、$v_0$，和 $a$ 来表示. 这里假设震源非常接近地表. | 1.4 pt. |
| B.5 | 求解出从震源到地震台的传播时间 $T$ ， 用对 $z$ 的积分形式来表示。 | 1.0 pt. |

地球由一系列均匀层状结构组成，各层中波速为 $v_i$ ，层厚为 $\delta z_i$ 。

| | | |
|---|---|---|
| B.6 | 根据前面问题的结果，估计出从震源到DNP地震台的传播时间 ($T$) .假定地壳只由三层离散的结构 ($i$ = 1, 2, 3) 组成，每层结构的参数为 $v_1$ = 6.65 km/sec （千米/秒） , $v_2$ = 6.97 km/sec, $v_3$ = 6.99 km/sec, $p$ = 0.143 sec/km, $\delta z_1$ = 6.0 km, $\delta z_2$ = 9.0 km, $\delta z_3$ = 15 km . | 1.0 pt. |

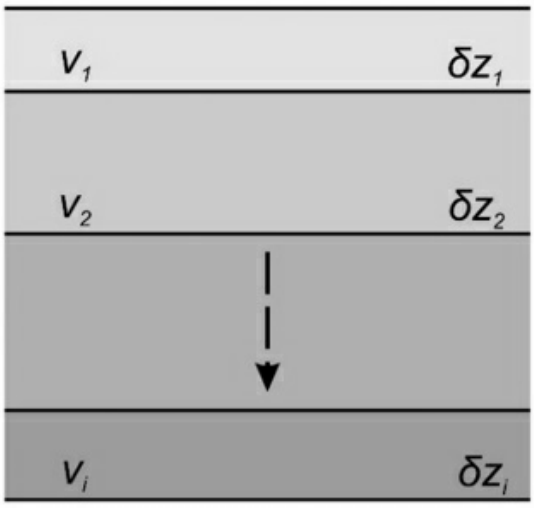



**图4** 地球层状结构的一个简单模型

## C. 爪哇海啸

2006年7月17日当地时间15点19分27秒，在远离爪哇西部和中部海岸处，发生了Pangandaran大地震和海啸. 地震时，震中断层位于海床上，断层的移动产生了巨大的水波，称之为海啸. 换句话说，海啸是一种浅水波，其初始振幅很小，但波长极其长. 考虑一个突然的由断层引起的某处海底上升，如图5所示. 假定地震的能量转换成上升海水的势能。为了构建简单模型，我们把上升海水近似看成是一个盒子形状，其面积为 $\lambda L/2$（这里 $L \gg \lambda$ ），高度为 $h$.

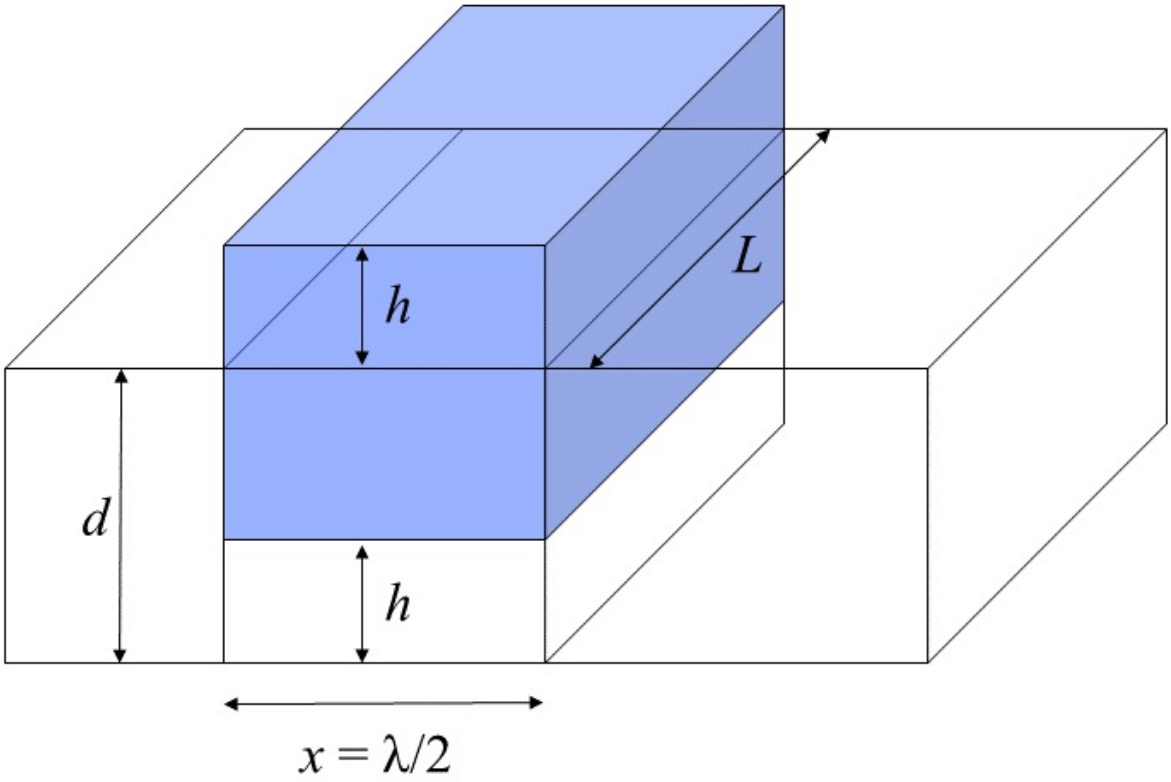



**图5** 海啸波示意图, d是海洋深度.

| | | |
|---|---|---|
| C.1 | 求解出由于地震, 上升海水中储存的相对于海平面的势能. 假定海水密度为$\rho$ . | 0.5 pt. |
| C.2 | 设法求出海啸波的速度. | 1.2 pt. |
| C.3 | 从能量角度考虑，求出海啸波振幅作为海水深度的函数. 假设深度变化缓慢，并且已知深度为$d_0$时，振幅为$A_0$. | 1.3 pt. |

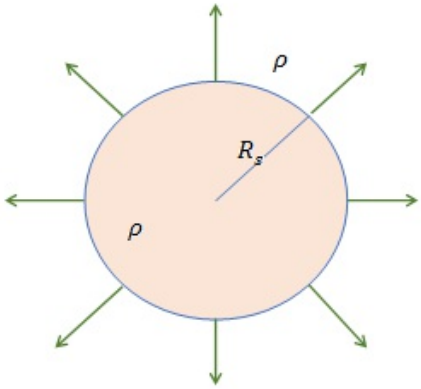
# 暴胀宇宙学

由于地球和星系之间的相对运动，在地球上观测到的星系光谱，与星系发光时原本的光谱不同. 这个区别叫做电磁多普勒效应. 你可能会认为，当观测众多星系时，多普勒效应导致的波长移动会是随机的：一些星系发出的光线波长变长（红移），一些星系发出的光线波长变短（蓝移）. 但是，观测表明，除了离我们很近的少数星系外，其它所有星系的光线都发生了红移。假如在宇宙中其它地点进行观测，这个结论也是成立的。所以，我们的宇宙在膨胀.

在宇宙中，当我们考虑大于100 Mpc(1pc = 3.26 光年)的距离尺度时，宇宙小尺度的不均匀性可以忽略. 当我们考虑大尺度的平均效应时，原本结团分布的星系，在分布上变得越来越各向同性（不依赖于方向）和均匀（不依赖于位置）.

所以，我们可以假设宇宙具有均匀的质量密度$\rho$， 并且在膨胀.

## A. 膨胀的宇宙




为了理解宇宙，我们考虑一个简单的模型：一个密度均匀、正在膨胀的球，被镶嵌在同样密度的、半径足够大的球形介质中。在某一确定时刻，球的半径是$R_s$. 为描述宇宙膨胀，球的半径$R(t)$随时间的变化由尺度因子$a(t)$表征：$R(t) = a(t)R_s$.

根据我们宇宙的模型，用牛顿引力理论计算球边界上一个质量元的加速度，这样可以得到一套Friedmann方程:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \tag{1}$$

这里 $k$ 是一个无量纲常数.

| | | |
|---|---|---|
| A.1 | 定出方程(1)中的常数 $A_1$ . | 1.3 pt. |

讨论到目前为止都是非相对论的. 但事实上，若将$\rho(t)c^2$ 理解为总能量密度(不包括引力势能)，则可以拓展到一个相对论体系.在相对论体系下，可以导出第二个Friedmann方程:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad (2)$$

推导时要用到绝热系统的热力学第一定律，这里$c$ 和 $p$ 指的是光速和球表面的压强.

| | | |
|---|---|---|
| A.2 | 定出方程(2)中的常数$A_2$. | 0.9 pt. |

为解方程组(1)和(2)，我们需要假设一个压强与密度的关系$p = p(\rho)$，例如$p(t)/c^2 = w\rho(t)$，其中$w$是常数. 这里还有一个因子$H = \dot{a}/a$，被称为哈勃参数. 我们用下标0来标记宇宙现在时刻这些参数的值，例如$t_0$, $\rho_0$, $H_0$, $a_0$等. 为简便起见，设$a_0 = 1$.

我们相信，宇宙诞生于“大爆炸”. 大爆炸产生了由相对论性粒子组成的辐射. 在宇宙膨胀过程中，宇宙的温度降低，粒子的运动变成非相对论性的. 但是，近年的观测表明，目前宇宙的能量密度中，“宇宙常数”的能量密度占主要部分. 另外，对光子而言，在宇宙膨胀过程中，光子的波长与宇宙的尺度因子成正比.

| | | |
|---|---|---|
| A.3 | 对以下三种情况，分别求$w$的值. (i) 宇宙全部由辐射 (也就是光子的能量)组成, (ii) 宇宙全部由非相对论性物质组成，(iii) 宇宙能量密度为常数. | 1.2 pt. |
| A.4 | 设$k = 0$. 对A.3中所述的情况(i), (ii)和(iii)，分别求$a(t)$. 对情况(i)和(ii),使用初始条件 $a(t = 0) = 0$, 对情况(iii)使用条件$a_0 = 1$. | 1.2 pt. |

方程(1)中的常数$k$的选取对应于宇宙中三维空间几何的分类. $k = +1$对应正曲率宇宙(闭宇宙，体积有限). $k = 0$对应平坦宇宙(体积无限). $k = -1$对应负曲率宇宙(开宇宙，体积无限). 定义密度比$\Omega = \rho/\rho_c$，其中$\rho_c c^2 = H^2/A_1$叫做临界能量密度.请注意$A_1$是从问题A.1中求得的.

| | | |
|---|---|---|
| A.5 | 将方程(1)中的$k$用$\Omega$, $H$ , $a$,和$R_0$表示出来. | 0.1 pt. |
| A.6 | 对$k = +1, k = 0, k = -1$三种情况，分别求出对应的$\Omega$的取值范围. | 0.3 pt. |

## B. 引入暴胀的动机，及暴胀发生的条件

对宇宙微波背景辐射 (CMB)的观测表明，在当前观测精度下，目前的宇宙可以看成是平坦的. 这对早期宇宙理论而言，是一个严峻的问题：早期宇宙必须在极高精度下是平坦的，否则，如果早期宇宙与平坦宇宙有哪怕极微小的偏差，这个偏差会随时间增长，最终使得我们目前的宇宙非常不平坦（与观测矛盾）.

| | | |
|---|---|---|
| B.1 | 对于辐射为主（宇宙的能量密度主要为辐射能量密度）的宇宙阶段，和物质为主的宇宙阶段，分别求$(\Omega(t)-1)$随时间$t$的函数关系(见问题A.3). | 0.5 pt. |

为了解决这个问题，在宇宙早期，宇宙应该有一段能量密度为常数的时期. 这种常数能量密度会导致宇宙指数膨胀. 宇宙的这段时期称为暴胀.

| | | |
|---|---|---|
| B.2 | 在这个常数能量密度主导的时期，求$(\Omega(t)-1)$随时间的函数关系. 计算时，假设$(\Omega(t)-1)\ll 1$. | 0.3 pt. |
| B.3 | 证明暴胀的条件导致以下条件成立: 负压强，加速膨胀 $(\ddot{a}>0)$, 哈勃半径递减 $(d(aH)^{-1}/dt<0)$. | 0.9 pt. |
| B.4 | 证明哈勃半径递减的条件也可以用参数$\epsilon=-\dot{H}/H^2$表示成$\epsilon<1$. | 0.2 pt. |

只要$\epsilon<1$暴胀就会发生，暴胀结束时 $\epsilon=1$. 我们可以定义 e叠数 $N$, 使得 $dN=d\ln a=Hdt$ 并且暴胀结束时 $N=0$.

## C. 由均匀分布的物质驱动的暴胀

为了实现一段暴胀，我们考虑由一种均匀分布的物质主导的宇宙. 这种物质叫暴胀子，由$\phi(t)$表示.

暴胀子的动力学方程为：

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}=-V', \tag{3}$$

其中$V=V(\phi)$是势能函数，$V'=\frac{\partial V}{\partial\phi}$. 哈勃参数和暴胀子的关系为

$$H^2=\frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V\right]. \tag{4}$$

其中$M_{pl}$是一个常数，叫做约化普朗克质量. 暴胀过程发生的条件是，在足够长的时间内，暴胀子的势能$V$远远大于动能$\dot{\phi}^2/2$. 这时，方程(3)中的$\ddot{\phi}$项可以被忽略. 这个条件叫做慢滚近似.

参数$\epsilon$和$\eta_V=\delta+\epsilon$叫做“慢滚参数”, 其中$\delta=-\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$.

| | | |
|---|---|---|
| C.1 | 用$V(\phi)$及其对暴胀子的一阶导数$V'$和二阶导数$V''$，估计参数$\epsilon$，参数$\eta_V$，和$dN/d\phi$. | 1.7 pt. |

## D. 一种简单势能驱动的暴胀

任何暴胀模型的预言都应该与宇宙微波背景辐射(CMB)的实验观测进行比较，这些可观测的约束条件有 $n_s = 0.968 \pm 0.006$，$r < 0.12$. 其中$r = 16\epsilon$，$n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$.计算$\epsilon$和$\eta_V$时使用的暴胀子取值为 $\phi = \phi_{start}$. 假设暴胀子的势能为$V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$，其中$n$是一个整数，$\Lambda$是一个常数.

| | | |
|---|---|---|
| D.1 | 计算暴胀结束时的$\phi_{end}$. | 0.5 pt. |
| D.2 | 利用e叠数$N$和整数$n$，计算$r$和$n_s$. 利用观测值$r$和$n_s$，估计最接近的整数$n$. 在计算中，设 $N = 60$. | 0.9 pt. |

# 用激光偏转法来测定折射率梯度和盐溶液的扩散系数

## I. 简介

扩散是指原子或分子通过随机行走达到热力学平衡的过程. 例如，在一个盒子里有水和盐水的混合，则盐分子会从高盐密度区域向低盐密度区域流动，形成一个扩散流. 扩散速率由扩散系数D来表征. 扩散在很多过程中有重要作用，从生物化学到天文物理都有应用.在以下的实验问题中，要研究的是盐分子的扩散.盐分子将从盐溶液向蒸馏水扩散，形成一个盐密度连续变化的过渡层. 而此溶液的折射率与盐密度有关.因此，我们可以通过激光光束偏转的光学实验来研究扩散过程.

## II. 目标

1. 通过测量折射率梯度，来定出盐水溶液中的扩散系数.
2. 定出扩散系数随着盐溶液浓度的变化率.

## III. 器材清单

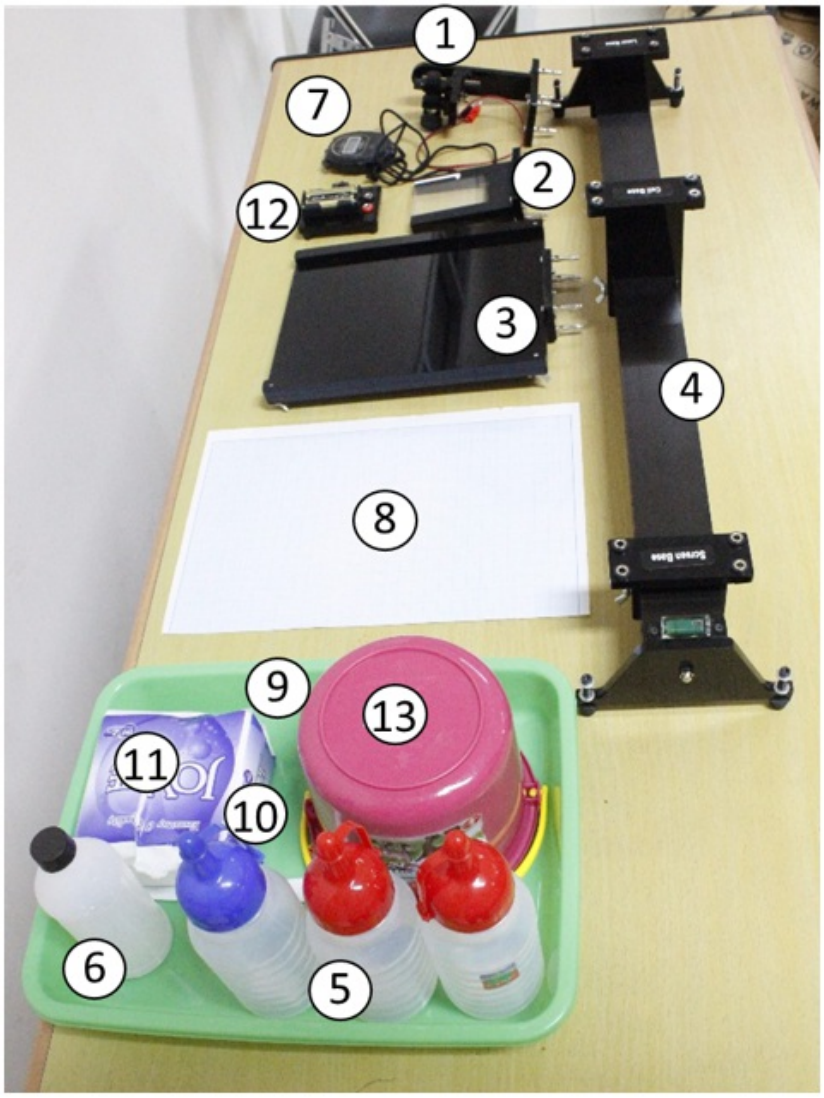



**图 1.** 实验所需器材.

1. 线光源激光模块(二极管激光，波长 $\lambda$ = 632 nm，和圆柱形透镜组)
2. 扩散盒 (6.5 cm x 0.8 cm x 6.5 cm，带有支架)
3. 带有支架的屏幕
4. 有长度刻度的光学导轨
5. 不同浓度的盐-水溶液
6. 蒸馏水(Aquadest)
7. 秒表
8. 坐标纸 (毫米格子)
9. 吸管

10. 刀 + 纸巾 清洁时结合使用
11. 纸巾
12. 电池
13. 装废盐水的垃圾桶

图2 给出了实验装置的示意图.

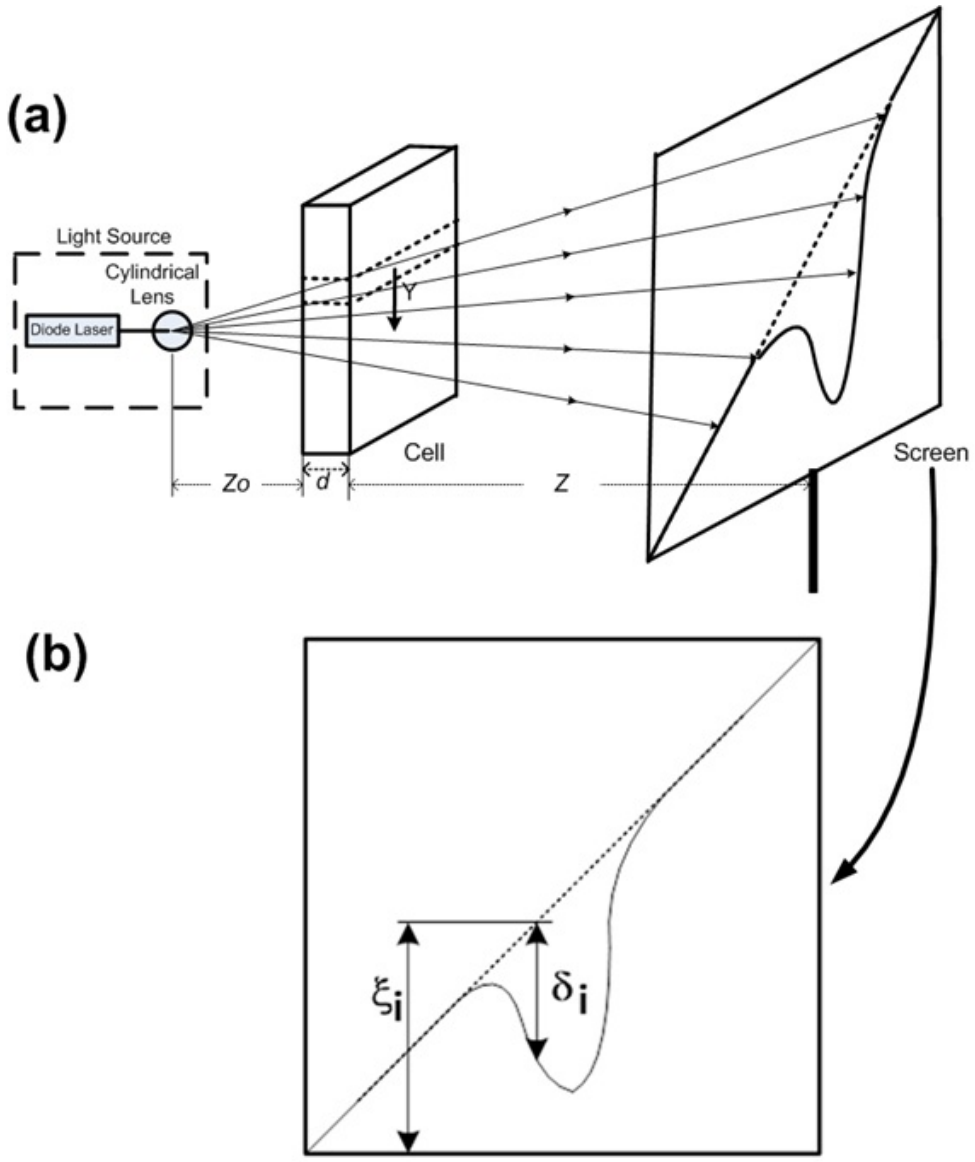



图 2. (a) 实验示意图，扩散盒中蒸馏水(aquadest)在盐水溶液之上. (b) 典型的偏转图像, 当溶液1和溶液2之间有扩散时，出现在屏幕上的偏转激光形成的图像.

为了得到流体中折射率梯度随竖直位置变化的函数关系，我们必须建立起屏幕上竖直位置($\xi$)和扩散盒中竖直高度 ($Y$)之间的关系，以及光线竖直偏转($\delta$)和折射率梯度($dn/dY$)之间的关系. 从实验装置中的几何关系(见图2)我们有:

$$Y_i = \frac{\xi_i Z_0}{Z_0+d+Z} \qquad (1)$$

这里$Z$, $Z_0$ 和 $d$ 分别是图2(a)中标出的光源模块与扩散盒之间的距离, 扩散盒与屏幕之间的距离, 以及扩散盒的厚度.为了定出$Z_0$，请注意激光模块上有条线标出了圆柱透镜组所在的位置.

扩散盒厚度 ($d$)和折射率梯度都足够小，使得折射角$\alpha$对应的光线，在扩散盒内，竖直方向上的位移可以忽略. 在此限制下，每条光线在扩散盒内几乎是在同一高度传播，并且被此高度对应的单一折射率梯度偏转.

由此可以得到如下关系:

$$\left(\frac{dn}{dY}\right)_i = \frac{\delta_i}{Zd} \qquad (2)$$

测量步骤:

- 为了得到偏转激光在屏幕上的图像(如图2b)， 你必须将图1所示的实验组件按图2(a)的示意图组装.
- 确保激光打开，并且激光垂直入射到扩散盒上时，在屏幕上的投影有对角线的形状. 为了得到一条明亮并且聚焦的线，你可以调整$Z$、$Z_0$和激光的焦距（可以旋转激光器的后部）. 你也可以通过整体旋转激光器(需拧松激光器上方的螺丝)来调整对角线在屏幕上的方向. 在没有水和盐溶液时，你会看到直的对角激光线.
- 当两种不同的溶液被混合时，屏幕上将会出现偏转激光的图样。请确认：你先把盐溶液倒入扩散盒，直到达到盒上标出的白线为止，用吸管将大约40滴水，从扩散盒侧边的管道中慢慢地滴入扩散盒。然后，你可以开启秒表以测量这两种溶液扩散的时间。如果$Z$, $Z_0$ 和激光高度都已经优化，则偏转的激光在屏上的图像将居中、清晰，并且图像下凸部分的深度会尽可能的大。为了使测量误差最小，你需要找到这个最优的实验条件。
- 30分钟后，你可以将毫米坐标纸附在屏上，并用铅笔在毫米坐标纸上画出激光的投影图像. 注意：本实验要求在3个不同的盐溶液浓度（即$C_0$ = 23 g/150 ml, $C_0$ = 28 g/150 ml 和 $C_0$ = 33 g/150 ml）下进行测量，因此你需要经常更换毫米坐标纸。毫米坐标纸应该被插入屏幕，你可以通过转动屏幕的几个角上的螺丝，以使纸被夹紧或放松。
- 请务必确认在毫米坐标纸上写下你的学生号码，以及测量时你使用的溶液浓度.

## IV. 实验和任务

A: 测量盐水溶液的折射率的梯度 (4.5 points)

以下所有实验，三种盐浓度溶液都需要做. 请注意不需要误差计算.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | 操作实验以得到偏转激光在屏上的图像。经过30分钟的扩散时间 ($t$)后，用铅笔在附在屏上的毫米坐标纸上，画出激光形成的图像. | 1.2 pt. |
| **A.2** | 根据扩散时间($t$)为30分钟的，画在毫米坐标纸上的激光图像，测量$Z$, $d$, $Z_0$, $\xi_i$ 和 $\delta_i$ ($i$ = 1,...,20, 是对应不同水平位置的数据点) . 参数$Z$, $d$, $Z_0$, $\xi_i$ 和 $\delta_i$ 以cm为单位. 请注意 $Z$, $d$ 和$Z_0$ 对所有的测量都是相同的. 在表1中记录结果. | 1.5 pt. |
| A.3 | 根据扩散时间 ($t$) 为30分钟的实验结果，计算 $Y_i$ 和 $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$ ($i$ = 1, ..., 20, 是数据点) . 请注意 $Z$, $d$ 和 $Z_0$ 对所有的测量都取相同值. 在表2中记录结果. 对$t$ = 30 分钟的情况，画出 $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$ 对 $Y_i$ 的图. | 1.5 pt. |
| A.4 | 根据“A3”得到的 $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$的最大值，确定其相应的$Y_i$值，并把这个$Y_i$值记为$h$. | 0.3 pt. |

### B: 确定扩散系数 **(4.2 points)**

在问题A.3里得到到曲线可以用下面的两个方程拟合.

$$\left(\frac{dn}{dY}\right)_i = \left(\frac{dn}{dc}\right)\left(\frac{dc}{dY}\right)_i \qquad (3)$$

$$\left(\frac{dc}{dY}\right)_i \approx \frac{C_o}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(h-Y_i)^2}{4Dt}} \qquad (4)$$

这里 $C_0$, $D$, $t$, $h$分别表示盐溶液的初始浓度、扩散系数、扩散持续时间、折射率梯度($dn/dY$)取最大值时的$Y_i$值. 请注意($dn/dC$)是常数.由公式（3）和（4）可得$(dn/dY)_i$和$Y_i$之间的线性关系，由此可得扩散系数.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | 根据公式(3,4)找到特定的函数形式 $f\left(\frac{dn}{dY}\right)$ 和 $g(Y)$ ，使得$f\left(\frac{dn}{dY}\right)$ 和 $g(Y)$之间的依赖关系是线性的. | 0.9 pt. |
| B.2 | 做表（即答题卡中的表3），表中包含若干数据点、横坐标轴、反映线性方程的纵坐标轴（B1中的线性方程，数据点从任务A得到）. 据此表作图. | 1.8 pt. |
| B.3 | 对于$t$ = 30 分钟的这些结果,根据B2中数据点画出的线性图，定出对应的扩散系数$D$. 请注意线性依赖关系也许只对你部分区间中的数据成立. | 1.5 pt. |

## C. 非线性扩散 (1.3 points)

| | | |
|---|---|---|
| **C.1** | 以上分析要假设$D$不依赖于$C$. 如果这个假设不成立，就有所谓的非线性扩散. 然而，在$\frac{dn}{dY}$最大处，我们可以将其考虑为普通扩散，只是扩散系数依赖于对应的浓度值. 利用问题B部分中的数据，用作图的方法确定扩散系数随盐溶液浓度的变化率. | 1.3 pt. |

# 用平行偶极线磁势阱进行地震和火山监测

## A. 简介

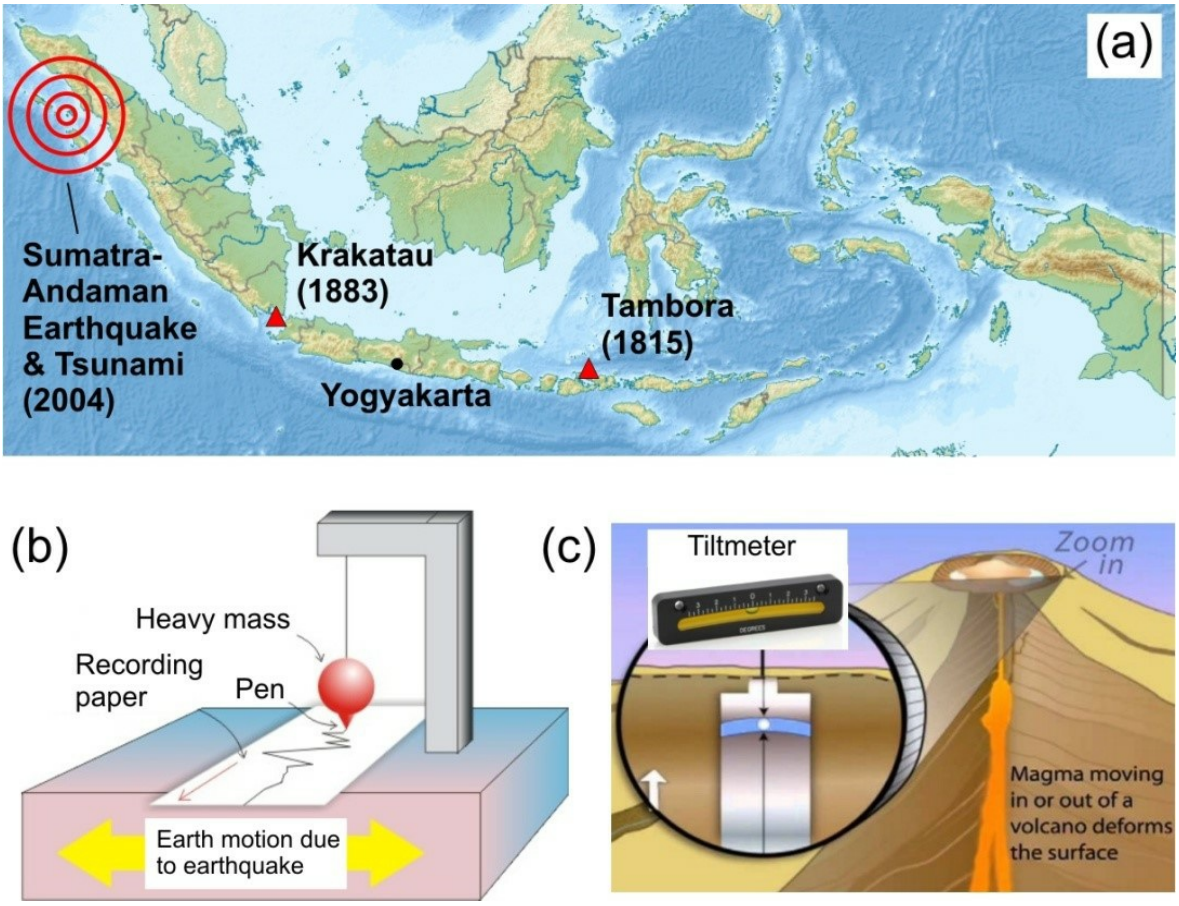



图1（a）印度尼西亚地图，图中标出了印尼几次大灾难。（b）探测地震的地震仪。（c）用于监测火山的地动仪（测量地面倾斜度）。

印度尼西亚是世界上最大的群岛，它有17,000个岛屿分布在热带地区，由此它常被称为“赤道的珍珠”。不幸的是，印尼有大量的自然灾害，例如地震和火山喷发。像sumatra-Andaman地震和Tsunami（2004年）、Krakatau（1883年）以及Tambora（1815年）火山喷发都是人类历史记录中的巨大的灾难事件。为了探测地震，我们地震仪，它是一个摆动装置为基础的系统，通过测量地面的位移和加速度来监测地震（图1b）。为了监测火山，我们用地动仪来测量地面倾斜度的变化，这种变化是地下岩浆的移动引起的（图1c）。在本题中，我们将根据物理学原理，用一种新的磁陷阱和监测方法，即所谓的平行偶极线（PDL）势阱系统，监测地震和火山。

平行磁偶极线系统是两个磁偶极的线性分布（也称为磁偶极线）的一种排列，如图2所示。近来，两位印尼物理学家发现了这一系统的有趣现象：如果上述偶极线的长度超过某一特定的临界长度，磁场在边缘上变得更强，这将产生一个“骆驼峰形状势”（简称驼峰势），如图2a所示。这一驼峰效应很重要，它使我们可以用这一系统作为

新型的磁势阱，即平行偶极线（PDL）势阱。实验上，我们可以用一对直径磁铁，即沿直径方向磁化的圆柱体型磁铁，其磁北极和南极在曲面上，而不是在柱体的平面上，如图2c。

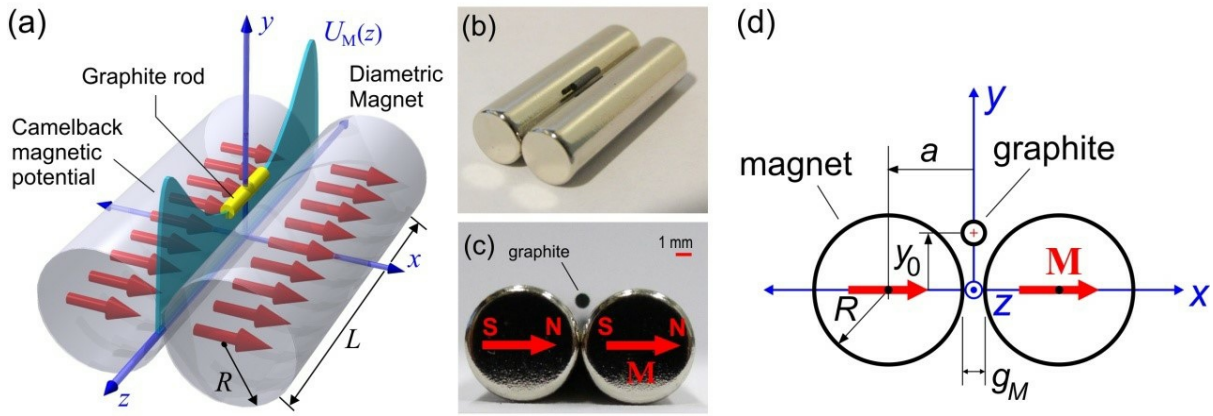



图2（a）平行偶极线势阱模型，其中，驼峰势沿z-轴方向。（b）包含两个“直径”磁铁的装置。（c）“（b）”的截面图。（d）PDL势阱的示意图。

如果我们放置一个石墨棒（普通铅笔的芯）进入势阱，棒将浮起，或者被捕获且保持在稳定状态。这是由于：在$x$-方向，石墨被两边的磁铁排斥，在竖直 $(y)$方向，磁铁排斥力与重力平衡，使石墨漂浮在高度 $y_0$（图2d）。在纵向$(z)$，驼峰势使石墨稳定。

磁势阱的驼峰势起到了一维谐振子的作用。如果你沿$z$-轴方向给石墨棒一个小微扰，棒将表现出欠阻尼振动，如图3a.　　这一PDL势阱可以被用做灵敏的地震仪。如果地下发生振动，石墨棒倾向保持稳定，其相对位移（图3b）是“地震”的信号。与此相似，它也可以用作灵敏的地动仪。如果你使势阱略微倾斜，石墨棒将在没有任何摩擦的情况下发生明显移动。

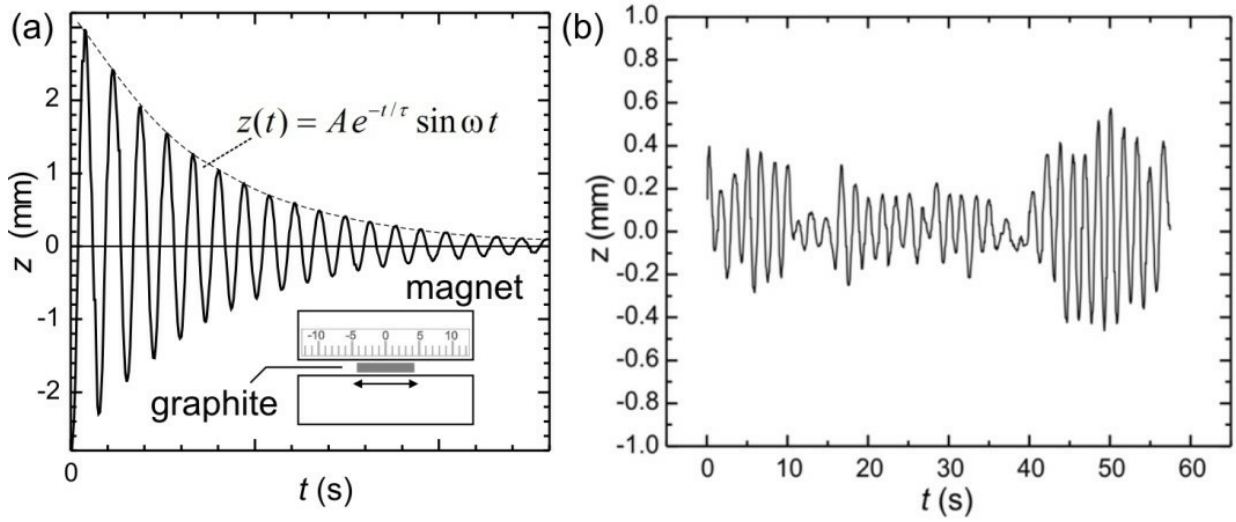



图3.（a）石墨棒沿驼峰势方向的欠阻尼振动。（b）地震仪的应用：通过PDL势阱进行地震探测。

在以下两部分，我们将研究PDL势阱的物理机制及其应用。

Section A： 若干基本特点

（1） 确定磁铁的磁化强度 $M$ （2.5分）。

（2） 磁漂浮和磁极化率$\chi$（1.0分）。

（3） 驼峰势振动和磁极化率$\chi$（1.0分）。

（4） 振子的品质因数$Q$，以及确定空气的线性$\mu_A$（3.0分）。

Section B： 若干应用

（5） PDL势阱地震仪（0.5分）。

（6） PDL势阱地动仪（2.0分）。

## B. 仪器装置

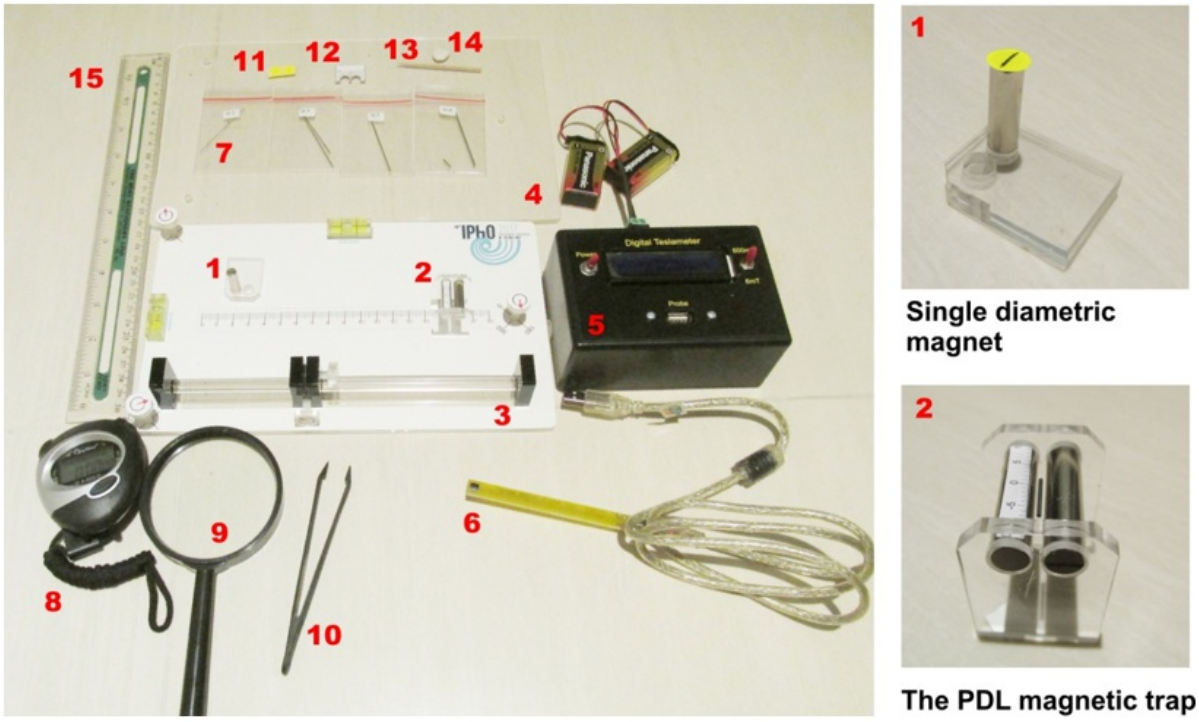



**图 4.** 实验装置图.（Single diametric magnet：单个直径方向磁铁；The PDL magnetic trap：PDL磁势阱）

1. 单个直径方向磁铁装置。黄色标签用来标记磁化方向。
2. PDL磁势阱的装置，图中表示出石墨的漂浮。
3. 带有3个螺丝的顶部平台。
4. 底部平台。
5. 测量磁场的特斯拉计。提供的电池为特斯拉计供电，并连有一个霍尔探头。
6. 特斯拉计的霍尔探头元件。
7. 4种直径尺寸的石墨棒（铅笔的铅芯）： HB/0.3, HB/0.5, HB/0.7,和HB/0.9 . 关于精确的直径，参见所给的常数和数据。为了得到题目所要求的特定长度的石墨棒，你可能需要折断它们。
8. 秒表
9. 放大镜
10. 镊子（抗静电干扰的）

11. 黄色圆贴片一 用来画单个磁铁的磁化方向的标记(北极，南极)
12. "插入尺"用来量石墨棒悬浮高度
13. 牙签，用来移动石墨棒
14. 橡皮泥，用来将磁铁装置粘在平台上
15. 尺子

**说明和警告:**

1. **保持单个磁铁远离PDL势阱（双磁铁）装置，否则他们会撞到一起并折断！**
2. **特斯拉计不用时要关闭，以节省电源!**
3. 请将装置7, 11-14小心的从底部平台(装置4)上取下，并将顶部平台(装置3)放在底部平台上.
4. 你可以用三个螺丝来调节顶部平台的水平.

常数和数据表:

| | | |
|---|---|---|
| 直径方向磁铁的半径 | : | $R$ = 3.2 mm |
| 直径方向磁铁的长度 | : | $L$ = 25.4 mm |
| PDL势阱的缝隙宽度 | : | $g_M$ = 1.5 mm |
| 石墨的质量密度 | : | $\rho$ = 1680 kg/m$^3$ |
| 石墨棒 "HB/0.3" 直径 | : | $d$ = 0.38 mm |
| 石墨棒 "HB/0.5" 直径 | : | $d$ = 0.56 mm |
| 石墨棒 "HB/0.7" 直径 | : | $d$ = 0.70 mm |
| 石墨棒 "HB/0.9" 直径 | : | $d$ = 0.90 mm |
| 室温 | : | $T$ = 298 K |
| 真空磁导率 | : | $\mu_0$ = 1.257×10$^{-6}$ H/m |
| 玻尔兹曼常数 | : | $k_B$ = 1.38064852 × 10$^{-23}$ J/K |
| 重力加速度 | : | $g$ = 9.8 m/s$^2$ |

**C.** 实验和问题

**SECTION A.** PDL势阱的基本特性

**[1] 定出磁铁的磁化强度 ($M$) (2.5 pt.)**

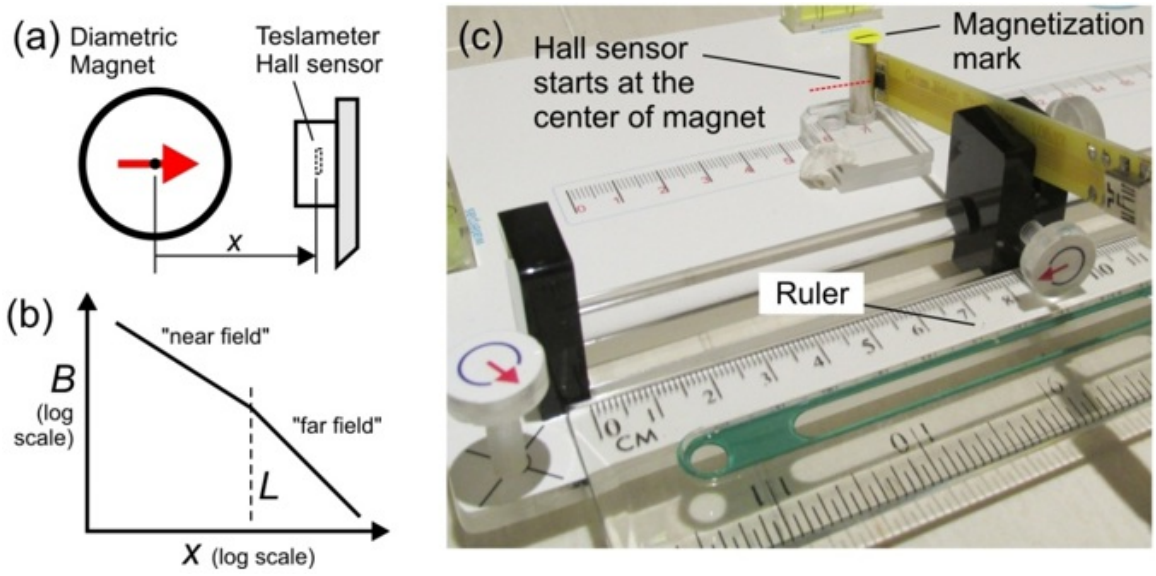



**Figure 5.** (a) 测量磁场. (b) 磁感应强度随位置的变化曲线（对数坐标） (c) 装置图.（Diametric Magnet：直径方向磁铁；Teslameter：特斯拉计；Hall sensor：霍耳传感器；Hall sensor starts at the center of magnet：霍耳传感器初始位于磁铁中心位置；Magnetization mark：磁化方向标记；Ruler：尺子）

磁势阱的捕获能力取决于磁铁总的磁偶极矩 $m$. 它依赖于磁化强度 $M$， 磁化强度是指单位体积内的磁偶极矩，是磁性材料的一个特性。对于这里的柱状磁铁：

$$M = \frac{m}{\pi R^2 L} \qquad (1)$$

$R$ 是半径，$L$ 是磁铁长度（见常数和数据表部分）。$M$对于本实验中所有磁铁来说都是相同的。我们将研究磁场的分布并得到在我们这个PDL势阱中使用的直径方向磁铁的磁化强度$M$。

使用单个直径方向磁铁装置，并如图5c所示组装实验仪器。如图6a所示，使磁化方向对准霍耳（磁场）传感器。使用特斯拉计测量磁场强度在$x$的分布。磁场强度$B$在近场或$x \leq 16$ mm范围内的“偶极子线”：

$$B_I(x) = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^P L} \qquad (2)$$

$x$轴沿直径方向磁铁的磁化方向，如图6a所示。$x$是指直径方向磁铁中心和传感器芯片里面的霍耳传感器探头之间的距离。$x$的初始读数请参考图6b所示。

我们只在“近场”区域内做测量：

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | 在附近没有任何磁铁的情况下，记录特斯拉计的零点值($B_0$)。之后测量的结果应该减去上述零点值。 | 0.1 pt. |
| **A.2** | 在近场区域($7 \le x \le 16$ mm)内测量磁场$B$ 随 $x$的变化情况，这里$x$是指测量点离开磁铁中心的距离。在答题纸上记录并画出（record and plot）你的结果。注意遵从下面的“提示和指南”部分内容。 | 1.15 pt. |
| **A.3** | 利用你的实验数据定出幂指数 $p$ 的值。 | 0.75 pt. |
| **A.4** | 定出磁铁的磁化强度 $M$ 的值。 | 0.5 pt. |

**提示和指南：**

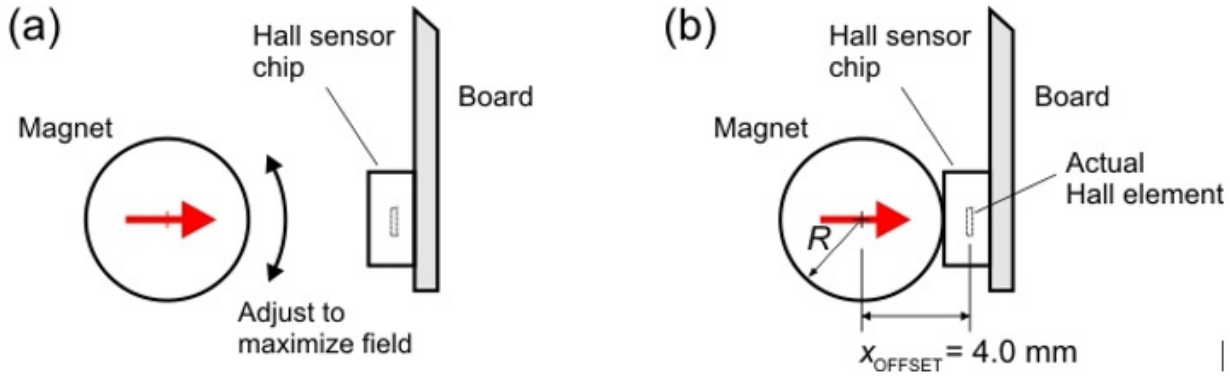



图6. 磁场测量。（a）调节。（b）偏移问题。Magnet：磁铁 Hall sensor chip：霍尔探测芯片

Adjust to maximize field：调至最大磁场 Hall sensor chip：霍尔感应片 Borad：平板

Offset： 偏移 Actual Hall element：真实的霍尔元件

1. 当不用时，关闭特斯拉计，以减少电池消耗!
2. 对特斯拉计，在读每一个数之前，等大约2秒。
3. 注意：$x$是从磁铁的中点到测量点的距离。磁铁的半径是 $R$ = 3.2 mm.
4. 用图5c推荐的测量步骤。
5. 参见图6a，转动磁铁，使其磁化指向霍尔元件，这将导致磁场最大。你可以用黄色的圆贴片标记磁铁的磁化方向。
6. 当霍尔元件接触到磁铁时，磁铁中心点到实际霍尔元件之间的实际距离是所给的如下偏移值：$x_{OFFSET}$ = 4 mm

7. 在霍尔元件位于$x$ = 5 mm! 时开始你的测量！当霍尔元件接触到磁铁时（$x$ = 4 mm），所得的数据应该被丢掉，这是由于霍尔元件已饱和。

## [2] 磁悬浮效应和磁极化率($\chi$) (1 pt.)

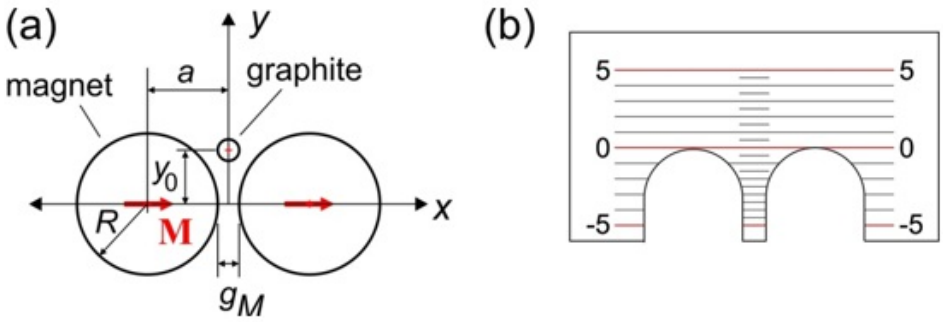



图7 （a）势阱中的磁悬浮效应。（b）插入尺，测量悬浮高度$y_0$.

PDL势阱可以实现磁悬浮。如图7a所示，石墨棒悬浮在势阱中心，高度为$y_0$。石墨棒受到磁场的排斥力$F_M(y_0)$。这个排斥力依赖于磁极化率$\chi$和石墨棒的位置$y_0$。磁极化率描述了一个物质如何在外场的作用下被磁化，并满足关系$\mu = (1+\chi)\mu_0$ 。其中，$\mu$为物质的磁导率。在PDL势阱中，石墨棒受磁场的斥力为：

$$F_M(y_0) = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_r}{2}\frac{R^4}{a^5} f\left(\frac{y_0}{a}\right) \qquad (3)$$

注意上式中有个负号并且当$F_M(y_0)$为正时代表力的方向向上。这里$V_r$是石墨棒的体积，$M$是磁铁的体磁化强度（从问题1中得到），磁铁中心的位置为$a = R + g_M/2$（见图7a），其中$g_M$ = 1.5 mm是两个磁铁间的缝隙）。$f(u)$是一个无量纲常数：

$$f(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5} \qquad (4)$$

| | | |
|---|---|---|
| **A.5** | 将长度为8 mm的HB/0.5石墨棒轻轻地投放到势阱中。测量石墨棒的磁悬浮高度$y_0$ （见图7a）。提示：如图7b所示，用插入尺进行测量。在读取石墨棒位置时，将尺压在磁铁上。 | 0.1 pt. |
| **A.6** | 利用A.5中的结果定出石墨棒的磁极化率$\chi$ | 0.8 pt. |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **A.7** | 石墨棒是什么样的磁性材料？从下列选择一种：(i)铁磁；(ii)顺磁；(iii)抗磁 | 0.1 pt. |

## [3] 驼峰势中的振动和磁极化率 ($\chi$) (1 pts)

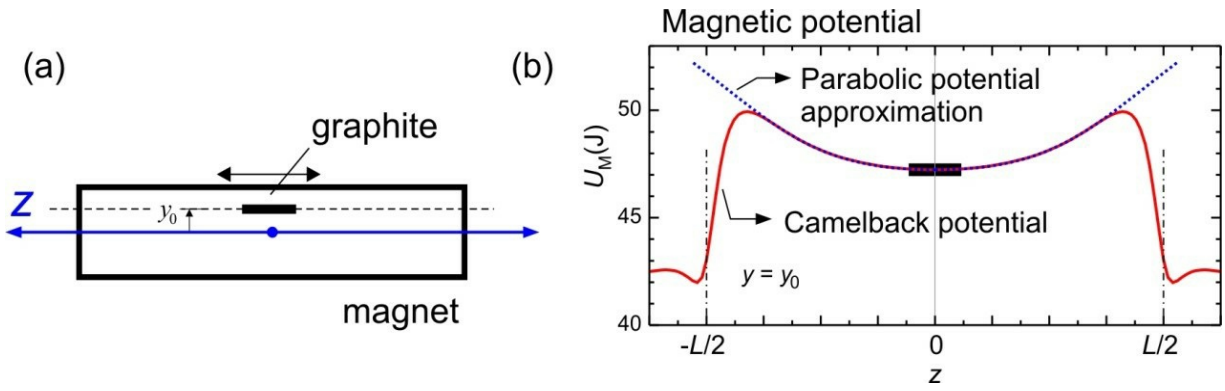



图8 （a）石墨棒在高度 $y_0$处的振动（b）PDL陷阱中的驼峰势和其抛物线近似

如图8所示，利用在PDL陷阱的磁场驼背势中的振动，我们可以单独地（independently）定出磁极化率$\chi$。对小振幅（($z$ < 4 mm），磁场势能可以由以下抛物线近似给出（如图8b中的虚线所示）：

$$U_M = \frac{1}{2}k_z z^2 \qquad (5)$$

其中$k_z$是势能的“弹性系数”，$z$ 是石墨棒质心的位移。弹性系数$k_z$依赖于磁化强度$M$（从问题1中得到）和磁极化率$\chi$：

$$k_z = -C_1 \mu_0 \chi M^2 V_r \qquad (6)$$

其中$\mu_0$是真空磁导率，$V_r$是石墨棒的体积，$C_1$ = 198.6 /m$^2$对于这个磁势阱装置是个常数。

把石墨棒投放到磁势阱中心。利用螺母调整平台，使得石墨棒位于势阱中心。用牙签扰动石墨棒，使石墨棒沿驼峰势振动。

| | | |
|---|---|---|
| **A.8** | 研究 $l$=8 mm长的"HB/0.5"石墨棒的振动。保持较小振幅（$A$ < 4 mm）。测量振动周期（由于阻尼，振动将随时间衰减，这里暂时忽略阻尼效应）。 | 0.2 pt. |
| **A.9** | 利用A.8中的振动计算石墨棒的磁极化率($\chi$) | 0.8 pt. |

## [4] 振动的品质因子 Q 和估算空气粘滞系数 (3 pt.)

因为空气阻力，石墨棒的振动会衰减。我们将研究阻力与石墨棒尺寸（直径和长度）的关系，并且估计空气粘滞系数$\mu_A$。我们用欠阻尼振子来描述棒的振动：$z(t) = Ae^{-t/\tau}sin(\omega t)$（如图3a所示），其中$A$是初始振幅，$\omega = 2\pi f$是角频率，$t$是时间。振子的振幅按照exp($-t/\tau$)随时间衰减，其中$\tau$是阻尼时间常数。根据振子振幅的衰减，可以定义"品质因子"$Q = \omega\tau/2$。如果$Q$ > 0.5，则该振动是欠阻尼振动；$Q$ = 0.5，是临界阻尼振动；$Q$ < 0.5，是过阻尼振动。在利用PDL势阱设计地震仪和地动仪时，这个品质因子非常重要。

我们将圆柱形的石墨棒近似成长的椭球体，来计算阻尼时间常数$\tau$和斯托克斯拖曳力。阻尼时间常数由下式给出：

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{\rho r^2}{\mu_A} ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right) \qquad (7)$$

其中，$\rho$, $r$和$l$是石墨棒的质量密度，半径和长度。$\mu_A$是空气的粘滞系数。我们用这个模型估计空气的粘滞系数。

| | | |
|---|---|---|
| **A.10** | 我们需要确定振动的阻尼时间常数$\tau$。图示说明如何用一个简便的方法测量$\tau$ | 0.5 pt. |
| **A.11** | 利用长度为8 mm，不同直径的石墨棒进行阻尼振动实验。定出每种石墨棒的阻尼时间常数$\tau$ | 1.5 pt. |
| **A.12** | 定出空气的粘滞系数 $\mu_A$. | 1.0 pt. |

## SECTION B. 传感器应用

## [5] PDL势阱地震仪 (0.5 pt.)

想像如下情况：你用PDL磁势阱来设计地震仪。我们需要非常高的精度，即非常小的加速度"噪声阈值"（地震仪可以检测到的最小的加速度）。这个加速度噪声阈值为（单位：m/(s$^2$Hz$^{0.5}$)）：

$$a_n = \sqrt{\frac{4k_B T\omega}{Qm_R}} \qquad (8)$$

其中$k_B$是玻尔兹曼常数，$T$是温度（见常数表部分），$m_R$是石墨棒的质量。所有物理量都是国际制单位（SI units）。在问题4中，你已经测量了不同直径石墨棒的$\tau$值。选择你认为最适合用作地震仪的那种直径。

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | 你选择哪种直径的石墨棒? | 0.2 pt. |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | 对于你选择的石墨棒，计算地震仪的加速度噪声阈值 ($a_n$) | 0.3 pt. |

## [6] PDL势阱地动仪 (2 pt.)

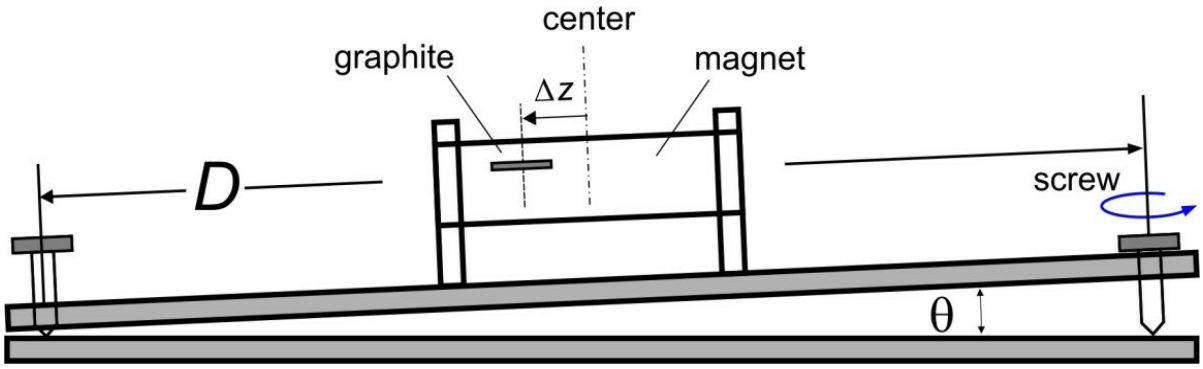



图9 利用PDL势阱制作地动仪

我们将利用PDL势阱制作非常精确的地动仪，以监测火山活动。在本实验中，我们旋转螺钉，以模拟地面倾斜度的变化。我们需要测量螺距 $S$（螺钉旋转一圈带来的高度变化）。通过测量势阱中石墨棒的偏移，我们将可以非常准确地测量倾斜度。

本实验使用$l$= 8 mm 长的HB/0.5石墨棒。从中心位置开始。假设驼背势可以近似为问题3中的简谐势能：

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | 利用螺距 $S$ 和螺钉旋转圈数 ($N$)推导偏移量$\Delta z$ | 0.5 pt. |
| **B.4** | 缓慢旋转螺钉，确定棒的偏移 $\Delta z$ 与螺钉旋转圈数($N$)之间的关系。定出螺距$S$ | 1.25 pt. |
| **B.5** | 为了读数方便，当地面倾斜度改变时，我们希望石墨棒尽快达到平衡位置（也就是说，需要避免长时间振动）。地动仪理想的$Q$因子（ideal $Q$ factor）是哪个? | 0.25 pt. |

# Dark Matter

## A. Cluster of Galaxies

### Question A.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| Potential energy for a system of a spherical object with mass $M(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ and a test particle with mass *dm* at a distance *r* is given by $$dU=-G\frac{M(r)}{r}dm$$ | 0.2 pts |
| Thus for a sphere of radius *R* $$U=-\int_0^R G\frac{M(r)}{r}dm=-\int_0^R G\frac{4\pi r^3\rho}{3r}4\pi r^2\rho dr=-\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2\int_0^R r^4dr$$ $$=-\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5$$ | 0.6 pts |
| Then using the total mass of the system $$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$$ we have $$U=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$ | 0.2 pts |
| Total | 1.0 pts |

Question A.2

| Answer | Marks |
|---|---|
| Using the Doppler Effect,<br>$$f_i = f_0 \frac{1}{1+\beta} \approx f_0(1-\beta),$$<br>where $\beta = v/c$ and $v << c$ . Thus the *i*-th galaxy moving away (radial) speed is<br>$$V_{ri} = -\frac{f_i - f_0}{f_0} c$$<br>Alternative without approximation:<br>$$f_i = f_0 \frac{1}{1+\beta}$$<br>$$V_{ri} = c\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)$$ | 0.2 pts |
| All the galaxies in the galaxy cluster will be moving away together due to the cosmological expansion. Thus the average moving away speed of the $N$ galaxies in the cluster is<br>$$V_{cr} = -\frac{c}{N f_0}\sum_{i=1}^{N}(f_i - f_0) = -\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0} - 1\right).$$<br>Alternative without approximation:<br>$$V_{cr} = \frac{c f_0}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_0}\right) = \frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)$$ | 0.3 pts |
| Total | 0.5 pts |

Question A.3

| Answer | Marks |
|---|---|
| The galaxy moving away speed $V_i$, in part A.2, is only one component of the three component of the galaxy velocity. Thus the average square speed of each galaxy with respect to the center of the cluster is<br>$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\vec{V}_i-\vec{V}_c)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(V_{xi}-V_{xc})^2+(V_{yi}-V_{yc})^2+(V_{zi}-V_{zc})^2$<br>Due to isotropic assumption<br>$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\vec{V}_i-\vec{V}_c)^2=\frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}(V_{ri}-V_{cr})^2$ | 0.5 pts |
| And thus the root mean square of the galaxy speed with respect to the cluster center is<br>$v_{rms}=\sqrt{\frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}(V_{ri}-V_{rc})^2}=\sqrt{\frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}({V_{ri}}^2-2V_{cr}V_{ri}+{V_{cr}}^2)}=\sqrt{\frac{3}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}{V_{ri}}^2\right)-3{V_{cr}}^2}$<br>$v_{rms}=c\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0}-1\right)^2\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0}-1\right)\right)^2}$<br>$=\frac{c\sqrt{3}}{f_0}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left({f_i}^2-2f_if_0+{f_0}^2\right)\right)-\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i\right)^2-2\frac{f_0}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i+{f_0}^2\right)}$<br>$=\frac{c\sqrt{3}}{f_0N}\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{N}{f_i}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}f_i\right)^2}$<br>Alternative without approximation: | 0.7 pts |

| | |
|---|---|
| $$v_{rms} = c\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i}-1\right)^2\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i}-1\right)\right)^2}$$ $$=\frac{c\sqrt{3}}{f_0}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_i^2}-2\frac{1}{f_i}\frac{1}{f_0}+\frac{1}{f_0^2}\right)\right)-\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i}\right)^2-2\frac{1}{N}\frac{1}{f_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i}+\frac{1}{f_0^2}\right)}$$ $$=\frac{cf_0\sqrt{3}}{N}\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_i}\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i}\right)^2}$$ | |
| The mean kinetic energy of the galaxies with respect to the center of the cluster is $$K_{ave}=\frac{m}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\vec{V}_i-\vec{V}_c)^2=\frac{m}{2}v_{rms}{}^2$$ | 0.3 pts |
| Total | 1.5 pts |

**Question A.4**

| Answer | Marks |
|---|---|
| The time average of $d\Gamma/dt$ vanishes<br>$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = 0$$<br>Now<br>$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\cdot \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$<br>$$= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K$$ | 0.6 pts |
| Where *K* is the total kinetic energy of the system. Since the gravitational force on *i*-th particle comes from its interaction with other particles then<br>$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i,j\neq i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i<j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i - \sum_{i>j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i<j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i - \sum_{i<j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j$$<br>$$= \sum_{i<j} \vec{F}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = U_{\text{tot}}$$<br>Alternative proof:<br>$$\sum_i \vec{F}_i . \vec{r}_i = \sum_{i,j\neq i} \vec{F}_{ji} . \vec{r}_i = \vec{F}_{21}.\vec{r}_1 + \vec{F}_{31}.\vec{r}_1 + \vec{F}_{41}.\vec{r}_1 + \cdots + \vec{F}_{N1}.\vec{r}_1 +$$<br>$$\vec{F}_{12}.\vec{r}_2 + \vec{F}_{32}.\vec{r}_2 + \vec{F}_{42}.\vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_{N2}.\vec{r}_2 +$$<br>$$\vec{F}_{13}.\vec{r}_3 + \vec{F}_{23}.\vec{r}_3 + \vec{F}_{43}.\vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_{N3}.\vec{r}_3 + \ldots$$<br>$$\vec{F}_{1N}.\vec{r}_N + \vec{F}_{2N}.N_N + \vec{F}_{3N}.\vec{r}_N + \cdots + \vec{F}_{NN-1}.\vec{r}_{N-1}$$<br>Collecting terms and noting that $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ we have | 0.9 pts |

| | |
|---|---|
| $\vec{F}_{12}.(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\vec{F}_{13}.(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\vec{F}_{14}.(\vec{r}_4-\vec{r}_1)+\cdots+\vec{F}_{23}.(\vec{r}_3-\vec{r}_2)$ $+\vec{F}_{24}.(\vec{r}_4-\vec{r}_2)+\cdots+\vec{F}_{34}.(\vec{r}_4-\vec{r}_3)+\cdots=\sum_{i<j}\vec{F}_{ji}.(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$ $=-\sum_{i<j}G\frac{m_i m_j}{\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert^2}\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)}{\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert}.(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=-\sum_{i<j}G\frac{m_i m_j}{\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert}=U_{tot}$ | |
| Thus we have $\frac{d\Gamma}{dt}=U+2K$ And by taking its time average we obtain $\left\langle\frac{d\Gamma}{dt}=U+2K\right\rangle_t=0$ and thus $\langle K\rangle_t=-\frac{1}{2}\langle U\rangle_t$. Therefore $\gamma=\frac{1}{2}$. | 0.2 pts |
| Total | 1.7 pts |

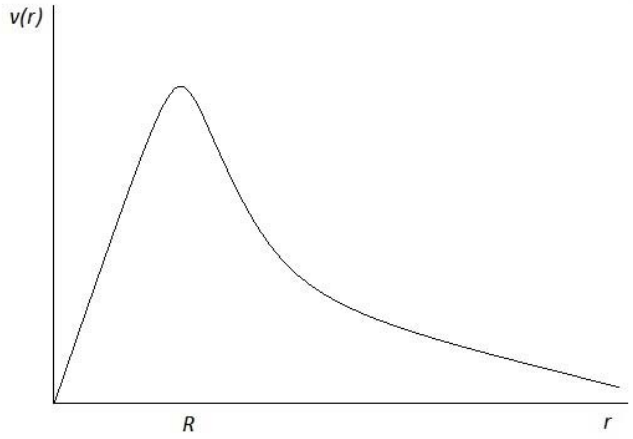
Question A.5

| Answer | Marks |
|---|---|
| Using Virial theorem, and since the dark matter has the same root mean square speed as the galaxy, then we have<br>$\langle K \rangle_t = -\frac{1}{2}\langle U \rangle_t$<br>$\frac{M}{2} v_{rms}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$ | 0.3 pts |
| From which we have<br>$M = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G}$ | 0.1 pts |
| And the dark matter mass is then<br>$M_{dm} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g$ | 0.1 pts |
| Total | 0.5 pts |

B. Dark Matter in a Galaxy

Question B.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| **Answer B.1**: The gravitational attraction for a particle at a distance *r* from the center of the sphere comes only from particles inside a spherical volume of radius *r*. For particle inside the sphere with mass $m_s$ , assuming the particle is orbiting the center of mass in a circular orbit, we have $G\frac{m'(r)m_s}{r^2}=\frac{m_s v_0^2}{r}$ | 0.3 pts |
| with $m'(r)$ is the total mass inside a sphere of radius $r$ $m'(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 m_s n$ Thus we have $v(r)=\left(\frac{4\pi G n m_s}{3}\right)^{1/2} r$ | 0.2 pts |
| While for particle outside the sphere, we have $v(r)=\left(\frac{4\pi G n m_s R^3}{3r}\right)^{1/2}$ | 0.2 pts |

| | |
|---|---|
| The sketch is given below<br>  <br><br>Sketch of the rotation velocity vs distance from the center of galaxy | 0.1 pts |
| Total | 0.8 pts |

Question B.2

| Answer | Marks |
|---|---|
| The total mass can be inferred from<br>$G\frac{m'(R_g)m_s}{{R_g}^2}=\frac{m_s v_0^2}{R_g}$<br>Thus<br>$m_R = m'(R_g)=\frac{v_0^2 R_g}{G}$ | 0.5 pts |
| Total | 0.5 pts |

Question B.3

| Answer | Marks |
|---|---|
| Base on the previous answer in B.1, if the mass of the galaxy comes only from the visible stars, then the galaxy rotation curve should fall proportional to $1/\sqrt{r}$ on the outside at a distance $r > R_g$. But in the figure of problem b) the curve remain constant after $r > R_g$, we can infer from $$G\frac{m'(r)m_s}{r^2} = \frac{m_s v_0^2}{r}.$$ to make $v(r)$ constant, then $m'(r)$ should be proportional to $r$ for $r > R_g$, i.e. for $r > R_g$, $m'(r) = Ar$ with $A$ is a constant. | 0.3 pts |
| While for $r < R_g$, to obtain a linear plot proportional to $r$, then $m'(r)$ should be proportional to $r^3$, i.e. $m'(r) = Br^3$. | 0.3 pts |
| Thus for $r < R_g$ we have $$m'(r) = \int_0^r \rho_t(r) 4\pi r'^2 \, dr' = Br^3$$ $$dm'(r) = \rho_t(r) 4\pi r^2 dr = 3Br^2 dr$$ Thus total mass density $\rho_t(r) = \frac{3B}{4\pi}$ | 0.2 pts |
| $$m_R = \int_0^{R_g} \frac{3B}{4\pi} 4\pi r'^2 \, dr' = BR_g{}^3 \text{ or } B = \frac{m_R}{R_g{}^3} = \frac{v_0^2}{GR_g{}^2}$$ Thus the dark matter mass density $\rho(r) = \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g{}^2} - nm_s$ | 0.2 pts |

| | |
|---|---|
| While for $r > R_g$ we have<br>$m'(r) = \int_0^{R_g} \rho(r')4\pi r'^2\, dr' + \int_{R_g}^{r} \rho(r')4\pi r'^2\, dr' = Ar$<br>$m'(r) = m_R + \int_{R_g}^{r} \rho(r')4\pi r'^2\, dr' = Ar$<br>$\int_R^r \rho(r')4\pi r'^2\, dr' = Ar - M_0$<br>$\rho(r)4\pi r^2 = A$, or $\rho(r) = \frac{A}{4\pi r^2}$ . | 0.2 pts |
| Now to find the constant *A*.<br>$\int_R^r \frac{A}{4\pi r'^2} 4\pi r'^2\, dr' = A(r - R_g) = Ar - m_R$<br>Thus $AR_g = m_R$ and $A = \frac{v_0^2}{G}$<br>We can also find *A* from the following<br>$G\frac{m'(r)m_s}{r^2} = G\frac{Arm_s}{r^2} = \frac{m_s v_0^2}{r}$, thus $A = \frac{v_0^2}{G}$ .<br>Thus the dark matter mass density (which is also the total mass density since $n \approx 0$ for $r \geq R_g$ .<br>$\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}$ for $r \geq R_g$ | 0.3 pts |
| Total | 1.5 pts |

## C. Interstellar Gas and Dark Matter

### Question C.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| Consider a very small volume of a disk with area $A$ and thickness $\Delta r$, see Fig.1<br>  <br><br>Figure 1. Hydrostatic equilibrium<br>In hydrostatic equilibrium we have<br>$$(P(r)-P(r+\Delta r))A-\rho g(r)A\Delta r=0$$ | 0.3 pts |
| $$\frac{\Delta P}{\Delta r}=-\rho\frac{Gm'(r)}{r^2}$$<br>$$\frac{dP}{dr}=-\rho\frac{Gm'(r)}{r^2}=-n(r)m_p\frac{Gm'(r)}{r^2}.$$<br>. | 0.2 pts |
| Total | 0.5 pts |

Question C.2

| Answer | Marks |
|---|---|
| Using the ideal gas law $P = n\,kT$ where $n = N/V$ where $n$ is the number density, we have<br>$$\frac{dP}{dr} = kT\frac{dn(r)}{dr} + kn(r)\frac{dT}{dr} = -n(r)m_p\frac{Gm'(r)}{r^2}$$<br>Thus we have<br>$$m'(r) = -\frac{kT}{Gm_p}\left(\frac{r^2}{n(r)}\frac{dn(r)}{dr} + \frac{r^2}{T(r)}\frac{dT(r)}{dr}\right).$$ | 0.5 pts |
| Total | 0.5 pts |

Question C.3

| Answer | Marks |
|---|---|
| If we have isothermal distribution, we have $dT/dr = 0$ and<br>$$m'(r) = -\frac{kT_0}{Gm_p}\left(\frac{r^2}{n(r)}\frac{dn(r)}{dr}\right)$$ | 0.2 pts |
| From information about interstellar gas number density, we have<br>$$\frac{1}{n(r)}\frac{dn(r)}{dr} = -\frac{3r+\beta}{r(r+\beta)}$$<br>Thus we have<br>$$m'(r) = \frac{kT_0 r}{Gm_p}\frac{3r+\beta}{(r+\beta)}$$ | 0.2 pts |

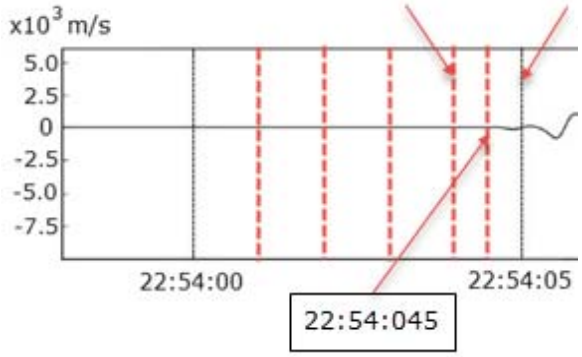
| | |
|---|---|
| Mass density of the interstellar gas is<br>$\rho_g(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}$<br>Thus<br>$m'(r) = \int_0^r \left(\rho_g(r') + \rho_{dm}(r')\right) 4\pi r'^2 \, dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p} \frac{3r + \beta}{(r + \beta)}$<br>$m'(r) = \int_0^r \left( \frac{\alpha m_p}{r'(\beta + r')^2} + \rho_{dm}(r') \right) 4\pi r'^2 \, dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p} \frac{3r + \beta}{(r + \beta)}$ | 0.3 pts |
| $\left( \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} + \rho_{dm}(r) \right) 4\pi r^2 = \frac{kT_0}{Gm_p} \frac{3r^2 + 6r\beta + \beta^2}{(r + \beta)^2}$<br>$\rho_{dm}(r) = \frac{kT_0}{4\pi G m_p} \frac{3r^2 + 6r\beta + \beta^2}{(r + \beta)^2 r^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}$ | 0.3 pts |
| Total | 1.0 pts |

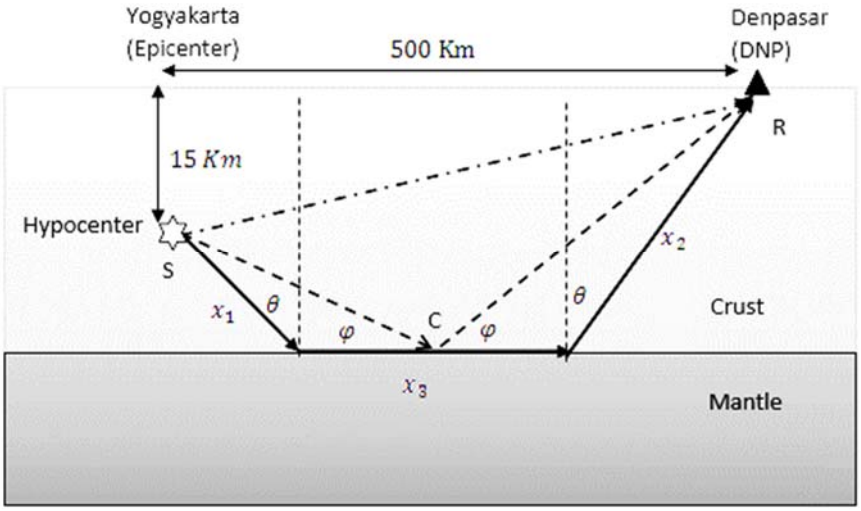
# Earthquake, Volcano and Tsunami

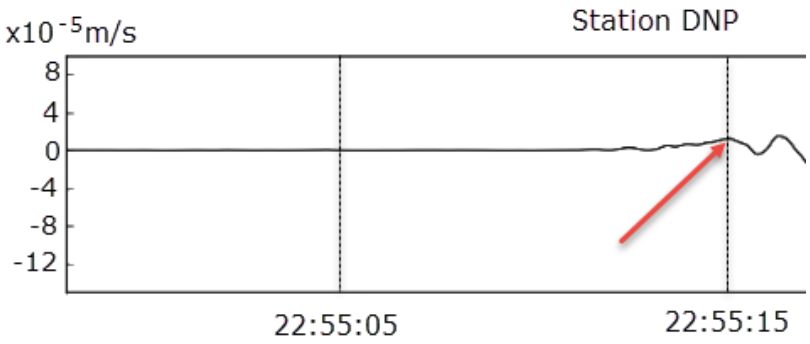
## A. Merapi Volcano Eruption

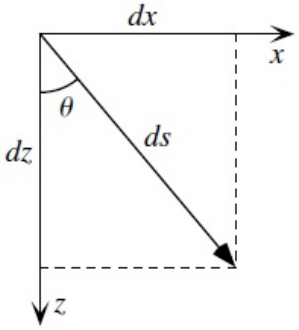
| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A.1 | Using Black's Principle the equilibrium temperature can be obtained<br>$$m_w c_{vw}(T_e - T_w) + m_m c_{vm}(T_e - T_m) = 0$$<br>Thus,<br>$$T_e = \frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$$ | 0.5 pts |
| A.2 | For ideal gas, $p_e v_e = RT_e$ , thus<br>$$p_e = \frac{R}{v_e}\frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$$ | 0.3 pts |
| A.3 | The relative velocity $u_{rel}$ can be expressed as<br>$$u_{rel} = \kappa\, p^{\alpha} V^{\beta} m^{\gamma}$$<br>where $\kappa$ is a dimensionless constant.<br>Using dimensional analysis, one can obtain that<br>$$LT^{-1} = M^{\alpha+\gamma} L^{-\alpha+3\beta} T^{-2\alpha}$$<br>$$\alpha + \gamma = 0$$<br>$$-\alpha + 3\beta = 1$$<br>$$-2\alpha = -1$$<br>Therefore<br>$$u_{rel} = \kappa\, p^{1/2} V^{1/2} m^{-1/2}$$ | 0.5 pts |
| | Total score | 1.3 pts |

## B. The Yogyakarta Earthquake

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| B.1 | From the given seismogram, fig. 2<br>  <br><br>One can see that the P-wave arrived at 22:54:045 or (4.5 – 5.5) seconds after the earthquake occurred at the hypocenter. | 0.3 pts | 0.5 pts |
| | Since the horizontal distance from the epicenter to the seismic station in Gamping is 22.5 km, and the depth of the hypocenter is 15 km, the distance from the hypocenter to the station is<br>$\sqrt{22.5^2 + 15^2}\ \text{km} = 27.04\ \text{km}$ | 0.1 pts | |
| | Therefore, the P-wave velocity is<br>$v_P = \frac{27.04\ \text{Km}}{4.7\ \text{s}} = 5.75\ \text{Km/s}$ | 0.1 pts | |

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| B.2 | Direct wave:<br>$t_{\text{direct}} = \frac{SR}{v_1} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_1} = \frac{502.021}{5.753}\ \text{s} = 86.9\ \text{s}$ | 0.2 pts | 0.6 pts |
| | As in the case of an optical wave, the Snell's law is also applicable to the seismic wave.<br>  <br><br>Illustration for the traveling seismic Wave<br>Reflected wave:<br>$t_{\text{reflected}} = \frac{SC}{v_1} + \frac{CR}{v_1}$<br>$SC\cos\varphi + CR\cos\varphi = 500 \Rightarrow \cot\varphi = \frac{500}{45}$<br>$t_{\text{reflected}} = \frac{45}{v_1 \sin\varphi} = 87.3\ \text{s}$ | 0.4 pts | |

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| B.3 | Velocity of P-wave on the mantle. The fastest wave crossing the mantle is that propagating along the upperpart of the mantle. From the figure on refracted wave, we obtain that<br>$\frac{\sin\theta}{v_1}=\frac{1}{v_2};\quad \sin\theta=\frac{v_1}{v_2};\quad \cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$<br>$\cos\theta=\frac{15}{x_1};\quad x_1=\frac{15}{\cos\theta}\ \text{km};\quad x_2=\frac{30}{\cos\theta}\ \text{km}$<br>$x_3=500-(x_1+x_2)\sin\theta=500-45\tan\theta$ | 0.4 pts | 1.2 pts |
| | The total travel time:<br>$t=\frac{x_1+x_2}{v_1}+\frac{x_3}{v_2}=\frac{45}{v_1\cos\theta}+\frac{500}{v_2}-\frac{45\tan\theta}{v_2}$<br>$t\cos\theta=45u_1+500u_2\cos\theta-45u_2\sin\theta$<br>where $u_1=1/v_1$ and $u_2=1/v_2$. Arranging the equation, we get<br>$\left(500^2+45^2\right)u_2^2-2t\ 500u_2+t^2-45^2\ u_1=0$<br>whose solution is<br>$v_2=\frac{500tv_1^2+45v_1\sqrt{\left(45^2+500^2\right)-t^2v_1^2}}{t^2v_1^2-45^2}$ | 0.5 pts | |
| |  <br>From the seismogram, we know that the fastest wave arrived at Denpasar station at 22:55:15, which is $t=75$ s from the origin time of the earthquake in Yogyakarta. Thus<br>$v_2=7.1$ km/s | 0.3 pts | |

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| B.4 | By using Snell's law and defining $p=\sin\theta/v$ and $u=1/v$, we obtain<br>$p\equiv u(0)\sin\theta_0=u(z)\sin\theta;\qquad \sin\theta=\frac{p}{u(z)}$ | 0.2 pts | 1.4 pts |
| | where $u(z)=1/v(z)$ and $\theta_0$ is the initial angle of the seismic wave direction.<br>$\frac{dx}{ds}=\sin\theta=\frac{p}{u(z)};\qquad \frac{dz}{ds}=\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{p}{u(z)}\right)^2}$<br>$\frac{dx}{dz}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dz}=\frac{p}{u}\frac{u}{\left(u^2-p^2\right)^{1/2}}=p\Big/\left(u^2-p^2\right)^{1/2}$<br>$x=\int_{z_1}^{z_2}\frac{p}{\left(u^2-p^2\right)^{1/2}}\,dz$ | 0.5 pts | |
| |  <br>Illustration for the direction of wave<br>The distance *X* is equal to twice the distance from epicenter to the turning point. The turning point is the point when $\theta=90°$. Thus<br>$p=u(z_t)=\frac{1}{v_0+az_t};\qquad z_t=\frac{1-pv_0}{ap}$<br>$X=2\int_0^{z_t}\frac{p(v_0+az)}{(1-p^2(v_0+az)^2)^{1/2}}dz=\frac{2}{ap}\left(\sqrt{1-p^2(v_0+az)^2}-\sqrt{1-p^2v_0^2}\right)$ | 0.7 pts | |

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| B.5 | For the travel time, $dt = \frac{ds}{v(z)}$; $\frac{dt}{ds} = u(z)$.<br><br>Thus<br><br>$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}}$<br><br>and therefore<br><br>$T = 2\int_0^{z_t} \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} dz = 2\int_0^{z_t} \frac{1}{(v_0 + az)} \frac{1}{(1 - p^2(v_0 + az)^2)^{1/2}} dz$ | 1.0 pts | 1.0 pts |
| B.6 | The total travel time from the source to the Denpasar can be calculated using previous relation<br><br>$T(p) = 2\int_0^{z_t} \frac{u^2(z)}{\left(u^2(z) - p^2\right)^{1/2}} dz$<br><br>Which is valid for a continuous $u(z)$. For a simplified stacked of homogeneous layers (Figure F), the integral equation became a summation<br><br>$T(p) = 2\sum_i^N \frac{u_i^2 \Delta z_i}{\left(u_i^2 - p^2\right)^{1/2}}$ | 0.6 pts | 1.0 pts |
| | $T(p) = 2\frac{u_1^2 \Delta z_1}{(u_1^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}} + 2\frac{u_2^2 \Delta z_2}{(u_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}} + 2\frac{u_3^2 \Delta z_3}{(u_3^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}$<br>$= \frac{2 \times (0.1504)^2 \times 6}{(0.1504^2 - 0.143^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2 \times (0.1435)^2 \times 9}{(0.1435^2 - 0.143^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2 \times (0.1431)^2 \times 15}{(0.1431^2 - 0.143^2)^{\frac{1}{2}}}$<br>$= 151.64$ second<br><br>Note that the actual travel time from the epicenter to Denpasar is 75 seconds. By varying the parameters of velocity and depth up to suitable value of observed travel time, physicist can know Earth structure. | 0.4 pts | |
| | | Total score | 5.7 pts |

## C. Java Tsunami

| Question | Answer | Marks | |
|---|---|---|---|
| C.1 | The center of mass of the raised ocean water with respect to the ocean surface is $h/2$. Thus<br>$$E_P = \frac{h^2 \rho \lambda L g}{4}$$<br>where $\rho$ is the ocean water density. | 0.5 pts | 0.5 pts |
| C.2 | Considering a shallow ocean wave in Fig. 5, the whole water (from the surface until the ocean floor) can be considered to be moving due to the wave motion. The potential energy is equal to the kinetic energy.<br>$$\frac{1}{4}\rho\lambda h^2 L g = \frac{1}{4}\rho d L \lambda U^2$$<br>Where $x = \lambda/2$ and $U$ is the horizontal speed of the water component.<br>The water component that was in the upper part $hL\frac{\lambda}{2}$ should be equal to the one that moves horizontally for a half of period of time $\tau/2$, i.e. $hL\,\lambda/2 = dLU\,\tau/2$.<br>Thus we have<br>$$U = \frac{h\lambda}{\tau d}$$ | 0.7 pts | 1.2 pts |
| | Accordingly,<br>$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{gd}}$<br>Thus<br>$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{gd}$$ | 0.5 pts | |
| C.3 | Using the argument that the wave energy density is proportional to its amplitude $E = kA^2$ with $A$ is amplitude and $k$ is a proportional constant<br>Because the energy flux is conserve, then<br>$Eva = E_0 v_0 a$ for an area $a$ where the wave flow though.<br>Then,<br>$kA^2\sqrt{gd} = kA_0^2\sqrt{gd_0}$<br>$$A = A_0\left(\frac{d_0}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$$<br>(Therefore the tsunami wave will increase its amplitude and become narrower as it approaches the beach). | 1.3 pts | 1.3 pts |
| | | Total score | 3.0 pts |

Total Score for Problem T2:

Section A : 1.3 points

Section B : 5.7 points

Section C : 3.0 points

Total : 10 points

# Cosmic Inflation

## A. Expansion of Universe

### Question A.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| For any test mass $m$ on the boundary of the sphere,<br>$$m\ddot{R}(t) = -GmM_s/R^2(t) \quad \text{(A.1.1)}$$<br>where $M_s$ is mass portion inside the sphere | **0.2** |
| Multiplying equation (A.1.1) with $\dot{R}$ and integrating it gives<br>$$\int \dot{R}\frac{d\dot{R}}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\,\dot{R}^2 = \frac{GM_s}{R} + A$$<br>where $A$ is a integration constant | **0.6** |
| Taking $M_s = \frac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$, and $\dot{R} = \dot{a}\,R_s$ | **0.2** |
| $$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho(t) + \frac{2A}{R_s^2 a^2(t)}$$ | **0.2** |
| Therefore, we have $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$ | **0.1** |
| Total | **1.3** |

### Question A.2

| Answer | Marks |
|---|---|

| | |
|---|---|
| The 2nd Friedmann equation can be obtained from the 1st law of thermodynamics :<br>$$dE = -pdV + dQ.$$ | **0.1** |
| For adiabatic processes $dE + pdV = 0$ and its time derivative is $\dot{E} + p\,\dot{V} = 0$. | **0.1** |
| For the sphere $\dot{V} = V\,(3\,\dot{a}/a)$ | **0.1** |
| Its total energy is $E = \rho(t)V(t)\,c^2$ | **0.2** |
| Therefore $\dot{E} = \left(\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\right)Vc^2$ | **0.1** |
| It yields<br>$$\dot{\rho} + 3\,\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$ | **0.2** |
| Therefore, we have $A_2 = 3$. | **0.1** |
| Total | **0.9** |

Question A.3

| Answer | Marks |
|---|---|
| Interpreting $\rho(t)c^2$ as total energy density, and substituting $\frac{p(t)}{c^2} = w\,\rho(t)$ in to the 2nd Friedmann equation yields: $$\dot{\rho} + 3\,\rho(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$ | **0.1** |
| $$\rho \propto a^{-3(w+1)}$$ | **0.2** |
| (i) In case of radiation, photon as example, the energy is given by $E_r = h\nu = hc/\lambda$ then its energy density $\rho_r = \frac{E_r}{V} \propto a^{-4}$ so that $w_r = \frac{1}{3}$ | **0.3** |
| (ii) In case of nonrelativistic matter, its energy density nearly $\rho_m \simeq \frac{m_0 c^2}{V} \propto a^{-3}$ since dominant energy comes from its rest energy $m_0 c^2$, so that $w_m = 0$ | **0.3** |
| (iii) For a constant energy density, let say $\epsilon_\Lambda =$ constant, $\epsilon_\Lambda \propto a^0$ so that $w_\Lambda = -1$. | **0.3** |
| Total | **1.2** |

Question A.4

| Answer | Marks |
|---|---|
| (i) In case of $k = 0$, for radiation we have $\rho_r a^4 = \text{constant}$. So by comparing the parameters values with their present value, $\rho_r(t)a^4(t) = \rho_{r0}a_0^4$,<br>$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4.$$<br>$$\int a\,da = \frac{1}{2}a^2 + K = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}a_0^4\right)^{\frac{1}{2}} t.$$ | **0.2** |
| Because $a(t=0) = 0, K = 0$, then<br>$$a(t) = (2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}a_0^4\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} = (2H_0)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}.$$<br>where $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}}$ after taking $a_0 = 1$. | **0.2** |
| (ii) for non-relativistic matter domination, using $\rho_m(t)a^3(t) = \rho_{m0}a_0^3$, and similar way we will get<br>$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0}a_0^4\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3H_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}.$$<br>where $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0}\right)^{\frac{1}{2}}$. | **0.4** |
| (iii) for constant energy density,<br>$$\ln a = H_0 t + K'$$<br>Where $K'$ is integration constant and $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda\right)^{\frac{1}{2}}$. Taking condition $a_0 = 1$,<br>$$\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = H_0(t - t_0)$$<br>$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$$ | **0.4** |
| Total | **1.2** |

**Question A.5**

| Answer | Marks |
|---|---|
| Condition for critical energy condition:<br>$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$<br>Friedmann equation can be written as<br>$$H^2(t) = H^2(\mathrm{t})\Omega(\mathrm{t}) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)}$$<br>$$\left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2H^2(\Omega - 1) = k \qquad \text{(A.5.1)}$$ | **0.1** |
| Total | **0.1** |

Question A.6

| Answer | Marks |
|---|---|
| Because $\left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2H^2 > 0$, then $k = +1$ corresponds to $\Omega > 1$, $k = -1$ corresponds to $\Omega < 1$ and $k = 0$ corresponds to $\Omega = 1$ | **0.3** |
| Total | **0.3** |

## B. Motivation To Introduce Inflation Phase and Its General Conditions

### Question B.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| Equation (A.5.1) shows that<br>$(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{R_0^2}\,\frac{1}{\dot{a}^2}$. | **0.1** |
| In a universe dominated by non-relativistic matter or radiation, scale factor can be written as a function of time as $a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^p$ where $p < 1$ ($p = \frac{1}{2}$ for radiation and $p = \frac{2}{3}$ for non-relativistic matter ) | **0.2** |
| $(\Omega - 1) = \tilde{k}\, t^{2(1-p)}$ | **0.2** |
| Total | **0.5** |

### Question B.2

| Answer | Marks |
|---|---|
| For a period dominated by constant energy provides the solution $a(t) = e^{Ht}$ so that $\dot{a} = He^{Ht}$ | **0.1** |
| $(\Omega - 1) = \frac{k}{H^2}\, t^{-2Ht}$ | **0.2** |
| Total | **0.3** |

Question B.3

| Answer | Marks |
|---|---|
| Inflation period can be generated by constant energy period, therefore it is a phase where $w = -1$ so that $p = w\rho c^2 = -\rho c^2$ (negative pressure). | **0.2** |
| Differentiating Friedmann equation leads to<br>$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}$$<br>$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\,\dot{a}) = \frac{8\pi G}{3}\left(-3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)a\dot{a} + 2\rho a\dot{a}\right).$$<br>$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$ | **0.4** |
| So that because during inflation $p = -\rho c^2$, it is equivalent with condition $\ddot{a} > 0$ (accelerated expansion) | **0.1** |
| As a result, $\ddot{a} = d(\dot{a})/dt = d(Ha)/dt > 0$ or $d(Ha)^{-1}/dt < 0$ (shrinking Hubble radius). | **0.2** |
| Total | **0.9** |

Question B.4

| Answer | Marks |
|---|---|
| Inflation condition can be written as $\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0$, with $H = \dot{a}/a$ as such<br>$$\frac{d(aH)^{-1}}{dt} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1-\epsilon) < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$$ | **0.2** |
| Total | **0.2** |

## C. Inflation Generated by Homogenously Distributed Matter

### Question C.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| Differentiating equations (4) and employing equation 4 we can get $$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\dot{\phi}\right] = \frac{1}{3M_{pl}^2}[-3H\,\dot{\phi}^2]$$ $$\dot{H} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}$$ | **0.3** |
| Therefore $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}$ | **0.1** |
| The inflation can occur when the potential energy dominates the particle's energy ($\dot{\phi}^2 \ll V$) such that $H^2 \approx V/(3M_{pl}^2)$. | **0.2** |
| Slow-roll approximation: $3H\dot{\phi} \approx -V'$ | **0.1** |
| Implies $$\epsilon \approx \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad \text{(C.1.1)}$$ | **0.3** |
| we also have $$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}$$ $\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V''}{3H^2} - \epsilon$ Therefore $$\eta_V \approx M_{Pl}^2\frac{V''}{V} \quad \text{(C.1.2)}$$ | **0.4** |
| $$dN = H\,dt = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)d\phi \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}(V/V')\,d\phi \quad \text{(C.1.3)}$$ $$\frac{dN}{d\phi} \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}(V/V')$$ | **0.3** |
| Total | **1.7** |

## D. Inflation with A Simple Potential

### Question D.1

| Answer | Marks |
|---|---|
| Inflation ends at $\epsilon = 1$. Using $V(\phi) = \Lambda^4(\phi/M_{pl})^n$ yields<br>$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left[\frac{n}{\phi_{\text{end}}}\right]^2 = 1 \implies \phi_{end} = \frac{n}{\sqrt{2}}M_{pl}$$ | **0.5** |
| Total | **0.5** |

### Question D.2

| Answer | Marks |
|---|---|
| From equations (C.1.1), (C.1.2) and (C.1.3) we can obtain<br>$$N = -\left[\frac{\phi}{M_{pl}}\right]^2 \frac{1}{2n} + \beta$$<br>where $\beta$ is a integration constant. As $N = 0$ at $\phi_{end}$ then $\beta = \frac{n}{4}$.<br>$$N = -\left[\frac{\phi}{M_{pl}}\right]^2 \frac{1}{2n} + \frac{n}{4}$$ | **0.2** |
| $$\eta_V = n(n-1)\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{2(n-1)}{n-4N}$$ | **0.2** |
| $$\varepsilon = \frac{n^2}{2}\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{n}{n-4N}$$ | **0.2** |
| so that<br>$$r = 16\varepsilon = \frac{16n}{n-4N}$$ | **0.1** |

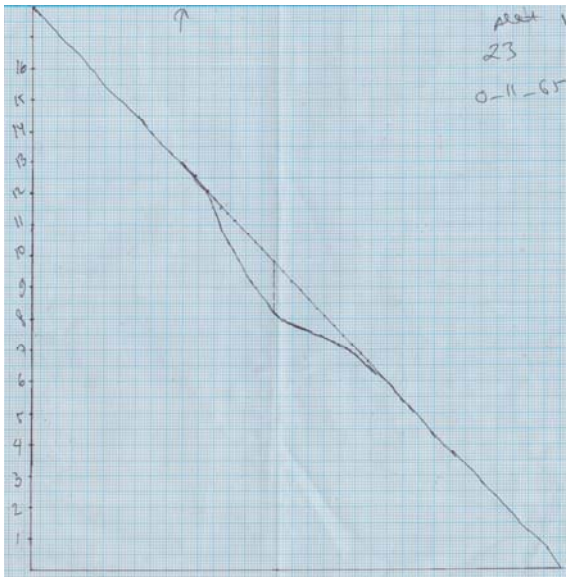
| | |
|---|---|
| $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon = 1 - \frac{2(n+2)}{(n-4N)}$ | **0.1** |
| To obtain the observational constraint $n_s = 0.968$ we need $n = -5.93$ which is inconsistent with the condition $r < 0.12$. There is no a closest integer $n$ that can obtains $r < 0.12$. As example, for $n = -6$ leads a contradiction $0 < (-0.27)$ and for $n = -5$ leads a contradiction $0 < (-0.2)$. | **0.1** |
| Total | **0.9** |

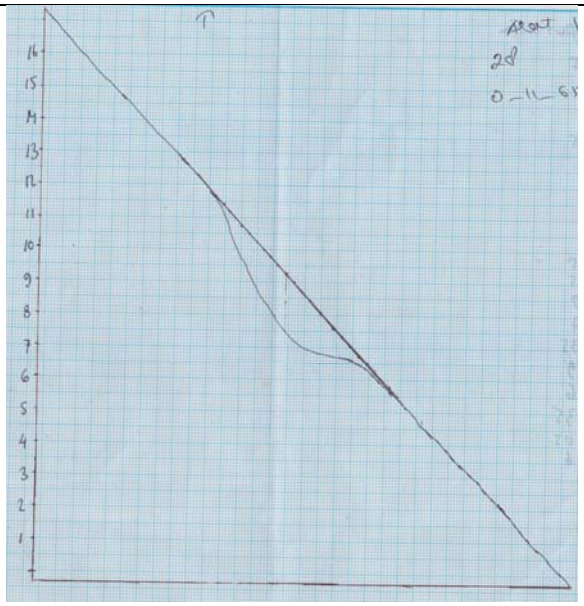
# Determination of Refractive Index Gradient and Diffusion Coefficient of Salt Solution from Laser Deflection Measurement

## (10 points)

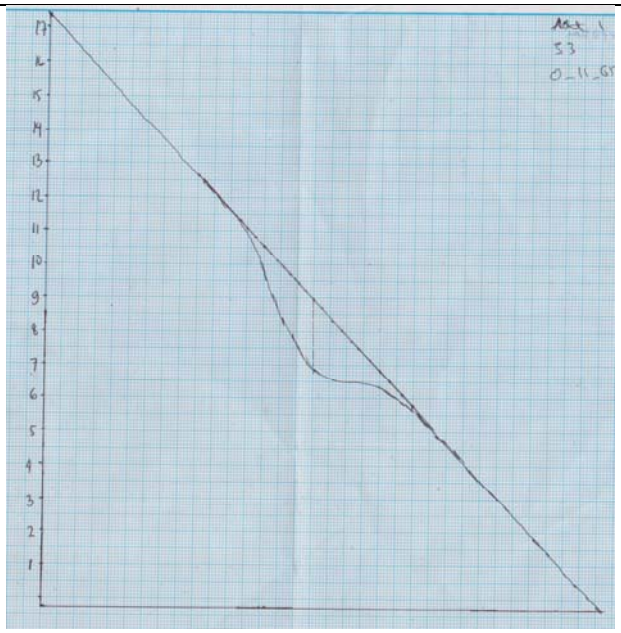
## A. Measurement of Refractive Index Gradient of Salt Water Solution

### (4.5 points)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A1.<br>**(1.2 pts)** |  <br>**No dip**<br>**No reference line**<br>**Deflectogram (DL) not at the centre (+- 5mm) but the depth of dip still in 1.5 - 1.6 cm range**<br>**DL at the centre, the depth of dip <1.5 cm or >1.6 cm**<br>**DL not at the centre, the depth of dip <1.5 cm or >1.6 cm** | Deflectogram of<br>$C_0$ = 23 g/150 mL<br>Centred<br>Depth of dip:<br>1.5 - 1.6 cm<br>(0.4 pts)<br>**-0.4**<br>**-0.05**<br>**-0.05**<br>**-0.05**<br>**-0.1** |
| | | Deflectogram |

| | | |
|---|---|---|
| A1. |  | of<br>$C_0$ = 28 gr/150 mL<br><br>Centred<br><br>Deep of dip:<br>1.7 - 1.9 cm<br>(0.4 pts) |
| | **No dip** | **-0.4** |
| | **No reference line** | **-0.05** |
| | **Deflectogram (DL) not at the centre (+- 5mm) but the depth of dip still in 1.7 cm - 1.9 cm range** | **-0.05** |
| | **DL at the centre, the depth of dip <1.7 cm or >1.9 cm** | **-0.05** |
| | **DL not at the centre, the depth of dip <1.7 cm or >1.9 cm** | **-0.1** |

A1.



Deflectogram of

$C_0$ = 33 g/150 mL

Deep of dip:

1.9 - 2.3 cm

(0.4 pts)

**No dip** **-0.4 pts**

**No reference line** **-0.05 pts**

**Deflectogram (DL) not at the centre (+-5mm) but the depth of dip still in 1.9 - 2.3 cm range** **- 0.05 pts**

**DL at the centre, the depth of dip <1.9 cm or >2.3 cm** **- 0.05 pts**

**DL not at the centre, the depth of dip <1.9 cm or >2.3 cm** **-0.1**

A2.

**(1.5 pts)**

| i | $\delta_i$ (cm) | $\xi_i$ (cm) | $Z_o$ (cm) | *d(cm)* | *Z (cm)* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 11.55 | 10.4 ± 0. 1 | 0.8 ± 0.1 | 53.4 ± 0.1 |
| 2 | 0.35 | 11.3 | | | |
| 3 | 0.6 | 11.05 | | | |
| 4 | 0.9 | 10.85 | | | |
| 5 | 1 | 10.65 | | | |
| 6 | 1.1 | 10.35 | | | |
| 7 | 1.3 | 10.15 | | | |
| 8 | 1.4 | 9.85 | | | |
| 9 | 1.45 | 9.7 | | | |
| 10 | 1.5 | 9.45 | | | |
| 11 | 1.6 | 9.25 | | | |
| 12 | 1.5 | 8.95 | | | |
| 13 | 1.4 | 8.65 | | | |
| 14 | 1.2 | 8.35 | | | |
| 15 | 1 | 8.05 | | | |

Table 1 of

$C_0$ = 23 g/150 mL

Optimum $Z$ and $Z_0$

# data = 20

(0.5 pts)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.8 | 7.75 | | | | |
| 17 | 0.7 | 7.55 | | | | |
| 18 | 0.5 | 7.25 | | | | |
| 19 | 0.3 | 6.95 | | | | |
| 20 | 0.2 | 6.65 | | | | |
| 21 | 0.05 | 6.4 | | | | |

Correct data point must be extracted from deflectogram

-0.05 pts

# correct data points >= 20, but not all observable (Z, Z0, d) are written

-0.05 pts

Incorrect *d*

-0.15 pts

15<= # correct data points<20,

-0.3 pts

10<# correct data points<15

-0.45 pts

#correct data points<10

A2.

Table 1 of $C_0$ = 28 g/150 mL

| i | $\delta_i$ (cm) | $\xi_i$ (cm) | $Z_o$ (cm) | *d(cm)* | *Z (cm)* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 11.65 | 10.4 ± 0. 1 | 0.8 ± 0.1 | 53.4 ± 0.1 |
| 2 | 0.25 | 11.4 | | | |
| 3 | 0.4 | 11.2 | | | |
| 4 | 0.8 | 11 | | | |
| 5 | 1 | 10.75 | | | |
| 6 | 1.2 | 10.4 | | | |
| 7 | 1.4 | 10.2 | | | |
| 8 | 1.5 | 10 | | | |
| 9 | 1.6 | 9.8 | | | |
| 10 | 1.7 | 9.5 | | | |
| 11 | 1.75 | 9.25 | | | |
| 12 | 1.7 | 8.95 | | | |
| 13 | 1.65 | 8.7 | | | |
| 14 | 1.5 | 8.4 | | | |
| 15 | 1.25 | 8.05 | | | |
| 16 | 0.9 | 7.6 | | | |
| 17 | 0.6 | 7.3 | | | |
| 18 | 0.4 | 7.05 | | | |
| 19 | 0.25 | 6.75 | | | |
| 20 | 0.05 | 6.3 | | | |

Optimum $Z$ and $Z_0$

# data = 20

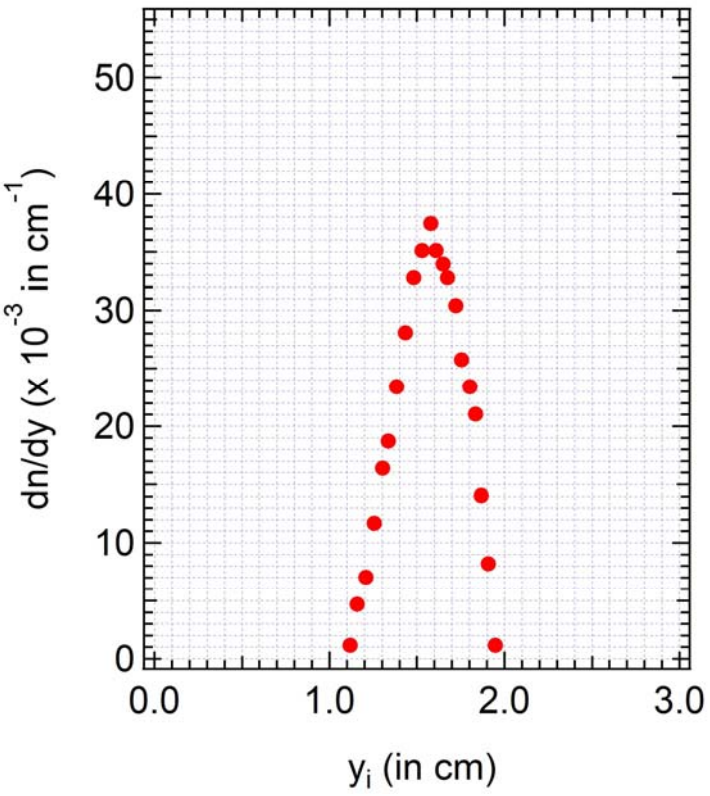
(0.5 pts)

| | | |
|---|---|---|
| | Correct data point must be extracted from deflectogram | |
| | # correct data points >= 20, but not all observable (Z, Z0, d) are written | -0.05 pts |
| | Incorrect *d* | -0.05 pts |
| | 15<= # correct data points<20, | -0.15 pts |
| | 10<# correct data points<15 | -0.3 pts |
| | #correct data points<10 | -0.45 pts |
| A2. | | Table 1 of $C_0$ = 33 g/150 mL<br># data point >= 20<br>(0.5 pts) |

| i | $\delta_i$ (cm) | $\xi_i$ (cm) | $Z_o$ (cm) | *d(cm)* | *Z (cm)* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 11.6 | 10.4 ± 0. 1 | 0.8 ± 0.1 | 53.4 ± 0.1 |
| 2 | 0.15 | 11.4 | | | |
| 3 | 0.35 | 11.1 | | | |
| 4 | 0.65 | 10.85 | | | |
| 5 | 1.1 | 10.6 | | | |
| 6 | 1.3 | 10.4 | | | |
| 7 | 1.5 | 10.2 | | | |
| 8 | 1.7 | 10 | | | |
| 9 | 1.85 | 9.7 | | | |
| 10 | 2 | 9.5 | | | |
| 11 | 2.1 | 9.25 | | | |
| 12 | 2 | 9 | | | |
| 13 | 1.8 | 8.6 | | | |
| 14 | 1.5 | 8.3 | | | |
| 15 | 1.25 | 8.05 | | | |
| 16 | 1 | 7.8 | | | |
| 17 | 0.75 | 7.45 | | | |
| 18 | 0.55 | 7.15 | | | |
| 19 | 0.4 | 6.8 | | | |
| 20 | 0.2 | 6.4 | | | |
| 21 | 0.05 | 6.1 | | | |

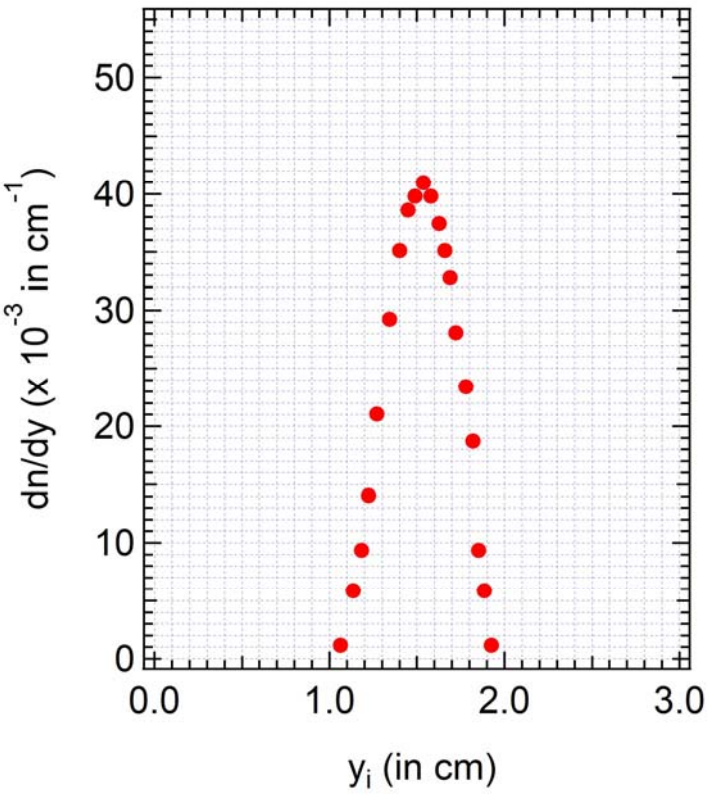
| | |
|---|---|
| Correct data point must be extracted from deflectogram | |
| # correct data points >= 20, but not all observable (Z, Z0, d) are written | -0.05 pts |
| Incorrect *d* | -0.05 pts |
| 15<= # correct data points<20, | -0.15 pts |

<table>
<tr><td></td><td>10<# correct data points<15<br>#correct data points<10</td><td>-0.3 pts<br>-0.45 pts</td></tr>
<tr><td>A3.<br>(1.5 pts)</td><td>
<table>
<tr><th>i</th><th>$Y_i$ (cm)</th><th>dn/dY</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1.85944</td><td>0.00117</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1.81919</td><td>0.00819</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.77894</td><td>0.01404</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1.74674</td><td>0.02106</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1.71455</td><td>0.02340</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1.66625</td><td>0.02574</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1.63405</td><td>0.03043</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1.58575</td><td>0.03277</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1.56161</td><td>0.03394</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1.52136</td><td>0.03511</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1.48916</td><td>0.03745</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1.44086</td><td>0.03511</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1.39257</td><td>0.03277</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1.34427</td><td>0.02809</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1.29597</td><td>0.02340</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1.24767</td><td>0.01872</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1.21548</td><td>0.01638</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1.16718</td><td>0.01170</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1.11888</td><td>0.00702</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1.07058</td><td>0.00468</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1.03034</td><td>0.00117</td></tr>
</table>
Jury must check the data in table<br># wrong data point < 3<br>3<# wrong data point < 6<br># wrong data point > 6</td><td>Table 2 of<br>$C_0$ = 23 g/150 mL.<br># data = 20<br>(0.25 pts)<br>- 0<br>- 0.05 pts<br>- 0.25pts</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| A3. |  <br>No x-axis label<br>No x-axis unit<br>Without x-axis unit<br>No y-axis label<br>No y-axis unit<br>Without y-axis unit<br>Ordinate axis represented in 2 digid behind point<br>Ordinate axis represented in 3 digid behind point<br>Random shape | Plot dn/dY vs Y<br>$C_0$ = 23 g/150 mL.<br>"Gaussian-Like" shape<br>(0.25 pts)<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.05 pts<br>-0 pts<br>-0.25 pts |
| A3. | | Table 2 of<br>$C_0$ = 28 g/150 mL.<br># data = 20 |

| i | $Y_i$ (cm) | dn/dY |
|---|---|---|
| 1 | 1.87554 | 0.00117 |
| 2 | 1.83529 | 0.00585 |
| 3 | 1.80309 | 0.00936 |
| 4 | 1.77089 | 0.01872 |

| | | |
|---|---|---|
| | 5 \| 1.73065 \| 0.02340<br>6 \| 1.67430 \| 0.02809<br>7 \| 1.64210 \| 0.03277<br>8 \| 1.60990 \| 0.03511<br>9 \| 1.57770 \| 0.03745<br>10 \| 1.52941 \| 0.03979<br>11 \| 1.48916 \| 0.04096<br>12 \| 1.44086 \| 0.03979<br>13 \| 1.40061 \| 0.03862<br>14 \| 1.35232 \| 0.03511<br>15 \| 1.29597 \| 0.02926<br>16 \| 1.22352 \| 0.02106<br>17 \| 1.17523 \| 0.01404<br>18 \| 1.13498 \| 0.00936<br>19 \| 1.08668 \| 0.00585<br>20 \| 1.01424 \| 0.00117<br><br>Jury must check the data in table<br><br># wrong data point < 3<br>3<# wrong data point < 6<br># wrong data point > 6 | (0.25 pts)<br><br>- 0<br>- 0.05 pts<br>- 0.25pts |
| A3. | | Plot dn/dY vs Y<br>$C_0$ = 28 g/150 mL.<br><br>"Gaussian-Like" shape<br><br>(0.25 pts) |




| | | |
|---|---|---|
| | without x-axis label | -0.01 pts |
| | without x-axis unit | -0.01 pts |
| | wrong x-axis unit | -0.01 pts |
| | without y-axis label | -0.01 pts |
| | without y-axis unit | -0.01 pts |
| | wrong y-axis unit | -0.01 pts |
| | Ordinate axis represented in 2 digid behind point | -0.05 pts |
| | Ordinate axis represented in 3 digid behind point | -0 pts |
| | Random shape of the curve | -0.25 pts |

A3.

| i | $Y_i$ (cm) | dn/dY |
|---|---|---|
| 1 | 1.86749 | 0.00117 |
| 2 | 1.83529 | 0.00351 |
| 3 | 1.78699 | 0.00819 |
| 4 | 1.74674 | 0.01521 |
| 5 | 1.70650 | 0.02574 |

Table 2 of $C_0$ = 33 g/150 mL.

# data = 20

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1.67430 | 0.03043 |
| 7 | 1.64210 | 0.03511 |
| 8 | 1.60990 | 0.03979 |
| 9 | 1.56161 | 0.04330 |
| 10 | 1.52941 | 0.04681 |
| 11 | 1.48916 | 0.04915 |
| 12 | 1.44891 | 0.04681 |
| 13 | 1.38452 | 0.04213 |
| 14 | 1.33622 | 0.03511 |
| 15 | 1.29597 | 0.02926 |
| 16 | 1.25572 | 0.02340 |
| 17 | 1.19938 | 0.01755 |
| 18 | 1.15108 | 0.01287 |
| 19 | 1.09473 | 0.00936 |
| 20 | 1.03034 | 0.00468 |
| 21 | 0.98204 | 0.00117 |

(0.25 pts)

Jury must check the data in table

# wrong data point < 3 — - 0

3<# wrong data point < 6 — - 0.05 pts

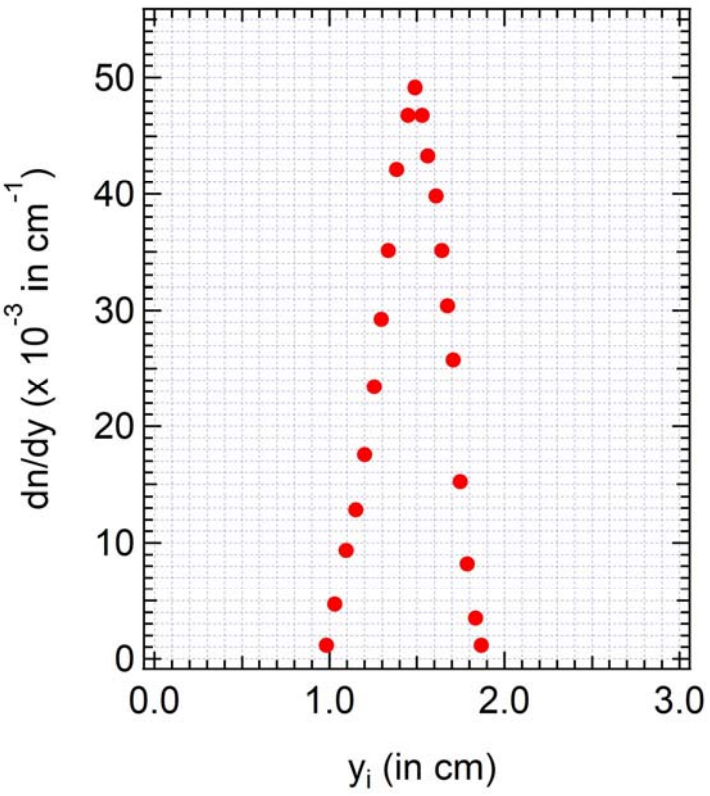
# wrong data point > 6 — - 0.25pts

A3.

Plot dn/dY vs Y

$C_0$ = 33 g/150 mL.

(0.25 pts)

| | | |
|---|---|---|
| |  <br>without x-axis label<br>without x-axis unit<br>wrong x-axis unit<br>without y-axis label<br>without y-axis unit<br>wrong y-axis unit<br><br>Ordinate axis represented in 2 digid behind point<br>Ordinate axis represented in 3 digid behind point<br><br>Random shape of the curve | -0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br><br>-0.05 pts<br>-0 pts<br><br>-0.25 pts |
| A4.<br>**(0.3 pts)** | *h* for 23 g/ 150 mL = (1.5 ± 0.1) cm | 0.1 pts |

| | | |
|---|---|---|
| | $h$ for 28 g/ 150 mL = $(1.5 \pm 0.1)$ cm | 0.1 pts |
| | $h$ for 33 g/ 150 mL = $(1.5 \pm 0.1)$ cm | 0.1 pts |
| | If $h$ is correctly determined from graph A3 for each concentration | - 0 |
| | If $h$ is not correctly determined from graph A3 for each concentration | -0.1 |

**B : Determination of Diffusion Coefficient (4.2 points)**

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| B1. **(0.9 pts)** | **Linear form of eq.(3)**<br>$\ln\left(\frac{dn}{dY}\right) \approx m(h-Y)^2 + C$ (b1)<br>$m = -\frac{1}{4D_e t}$<br>Constant : $C = \ln\left(\left(\frac{dn}{dc}\right)\left(\frac{C_0}{2\sqrt{\pi D_e t}}\right)\right)$<br>Other than (b1) | 0.9 pt<br>-0.9 pts |
| B2. **(1.8 pts)** | <table><tr><th>i</th><th>$(h-y_i)^2$</th><th>ln(dn/dy)</th></tr><tr><td>1</td><td>0.06592</td><td>-3.86003</td></tr><tr><td>2</td><td>0.050423</td><td>-3.75467</td></tr><tr><td>3</td><td>0.031065</td><td>-3.65936</td></tr></table> | Table 3 of<br>$C_0$ = 23 g /150 mL. |

| | | |
|---|---|---|
| | 4 | 0.020752 | -3.4923 |
| | 5 | 0.00917 | -3.41819 |
| | 6 | 0.005128 | -3.3831 |
| | 7 | 0.000984 | -3.3492 |
| | 8 | 6.99E-07 | -3.28466 |
| | 9 | 0.002414 | -3.3492 |
| | 10 | 0.009493 | -3.41819 |
| | 11 | 0.021237 | -3.57235 |
| | 12 | 0.037646 | -3.75467 |
| | 13 | 0.05872 | -3.97781 |

Jury must check the data in table

# of data point > 10 — -0 pts

3 <= # of data point < 10 — -0.05 pts

# of data point < 3 — -0.3 pts

# wrong data point < 3 — - 0

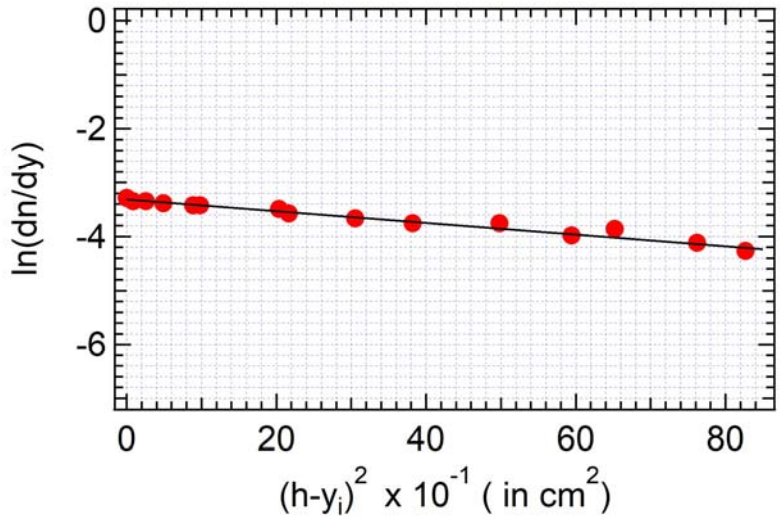
3<# wrong data point < 6 — - 0.05 pts

# wrong data point >6 — - 0.25 pts

# data = 10

(0.3 pts)

B2




Using linear regression of eq. (B1.1), we obtain

$m$ (slope) = −10 cm$^{-2}$ till −8.8 cm$^{-2}$

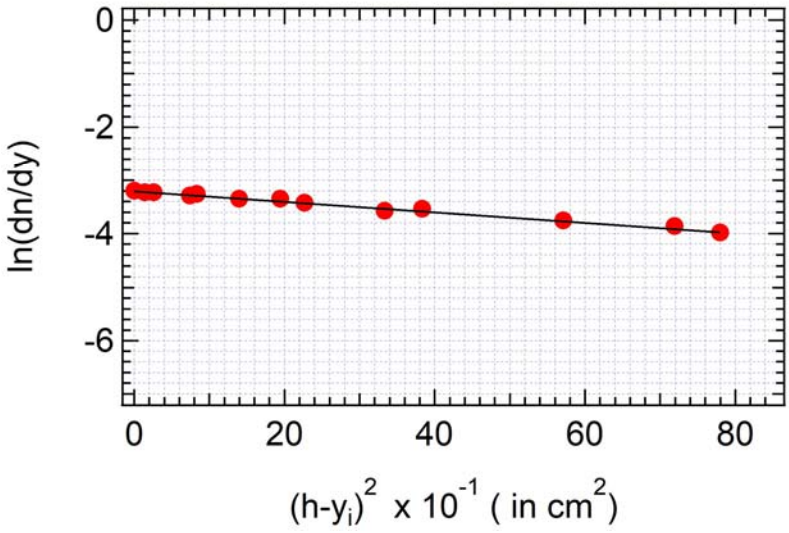
Plot of Table 3

$C_0$ = 23 g/150 mL

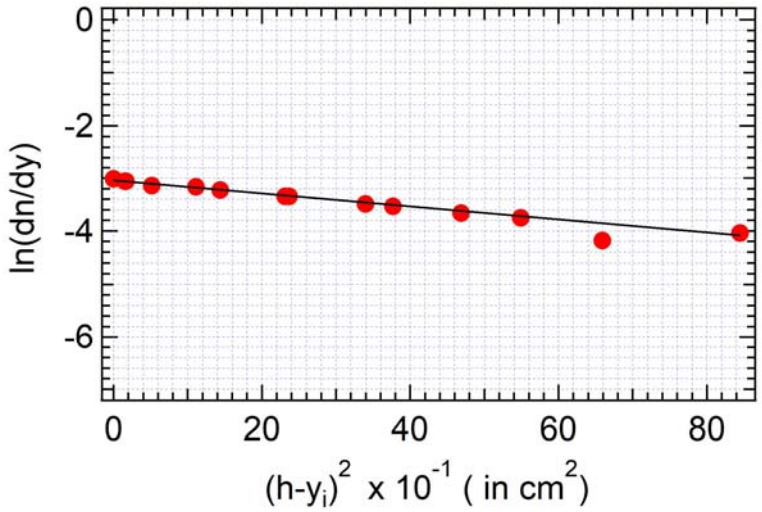
# data = 10

(0.3pts)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>without x-axis label<br>without x-axis unit<br>wrong x-axis unit<br>without y-axis label<br>without y-axis unit<br>wrong y-axis unit<br><br># of data point in linear range > 10<br>3 <= # of data point in linear range < 10<br># of data point in linear range < 3 or random shape of curve<br>m is out of range</td>
<td>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br><br>- 0<br>- 0.05 pts<br>- 0.25 pts<br>-0.3 pts</td>
</tr>
<tr>
<td>B2.</td>
<td>
<table>
<tr><th>i</th><th>$(h-yi)^2$</th><th>ln(dn/dy)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.057912</td><td>-3.75467</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.033968</td><td>-3.57235</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.023136</td><td>-3.41819</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.014378</td><td>-3.3492</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0.007693</td><td>-3.28466</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0.001553</td><td>-3.22404</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6.99E-07</td><td>-3.19505</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0.002414</td><td>-3.22404</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0.007989</td><td>-3.25389</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.018955</td><td>-3.3492</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0.037646</td><td>-3.53152</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0.071007</td><td>-3.86003</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0.099079</td><td>-4.26549</td></tr>
</table>
<br>Jury must check the data in table</td>
<td>Table 3 of<br>$C_0$ = 28 g /150 mL<br><br># data = 10<br><br>(0.3 pts)</td>
</tr>
</table>

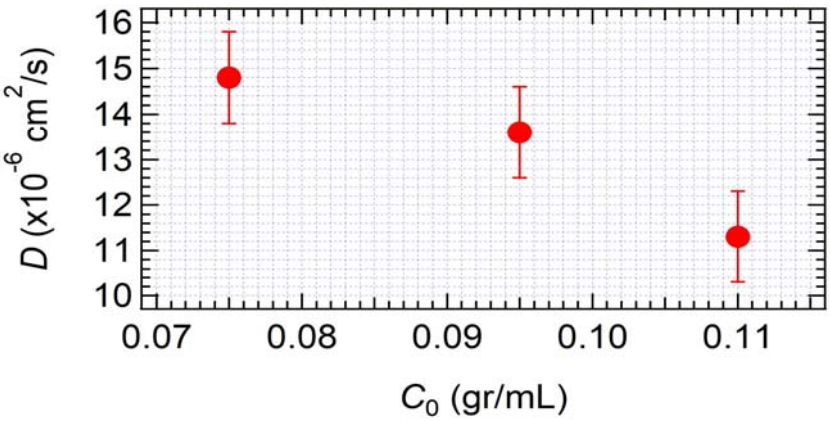
| | | |
|---|---|---|
| | # of data point > 10<br>3 <= # of data point < 10<br># of data point < 3<br><br># wrong data point < 3<br>3<# wrong data point < 6<br># wrong data point >6 | -0 pts<br>-0.05 pts<br>-0.3 pts<br><br>- 0<br>- 0.05 pts<br>- 0.25 pts |
| B2. |  <br>Using linear regression of eq. (B1.1), we obtain<br>$m$ (slope) = −10.3 $cm^{-2}$ till −11 $cm^{-2}$<br>without x-axis label<br>without x-axis unit<br>wrong x-axis unit<br>without y-axis label<br>without y-axis unit<br>wrong y-axis unit | Plot of Table 3<br>$C_0$ = 28 g/150 mL<br><br># data = 10<br><br>(0.3pts)<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br><br>-0 pts |

<table>
<tr><td></td><td># of data point in linear range > 10<br>3 <= # of data point in linear range < 10<br># of data point in linear range < 3 or random shape of curve<br>m is out of range</td><td>-0.05 pts<br>-0.3 pts<br>-0.3 pts</td></tr>
<tr><td>B2.</td><td><table>
<tr><th>i</th><th>$(h-y_i)^2$</th><th>ln(dn/dy)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.046873</td><td>-3.65936</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.033968</td><td>-3.4923</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.023136</td><td>-3.3492</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.014378</td><td>-3.22404</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0.005128</td><td>-3.13948</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0.001553</td><td>-3.06152</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6.99E-07</td><td>-3.01273</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0.001688</td><td>-3.06152</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0.011126</td><td>-3.16688</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.023647</td><td>-3.3492</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0.037646</td><td>-3.53152</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0.054884</td><td>-3.75467</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0.08446</td><td>-4.04235</td></tr>
</table>
Jury must check the data in table<br># of data point > 10<br>3 <= # of data point < 10<br># of data point < 3<br># wrong data point < 3<br>3<# wrong data point < 6<br># wrong data point >6</td><td>Table 3 of<br>$C_0$ = 33 g /150 mL<br># data = 10<br>(0.3 pts)<br>-0 pts<br>-0.05 pts<br>-0.3 pts<br>- 0<br>- 0.05 pts<br>- 0.25</td></tr>
<tr><td>B2.</td><td></td><td>Plot of Table 3<br>$C_0$ = 33 g/150 mL</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| |  <br>Using linear regression of eq. (B1.1), we obtain<br>*m* (slope) = −11.3 $cm^{-2}$ till −12.8 $cm^{-2}$<br>without x-axis label<br>without x-axis unit<br>wrong x-axis unit<br>without y-axis label<br>without y-axis unit<br>wrong y-axis unit<br><br>m is out of range<br># of data point in linear range > 10<br>3 <= # of data point in linear range < 10<br># of data point in linear range < 3 or random shape of curve | # data = 10<br><br>(0.3pts)<br><br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br>-0.01 pts<br><br>-0.3 pts<br>-0 pts<br>-0.05 pts<br>-0.3 |
| B3<br>**(1.5 pts)** | *D* of 23 g/ 150 mL = (1.38 till 1.58) x $10^{-5}$ $cm^2/s$<br><br>*D* of 28 g/ 150 mL = (1.26 till 1.46) x $10^{-5}$ $cm^2/s$ | 0.5 pts<br><br>0.5 pts |

| | | |
|---|---|---|
| | $D$ of 33 g/ 150 mL = (1.03 till 1.23) x $10^{-5}$ $cm^2/s$<br>$D$ is out of range for each concentration | 0.5 pts-<br>-0.5 pts |

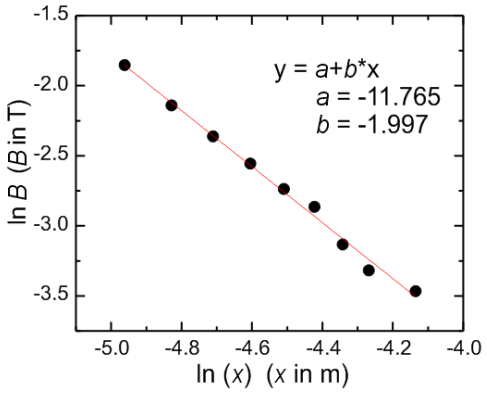
## C. Nonlinear diffusion (1.3 points)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| C1.<br>**(1.3 pts)** |  <br>Without error bars<br>**Value of C not stated in $C_0/2$** | Plot $D$ vs. $C_0$<br>0.8 pts<br>-0<br>-0.4 pts |
| C1. | $\frac{d}{dC}D = -4.2 \times 10^{-5} cm^2\ mL\ g^{-1}s^{-1}$ till $-15.8 \times 10^{-5} cm^2\ mL\ g^{-1}s^{-1}$<br>Without or wrong unit<br>Out of range | 0.5 pts<br>-0.01 pts<br>-0.5 pts |

# Parallel Dipole Line Magnetic Trap for Earthquake & Volcanic Sensing (10 points)

## A. BASIC CHARACTERISTICS OF PDL TRAP

### 1. Determination of the magnet's magnetization (*M*) (2.5 pts)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A.1<br>0.1<br>pts | *Record zero offset ($B_0$) of the Teslameter without any magnet nearby. Subtract subsequent field measurement with this value*<br><br>Example from a Teslameter unit: $B_0$ = 0.86 mT | 0.08 pts range (-10 mT to 10 mT)<br><br>Correct unit: 0.02 pts |
| A.2<br>1.15<br>pts | *Measure magnetic field B vs. x in the near field region ($7 \le x \le 16$ mm). Where x is the position measured from the center of the magnet. Record and plot your result on the answer sheet.*<br><br>$x_0$ = 4 mm, $B_0$=0.86 mT. $\Delta x$ is measured from surface. $B$ = $B$raw - $B_0$<br><br>(table below)<br><br>Plot:<br>  | Correct label and unit for data: 0.1 pts<br><br>Number of correct data for $x$ <= 16 mm: 0.05 pts for each correct data, max 0.45 pts<br><br>Plot:<br>-Correct axis label and unit: 0.05 pts<br><br>- Using around 75% of plot area: 0.05 pts<br><br>-For each correct data point: 0.05 pts, max. 0.4 pts<br><br>-Adding trendline: 0.1 pts |

| $\Delta x$ (mm) | $X$ (mm) | $B$raw (T) | B (T) | ln($x$) $x$ in m | ln($B$) $B$ in T |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 0.1576 | 0.1567 | -4.962 | -1.853 |
| 4 | 8 | 0.1186 | 0.1177 | -4.828 | -2.139 |
| 5 | 9 | 0.0951 | 0.0942 | -4.710 | -2.362 |
| 6 | 10 | 0.0785 | 0.0776 | -4.605 | -2.556 |
| 7 | 11 | 0.0657 | 0.0648 | -4.510 | -2.736 |
| 8 | 12 | 0.0579 | 0.0570 | -4.423 | -2.864 |
| 9 | 13 | 0.0445 | 0.0436 | -4.343 | -3.132 |
| 10 | 14 | 0.0371 | 0.0362 | -4.269 | -3.318 |
| 12 | 16 | 0.0321 | 0.0312 | -4.135 | -3.466 |

| | | |
|---|---|---|
| A.3<br>0.75<br>pts | *Use your experimental data to determine the value of the exponent p.*<br>Linear regression (LR) $y = a + b\,x$ : $B = \frac{\mu_0 m}{2\pi L}\frac{1}{x^p}$<br>$\ln(B) = a - p\ln x$ where $a = \ln\left(\frac{\mu_0 m}{2\pi L}\right)$.<br>LR yields : $a$ = *-11.765* and $b$ = *-1.997*<br>The power exponent:<br>$p$ = *-b = 2.0*<br><br>Note that this is in very good agreement with the exact result: at short distance ($x < L$) a diametric (or a dipole line) magnet has $B \sim 1/r^2$ dependence. See Ref. [1] , Fig. 2c. | Obtaining $p$ from graph: 0.05 pts<br>Obtaining $p$ from linear regression: 0.1 pts<br><br>Result:<br>$p$ = 1.8 - 2.2 : 0.65 pts<br>$p$ = 1.6 - 2.4 : 0.35 pts<br><br>Result with wrong sign:<br>$p$ = (-1.8) – (-2.2) : 0.4pts<br>$p$ = (-1.6) – (-2.4) :0.1pts<br><br>More than two sig. figs.: minus 0.05 pts |
| A.4<br>0.5<br>pts | *Determine the magnet's magnetization M.*<br><br>$m = \frac{2\pi L}{\mu_0}\exp(a) = 0.987\ \mathrm{Am}^2$<br>$M = \frac{m}{\pi R^2 L} = 1.2\mathrm{x}10^6\ \mathrm{A/m}$<br><br>This is close to the more accurate results from more extensive measurements to far field (see Ref. [1], Fig. 2c) and *we use this value for subsequent questions:*<br>$M = 1.1\mathrm{x}10^6\ \mathrm{A/m}$ | Correct unit: 0.05 pts<br><br>Obtaining intercept ($a$) from graph: 0.025 pts<br>Obtaining intercept from LR: 0.05 pts<br><br>Correct formula for $m$ and/or $M$ : 0.1 pts<br><br>Result for $M$ (x$10^6$ A/m):<br>0.9 - 1.4 : 0.3 pts<br>0.1 - 2.5 : 0.15 pts<br><br>More than 2 sig. figs.: minus 0.05 pts |

## 2. The Magnetic Levitation Effect and Magnetic Susceptibility (χ) (1 pts)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A.5<br>0.1<br>pts | *Place gently a graphite rod HB/0.5 and length = 8 mm. Measure the levitation height $y_0$ of the rod (see Fig. 7a). Hint: Use the insert ruler provided as shown in Fig. 7b. Press the ruler on the magnets to read the position of the graphite rod*<br><br>We levitate graphite HB/0.5, $l$ = 8mm. Using the insert-ruler, we measure approximately $\Delta y$ = 1 mm from the top of the magnet surface. Thus: $y_0 = R - \Delta y$ = (3.2 - 1) mm = 2.2 mm | correct unit: 0.02<br><br>$y_0$ = (1.7 - 2.2) mm: 0.08 pts<br><br>partial credit:<br>Only $\Delta y$ = (1 - 1.5) mm: 0.03 pts |

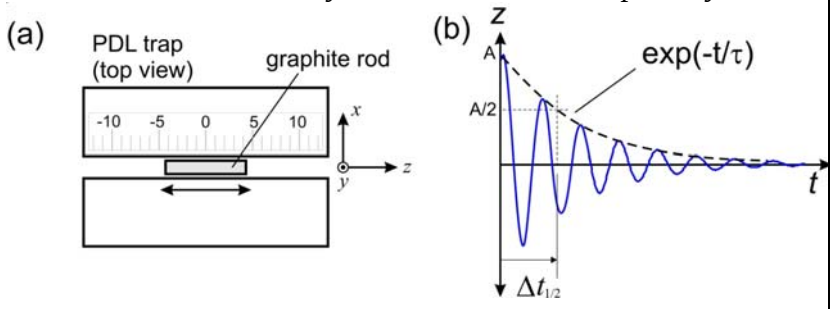
| | | |
|---|---|---|
| A.6<br>0.8<br>pts | *Use the result from part A.5 to determine the magnetic susceptibility $\chi$ of the graphite rod.*<br><br>Solving for $\chi$: $mg = F_y = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_R}{2}\frac{R^4}{a^5} f_Y(y_0/a)$<br>$\chi = -\frac{2\rho g a^5}{\mu_0 M^2 R^4 f_Y(y_0/a)}$<br><br>We calculate: $a = R + g_M/2$ =(3.2+1.5/2) mm=3.95 mm.<br>Using $y_0$ = 2.2 mm: $f_Y(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5}$ ,<br>$f_Y(y_0/a) = f_Y(2.2/3.95)$=1.07<br>Using the correct $M$ = 1.1x10$^6$A/m; and $R$ = 3.2 mm, ρ = 1680 kg/m$^3$ we have: $\chi = -1.85\text{x}10^{-4}$.<br><br>Note that this is very good agreement with the literature value for graphite pencil lead: $\chi = -2\times10^{-4}$ (see Ref.[1], pg. 2 & Ref.[2]). The sign is negative indicating a diamagnetic material. | Correct expression for χ: 0.4 pts<br><br>Result for χ (x10$^{-4}$)<br>-(1.4 to 2.6) : 0.4 pts<br>-(0.5 to 4) : 0.2 pts<br><br>Wrong sign: minus 0.1 pts |
| A.7<br>0.1<br>pts | *What kind of magnetic material is graphite? Choose one: (i) Ferromagnetic; (ii) Paramagnetic; or (iii) Diamagnetic?*<br><br>(iii) Diamagnetic. Because:<br>(1) Graphite is repelled by magnetic field<br>(2) The sign of χ is negative. | Correct choice: 0.1 pts |

## 3. The camelback potential oscillation and magnetic susceptibility (χ) (1 points)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A.8<br>0.2<br>pts | *Perform an oscillation for the "HB/0.5" graphite and l =8 mm. Limit to small oscillation amplitude i.e. A < 4mm. Determine the oscillation period. (The oscillation will decay over time due to damping, ignore this damping effect).*<br><br>Example, we measured 5 oscillations of HB/0.5 with length *l* = 8 mm. We displaced it by ~3 mm and let it oscillates. We measured 5 oscillation periods:<br><br>**Trial** \| **5 Tz** \| \| \| \| \|<br>\| (s) \| \| \| \| \|<br>1 \| 6.12 \| \| \| \| \| | Correct label and unit: 0.02 pts<br><br>Number of correct data each 0.01 pts, max 0.03 pts<br><br>Number of oscillation<br>< 3 : 0 pts<br>>= 3 : 0.05 pts<br><br>$T_z$ = (1.2 - 1.5) s: 0.1 pts |

| | | |
|---|---|---|
| | 2 \| 6.13 \| \| \| \| \|<br>3 \| 6.14 \| \| \| \| \|<br><br>Average : $T_z$ = 1.23 s | |
| A.9<br>0.8<br>pts | *Calculate the magnetic susceptibility ($\chi$) of the graphite using this oscillation*<br><br>For harmonic oscillator : $k_z = m_R\,\omega^2$ , solving for $\chi$:<br>$$\chi = -\frac{k_z}{C_1\mu_0 M^2 V_r} = \frac{\omega^2\rho}{C_1\mu_0 M^2}$$<br>Using the correct $M = 1.1\text{x}10^6$A/m.<br>Using $C_1 = 198.6/\text{m}^2$, and $T_z = 1.23$ s, we obtain<br>$\chi = -1.5\times10^{-4}$ .<br><br>Note that this is in good agreement with the literature value of the graphite pencil lead: $\chi = -2\times10^{-4}$ (Ref.[1], pg. 2); and the sign is negative indicating a diamagnetic material. | Correct expression for $\chi$: 0.4 pts<br><br>Result for $\chi$ ($\text{x}10^{-4}$)<br>-(1.4 to 2.6) : 0.4 pts<br>-(0.5 to 4) : 0.2 pts<br><br>Wrong sign: minus 0.1 pts |

## 4. Oscillator quality factor ($Q$) and estimate of air viscosity $\mu_A$ (3.0 points)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| A.10<br>0.5<br>pts | *We need to determine the damping time constant of the oscillation $\tau$. Sketch how you measure $\tau$ in a simple way .*<br>  <br><br>The trick is to use "half-time" concept of exponential decay. We set the oscillation and measure the time taken for the amplitude to halve. The lifetime is:<br>$$\tau = \frac{\Delta t_{1/2}}{\ln 2}$$ | Correct idea: 0.3 pts<br><br>Correct expression for $\tau$: 0.2 pts |
| A.11<br>1.5<br>pts | *Perform oscillation damping experiments with a group of rods with various diameters and fixed length of 8 mm. Determine the damping time constant $\tau$ for each rods* | Correct label and unit 0.1<br><br>Number of correct data |

We displaced the graphite by ~4 mm, started the stopwatch and then waited until it decays to half.

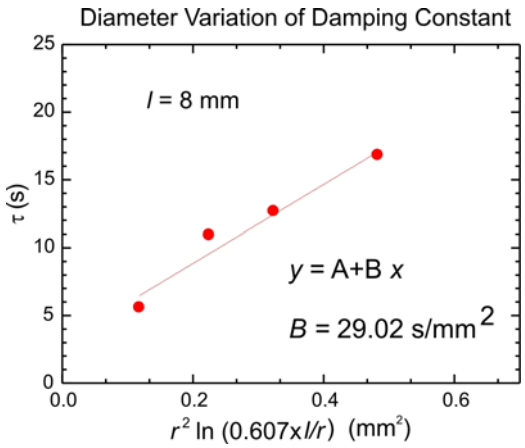
| Trial | Diam. | Actual Radius | $\Delta t_{1/2}$ | Mean $\Delta t_{1/2}$ | $\tau$ | $r^2 \times \ln(0.607\, l/r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (mm) | (mm) | (s) | (s) | (s) | ($mm^2$) |
| 1 | 0.3 | 0.19 | 3.89 | 3.913 | 5.646 | 0.117 |
| | | | 3.97 | | | |
| | | | 3.88 | | | |
| 2 | 0.5 | 0.28 | 7.69 | 7.617 | 10.989 | 0.224 |
| | | | 7.57 | | | |
| | | | 7.59 | | | |
| 3 | 0.7 | 0.35 | 8.77 | 8.82 | 12.73 | 0.322 |
| | | | 8.81 | | | |
| | | | 8.88 | | | |
| 4 | 0.9 | 0.45 | 12.4 | 11.70 | 16.88 | 0.482 |
| | | | 11.33 | | | |
| | | | 11.38 | | | |

for each diameter (4):
< 3 : 0.1 pts
>=3 : 0.25 pts
(max 1.0 pts)

Positive monotonic trend for $\tau$ vs. diameter from 0.3 to 0.9 mm with $\tau$ = 5 to 20 sec : 0.4 pts

A.12
1 pts

*Determine the air viscosity* $\mu_A$




We have: $\tau = b r^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$, where: $b = \frac{2}{3}\frac{\rho}{\mu_A}$. We performed linear regression $y = a + b\,x$, with $y = \tau$ and $x = r^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$. We obtain: $b$ = 29.02 s/mm$^2$.

$\mu_A = \frac{2}{3}\frac{\rho}{b}$ = 38.6 $10^{-6}$ Pa.s (1 Pa.s = 1 kg /m s)

Note that this is about 2.1x the actual viscosity of air of 18.2μ.Pa.s. The discrepancy is due to the ellipsoidal

Correct unit: 0.05

Obtaining result with linear regression or plot: 0.25 pts

Result $\mu_A$ (x$10^{-6}$ Pa.s):
20 - 60 : 0.7 pts
10 - 80 : 0.4 pts
1 - 100 : 0.1 pts

| | | |
|---|---|---|
| | approximation of the Stokes drag (vs. the actual cylindrical shape of the rod) and the proximity effect of the rod to the magnet (wall effect). Another factor is the crude nature of our manual τ determination. See Ref. [1], pg. 8. | |

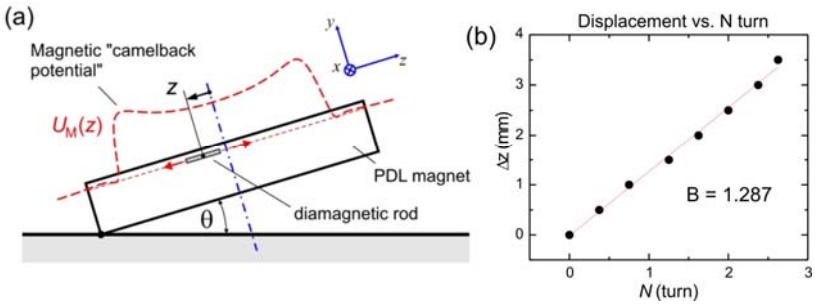
## B. SENSOR APPLICATION OF THE PDL TRAP

### 5. PDL Trap Seismometer (0.5 pts)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| B.1<br>0.2<br>pts | *Which diameter of rod do you choose?*<br><br>To obtain the lowest acceleration noise floor "$a_n$" we should choose the largest diameter graphite i.e. 0.9 mm, because their damping time is the longest and the mass is the largest. | Correct answer: 0.2 pts |
| B.2<br>0.3<br>pts | *Calculate the seismometer acceleration noise floor ($a_n$) for the rod of your choice!*<br><br>For HB/0.9 and length $l$ = 8 mm:<br>We use τ = 16.9 s; and $T$ = 298 K, we have: $m_R = \rho \pi r^2 l$ = $8.55\text{x}10^{-6}$ kg :<br><br>$a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega_0}{Q m_R}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\tau m_R}} = 1.5\text{x}10^{-8} m/(s^2 Hz^{0.5})$ | Correct unit: 0.1<br><br>Correct answer: 0.2 pts |

### 6. PDL Trap Tiltmeter (2 pts)

| Question | Answer | Marks |
|---|---|---|
| B.3<br>0.5<br>pts | *Derive the relation theoretically between displacement Δz with the screw thread size S and the number of turns (N).*<br>$k_z \Delta z = m g \sin\theta = m g N S / D \qquad \Delta z = \frac{m g S N}{k_z D}$<br>From Question 3, we also have $k_z = m\omega^2$ :<br>$\Delta z = \frac{g S}{\omega^2 D} N$ | Correct expression: 0.5 pts<br><br>Partial credit<br>$k_z \Delta z = m g \sin\theta$ : 0.2 |
| B.4<br>1.25<br>pts | *By turning the screw slowly, determine the rod displacement Δz vs. the number of screw turns (N). Determine the thread size S* | Correct label and unit: 0.1 pts |

| | | |
|---|---|---|
| | We measured the distance between screws: $D$ = 22 cm, and we used the period from Q3: $T_z$ = 1.23 s<br><br>| Δz (mm) | ϕ | N (turn) | | | |<br>|---|---|---|---|---|---|<br>| 0 | 0 | 0 | | | |<br>| 0.5 | 135 | 0.375 | | | |<br>| 1 | 270 | 0.75 | | | |<br>| 1.5 | 450 | 1.25 | | | |<br>| 2 | 585 | 1.625 | | | |<br>| 2.5 | 720 | 2.0 | | | |<br>| 3 | 855 | 2.375 | | | |<br>| 3.5 | 945 | 2.625 | | | |<br><br>  <br><br>By performing linear regression: $y = a + b\,x$<br>We have $b$ = 1.287 mm/turns : $S = \frac{b\omega^2 D}{g}$ = 0.75 mm/turn.<br>This is reasonably close to the actual value of the thread size: $S$ = (0.8±0.1) mm/turn. | Distance between screws:<br>22.8 < $D$ < 22.2 cm : 0.1 pts<br><br>Number of correct data:<br>< 3 sets : 0 pts<br>3-5 sets: 0.15 pts<br>>5 sets : 0.25 pts<br><br>Obtaining result with linear regression or plot: 0.2 pts<br><br>Result:<br>0.7 < $S$ < 0.9 : 0.55 pts<br>0.5< S <1.1 : 0.15 pts<br><br>Correct unit for S : 0.05 |
| B.5<br>0.25 pts | *When the ground tilt changes we want the graphite rod to go to equilibrium as fast as possible (instead of sustaining very long oscillation) to allow easy reading. What is the ideal Q factor for a tiltmeter?*<br><br>We need critical damping thus: $Q$ = 0.5 | Correct Q : 0.25 pts |

## REFERENCES:

[1] Gunawan, O. & Virgus, Y. *The one-dimensional camelback potential in the parallel dipole line trap: Stability conditions and finite size effect.* J. Appl. Phys. 121, 133902, (2017). DOI:10.1063/1.4978876.

[2] Gunawan, O., Virgus, Y. & Fai Tai, K. *A parallel dipole line system.* Appl. Phys. Lett. 106, 062407, (2015). DOI: 10.1063/1.4907931.